ÉTUDE DU CROCHET DE LIE

- Le but du problème est d'étudier certaines propriétés du crochet de Lie.
- Dans tout le problème, E désigne un $\mathbb{C}$-espace vectoriel de dimension finie $n \geqslant 2$, et $\mathcal{L}(E)$ la $\mathbb{C}$-algèbre des endomorphismes de E.
- Si f et g sont deux éléments de $\mathcal{L}(E)$, on note fg la composée $f \circ g$, et $[f,g]$ l'endomorphisme : $[f,g] = fg - gf$.
  Il pourra être utile de remarquer : $[f,g] = 0 \Longleftrightarrow f$ et g commutent.
- Pour f et g dans $\mathcal{L}(E)$, on pose : $\psi_f(g) = [f,g]$. ψ_f est donc un endomorphisme de $\mathcal{L}(E)$ (on ne demande pas de le vérifier).
- Pour tout entier $k \in \mathbb{N}$, et pour $f \in \mathcal{L}(E)$, f^{k+1} est défini par la relation : $f^{k+1} = ff^k$, et f^0 désigne l'automorphisme identité de E, noté Id_E.
- Pour tout polynôme $P = a_0 + a_1X + \ldots + a_dX^d$ à coefficients dans $\mathbb{C}$, et pour tout $f \in \mathcal{L}(E)$, on note $P(f)$ l'endomorphisme de E défini par : $P(f) = a_0Id_E + a_1f + \ldots a_df^d$.

PARTIE A : Quelques résultats généraux.

1°) Soit f un élément de $\mathcal{L}(E)$.
Montrer que f est nilpotent si et seulement si sa seule valeur propre est 0.

2°) Soient f,g,h trois éléments de $\mathcal{L}(E)$. Établir l'égalité :

$$[fg,h] \;=\; [f,h]g \;+\; f[g,h]$$

Établir une égalité similaire pour $[f,gh]$.

3°) Soient f,g deux éléments de $\mathcal{L}(E)$. Dans toute cette question, on fait l'hypothèse :

$$[f,[f,g]] \;=\; 0$$

et on pose : $h = [f,g]$.

a) Montrer que, pour tout polynôme P de $\mathbb{C}[X]$, on a : $[P(f),g] = P'(f)h$ (où P' est le polynôme dérivé de P) (on pourra d'abord le démontrer lorsque $P = X^k$, k entier).

b) Pour tout entier $k \in \mathbb{N}$ et tout polynôme P non nul tel que $P(f) = 0$, établir l'égalité :

$$P^{(k)}(f)h^{2^k-1} \;=\; 0 \text{ (où } P^{(k)} \text{ est le polynôme dérivé d'ordre k de } P\text{)}$$

(on pourra considérer le produit : $h^{2^k-1}[P^{(k)}(f)h^{2^k-1},g]$, et raisonner par récurrence sur k).

c) En déduire que h est nilpotent.

4°) Dans toute cette question, f et g désignent deux éléments de $\mathcal{L}(E)$ tels que :

$$f \text{ non nul , } f \text{ nilpotent , } [f,[f,g]] \;=\; 0$$

et on pose toujours : $h = [f,g]$.

a) Soit $k \in \mathbb{N}^*$. On note $N_k = \text{Ker }(f^k)$.
Montrer que, si x appartient à N_k, on a aussi $fg(x) \;\in\; N_k$ (utiliser 3.a).

b) Soit x un vecteur propre non nul de fg, dont la valeur propre associée est notée λ, et soit k le plus petit entier strictement positif tel que $x \in N_k$.
Justifier l'existence de k.
Établir l'égalité : $hf^{k-1}(x) \ = \ \dfrac{\lambda}{k} f^{k-1}(x)$.

c) En déduire que fg est nilpotent, puis que gf est nilpotent.

d) Montrer qu'il existe un endomorphisme $g_1 \in \mathcal{L}(E)$ tel que fg_1 et $g_1 f$ ne soient pas nilpotents.
En déduire que ψ_f n'est pas l'endomorphisme nul.

5°) Dans cette question, f désigne un endomorphisme nilpotent non nul, et p désigne son indice de nilpotence.

a) Soit $g \in \mathcal{L}(E)$. Établir, pour tout entier $k \geqslant 1$:

$$(\psi_f)^k(g) \ = \ \sum_{i=0}^{k} (-1)^i C_k^i f^{k-i} g f^i$$

b) En déduire que ψ_f est un endomorphisme nilpotent de l'espace vectoriel $\mathcal{L}(E)$.

c) Pour tout endomorphisme $u \in \mathcal{L}(E)$, montrer qu'il existe $v \in \mathcal{L}(E)$ tel que $uvu = u$.
En déduire que f^{p-1} appartient à l'image de l'endomorphisme $(\psi_f)^{2p-2}$, et en déduire l'indice de nilpotence de ψ_f.

PARTIE B : Étude de l'équation $[f,g] = \alpha g$

Dans toute cette partie, f et g désignent deux endomorphismes non nuls de E tels que :

$$[f,g] \ = \ \alpha g \text{ , où } \alpha \text{ est un complexe non nul}$$

1°) **a)** Montrer que : $\forall k \in \mathbb{N}$, $fg^k - g^k f \ = \ \alpha k g^k$. En déduire $\psi_f(g^k)$.

b) Montrer que, pour tout entier k, Ker (g^k) est stable par f.

c) On suppose : $\forall k \in \mathbb{N}^*$, $g^k \neq 0$. Que peut-on alors dire du spectre de ψ_f ?
En déduire que g est nilpotent.

2°) On suppose désormais que le rang de g est égal à $n-1$.

a) Soit $k \in \mathbb{N}$. Quelle est la dimension de Ker (g^k) ? Quel est l'indice de nilpotence de g ?

b) Montrer qu'il existe $x \in E$ tel que, si l'on pose $x_k = g^{n-k}(x)$ pour tout entier $k \in [1,n]$, la famille $(x_1,\ldots,x_k)$ soit, pour tout k, une base de Ker (g^k).

c) Montrer que x_1 est un vecteur propre de f, dont on notera λ la valeur propre associée.
Montrer que la matrice de f dans la base $(x_1,\ldots,x_n)$ est triangulaire supérieure.

d) On note alors λ_i le terme d'indice (i,i) de cette matrice ($\lambda_1 = \lambda$).
Montrer que $\lambda_i = \lambda_{i-1} - \alpha$. En déduire que f est diagonalisable, et préciser ses valeurs propres.

e) Montrer que, si x est un vecteur propre de f associé à une valeur propre μ différente de λ, alors $g(x)$ est un vecteur propre de f, dont on précisera alors la valeur propre associée.

f) Soit e_n un vecteur propre de f associé à la valeur propre $\lambda-(n-1)\alpha$. Pour tout entier $k \in [1,n]$, on pose : $e_k = g^{n-k}(e_n)$.
Montrer que $g^{n-1}(e_n) \neq 0$.
Montrer que $(e_1,\ldots,e_n)$ est une base de E, et donner les matrices A et B de f et g dans cette base.

PARTIE C : Étude de l'équation $[f,g] = \alpha f + \beta g$

1°) Soient f,g deux éléments de $\mathcal{L}(E)$. Dans toute cette question, on fait l'hypothèse :

$$\exists(\alpha,\beta) \in \mathbb{C}^2 \text{ tels que } [f,g] = \alpha f + \beta g$$

et on pose $h = [f,g]$.

a) Montrer que h est nilpotent.
Indication : Pour cela, on pourra commencer par envisager le cas $\beta = 0$ et utiliser alors la partie précédente; puis, dans le cas $\beta \neq 0$, on pourra considérer l'endomorphisme $g_1 = g + \dfrac{\alpha}{\beta} f$.

b) Montrer que f et g ont un vecteur propre commun.
Indication : Pour cela, on envisagera d'abord le cas $\alpha = \beta = 0$, puis le cas $\alpha \neq 0, \beta = 0$; enfin, dans le cas $\beta \neq 0$, on pourra calculer $[f,h]$.

2°) Soient f,g deux projecteurs distincts, non nuls, tels que :

$$\exists(\alpha,\beta) \in \mathbb{C}^2 \text{ tels que } [f,g] = \alpha f + \beta g$$

a) On suppose dans cette question $\alpha \neq 0$ et $\alpha \neq 1$.

i. Montrer que : $2\alpha g f + \beta(1+\alpha) g \;=\; \alpha(1-\alpha) f$.

ii. En déduire : $\mathrm{Im}\,(f) \subset \mathrm{Im}\,(g)$ puis : $gf = f$.

iii. En déduire : $\alpha + \beta = 0$, puis $\alpha = -1$, puis $\mathrm{Im}\,(f) = \mathrm{Im}\,(g)$.

iv. Réciproquement, vérifier qu'un couple (f,g) de projecteurs de E tels que :

$$gf = f \text{ et } \mathrm{Im}\,(g) \subset \mathrm{Im}\,(f)$$

est solution de l'équation : $[f,g] = -f + g$.

b) On suppose dans cette question $\alpha \neq 0$ et $\alpha \neq -1$.

i. Montrer successivement les résultats suivants : $\mathrm{Ker}\,(g) \subset \mathrm{Ker}\,(f)$, $fg = f$, $\alpha + \beta = 0$, $\alpha = 1$, $\mathrm{Ker}\,(f) = \mathrm{Ker}\,(g)$.

ii. Réciproquement, vérifier qu'un couple (f,g) de projecteurs de E tels que :

$$fg = f \text{ et } \mathrm{Ker}\,(f) \subset \mathrm{Ker}\,(g)$$

est solution de l'équation : $[f,g] = f - g$.

c) Conclure de ce qui précède que, si f,g sont deux projecteurs vérifiant l'égalité $[f,g] = \alpha f + \beta g$ et dont le produit n'est pas commutatif, le couple (α,β) ne peut prendre que l'une des deux valeurs $(-1,1)$ ou $(1,-1)$.

PARTIE D : Étude d'un système d'équations

Dans cette partie, f,g,h désignent trois endomorphismes non nuls de E tels que :

$$[f,g] = \alpha g \;,\; [f,h] = \beta h \;,\; [g,h] = f$$

où α et β sont deux complexes non nuls.

On rappelle que, d'après les résultats de la partie B, g et h sont nilpotents

1°) Calculer la valeur de $(\alpha+\beta)[g,h]$, et en déduire : $\alpha + \beta = 0$.

2°) Dans cette question, on suppose que le rang de g est égal à $n-1$.

a) Déterminer la somme des valeurs propres de f, et en déduire ces valeurs propres.
Quel est le rang de f? (*penser à utiliser les résultats de B.2*)

b) Déterminer la matrice C de h dans la base définie à la question B.2.f.
Quel est le rang de h?

c) Vérifier que les endomorphismes f,g,h déterminés par les matrices A,B,C satisfont bien aux conditions posées au début de cette partie D (*ainsi, le système d'équations proposé a des solutions*)

d) Montrer que $\{0_E\}$ et E sont les seuls sous-espaces de E stables à la fois par f,g et h.

3°) Dans cette question, on suppose $\alpha = 2$, et que $\{0_E\}$ et E sont les seuls sous-espaces vectoriels de E stables à la fois par f,g et h; on ne fait plus d'hypothèse sur le rang de g.

a) Pour tout entier $k \in \mathbb{N}^*$, établir l'égalité :

$$[g,h^k] \;=\; kh^{k-1}\,(f-(k-1)Id_E)$$

et en déduire que, si p est l'indice de nilpotence de h, $p-1$ est valeur propre de f.

b) Montrer que g est de rang $n-1$ et que f est diagonalisable .
Indication : montrer qu'il existe un vecteur propre x de f tel que $h(x)=0$, puis considérer le sous-espace vectoriel de E engendré par les vecteurs $g^k(x)$.

D'après : X P' 1983, X M' 1985, ENSAIT 1992
