CORRIGÉ ENAC 2011

EXERCICE I

1. A. B. On reconnait dans l'énoncé la forme générale de l'expression analytique d'une application linéaire ; puisque f va de $\mathbb{R}^2$ dans $\mathbb{R}^2$, c'est bien un endomorphisme de $\mathbb{R}^2$.

   D. En résolvant le système $f(x,y) = (0,0)$, on trouve immédiatement $x = y = 0$. Donc $\operatorname{Ker} f = \{(0,0)\}$ et f est injectif. Puisqu'il s'agit d'un endomorphisme d'un espace vectoriel *de dimension finie*, il est aussi bijectif d'après le théorème du rang.

   C. On vient de voir que f est surjectif, donc $\operatorname{Im} f = \mathbb{R}^2$, mais l'affirmation suivante de l'énoncé est fausse dans le cas général (il manque : de dimension finie).

Q1 : Réponses A,D

---

2. A. B Directement d'après le cours, la matrice de f dans la base canonique est la seconde.

   C. La famille $\mathscr{B}'$ est l'image de la base $\mathscr{B}$ par f automorphisme, c'est donc bien une base de $\mathbb{R}^2$.

   D. L'image des vecteurs de $\mathscr{B}$ étant les vecteurs de $\mathscr{B}'$, la matrice de f dans les bases $\mathscr{B}$ et $\mathscr{B}'$ est la matrice Identité.

Q2 : Réponses B,C

---

3. Le rang de $f-\lambda\mathrm{Id}$ est différent de 2 si et seulement si $f-\lambda\mathrm{Id}$ n'est pas inversible, i.e. si $\det(f-\lambda\mathrm{Id}) = 0$. On calcule :

$$\det(f-\lambda\mathrm{Id}) = \begin{vmatrix} 3-\lambda & -1 \\ -1 & 3-\lambda \end{vmatrix} = (3-\lambda)^2 - 1$$

donc $\det(f-\lambda\mathrm{Id}) = 0 \iff [\lambda = 2 \textbf{ ou } \lambda = 4]$. La réponse C est donc fausse (d'ailleurs, la phrase $\lambda = 2$ **et** $\lambda = 4$ n'a pas de sens).

Q3 : Réponse E : aucune bonne réponse

---

4. C'est une question de cours.

Q4 : Réponses C,D

---

5. D'après le théorème du rang, $\operatorname{rg}(f-\lambda\mathrm{Id}) \neq 2 \iff \dim\operatorname{Ker}(f-\lambda\mathrm{Id}) \neq 0 \iff f-\lambda\mathrm{Id}$ non injectif.
   Cela est donc équivalent à : $\exists u \neq (0,0)$ tq $f(u) = \lambda u$, ce qui est la réponse D.

   Les réponses A et C sont fausses, puisque, quel que soit l'endomorphisme f de $\mathbb{R}^2$, l'assertion « $\exists u$ tq $f(u) = \lambda u$ » est toujours vérifiée pour $u = (0,0)$. Pour cette même raison, on peut considérer que la réponse B est exacte : en effet, si la deuxième assertion dans une implication est vraie, l'implication est vraie.

Q5 : Réponses B,D

---

6. Si $\alpha \neq \beta$ **ET** si u et v sont *non nuls* et vérifient les relations données, alors le système (u,v) sera libre.

   Si cette précision n'est pas donnée, on ne peut strictement rien dire !

Q6 : Réponse E : aucune bonne réponse

---

7. Si u et v vérifient les relations de l'énoncé, alors ils appartiennent à $\operatorname{Ker}(f-\alpha \mathrm{Id})$. Or, si $\alpha \in \{2,4\}$, $\dim \operatorname{Ker}(f-\alpha \mathrm{Id}) = 1$ et sinon $\dim \operatorname{Ker}(f-\alpha \mathrm{Id}) = 0$. Dans les deux cas on aura donc (u,v) liée, mais on n'aura pas forcément $u = v$ dans le premier cas.

Q7 : Réponse B

---

8. C'est une question de cours.

Q8 : Réponses B,C

---

9. A. B. Si on note A la matrice de f dans la base $\mathscr{B}$, A'' celle dans la base $\mathscr{B}''$ et P la matrice de passage de $\mathscr{B}$ à $\mathscr{B}''$, la formule du cours bien connue s'écrit

$$A'' = P^{-1}AP \quad \text{ou} \quad A = PA''P^{-1}$$

où P^{-1} est la matrice de passage de $\mathscr{B}''$ à $\mathscr{B}$.

Avec ces mêmes notations, l'égalité de la réponse A s'écrit $A = PA''P$ et celle de la réponse B s'écrit $A = P^{-1}A''P^{-1}$. Elles sont donc toutes les deux fausses, puisque $P \neq P^{-1}$ (vérification facile).

C. D. On a facilement : $f(1,1) = 2.(1,1)$ et $f(1,-1) = 4.(1,-1)$ donc :

Q9 : Réponse C

---

10. Puisque $A = PA''P^{-1}$ on aura, pour tout $k \in \mathbb{N}$, $A^k = P(A'')^kP^{-1}$, et les réponses A,B,C sont donc fausses.

Quant à la réponse D, elle est déjà fausse pour $k = 0$!

Q10 : Réponse E : aucune bonne réponse

---

11. D'après le cours, la bonne formule est celle de la réponse B, mais elle n'est pas vraie pour $n = 0$! (piège... ou erreur involontaire d'énoncé ?). Par conséquent :

Q11 : Réponse E : aucune bonne réponse

---

12. On peut déjà remarquer que la *formule de la moyenne* dont parle l'énoncé n'est plus au programme depuis longtemps ! (seule subsiste l'inégalité de la moyenne).

Avec ce théorème on obtiendrait le résultat de la réponse D, mais de toutes façons, celui-ci est incorrect pour $n = 0$! (encore un piège, ou encore une erreur d'énoncé ?).

Q12 : Réponse E : aucune bonne réponse

---

13. Là se pose un problème : que *déduire* de la question précédente, puisque celle-ci est inexacte ?

Essayons cependant de répondre aux questions, en utilisant le seul théorème au programme, à savoir la formule de Taylor avec reste intégrale.

A. Cette réponse est évidemment fausse : l'ordre des quantificateurs impliquerait que $x \mapsto e^x$ est une fonction polynomiale !

B. Cette réponse est exacte <u>pour $n \geqslant 1$</u> d'après la question 12.D (en effet, la fonction exp est de classe $\mathscr{C}^\infty$), et on peut même préciser que le réel c appartient à $]0,x[$ ou $]x,0[$ si $x \neq 0$.

C.D La fonction $x \mapsto e^x$ étant de classe $\mathscr{C}^\infty$ sur $\mathbb{R}$, la formule de Taylor avec reste intégrale appliquée entre 0 et x à l'ordre n donne

$$e^x = \sum_{k=0}^{n} \frac{x^k}{k!} + r_n(x) \quad \text{avec} \quad r_n(x) = \int_0^x \frac{(x-t)^n}{n!} e^t \, dt$$

On aura alors $|r_n(x)| \leqslant \left| \int_0^x \frac{|x-t|^n}{n!} \, dt \right| \max(1, e^x) = \frac{|x|^{n+1}}{(n+1)!} \max(1, e^x)$, d'où l'on tire d'après les croissances comparées des suites usuelles : $\lim_{n \to +\infty} r_n(x) = 0$, soit

$$\forall x \in \mathbb{R}\,,\; e^x = \lim_{n \to +\infty} \left(\sum_{k=0}^{n} \frac{x^k}{k!} \right)$$

Q13 : Réponse C

---

14. A. B. Notons $D = \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 4 \end{pmatrix}$. Pour tout $k \in \mathbb{N}$, $D^k = \begin{pmatrix} 2^k & 0 \\ 0 & 4^k \end{pmatrix}$ donc pour tout entier n : $\sum_{k=0}^{n} \frac{D^k}{k!} = \begin{pmatrix} \sum_{k=0}^{n} \frac{2^k}{k!} & 0 \\ 0 & \sum_{k=0}^{n} \frac{4^k}{k!} \end{pmatrix}$ et l'on déduit de la question précédente

$$\exp(D) = \begin{pmatrix} e^2 & 0 \\ 0 & e^4 \end{pmatrix}$$

C. D Soit $A = \begin{pmatrix} 3 & -1 \\ -1 & 3 \end{pmatrix}$ et $P = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}$, de sorte que $A = PDP^{-1}$.

L'application linéaire $M \mapsto PMP^{-1}$ est continue (car $\mathbb{M}_2(\mathbb{R})$ est de dimension finie), ce qui permet de justifier l'égalité $\lim_{n \to +\infty} \left(\sum_{k=0}^{n} \frac{A^k}{k!} \right) = P \left(\lim_{n \to +\infty} \left(\sum_{k=0}^{n} \frac{D^k}{k!} \right) \right) P^{-1}$, soit $\exp(A) = P \exp(D) P^{-1}$.

Il ne reste plus qu'à faire le calcul, sachant que $P^{-1} = \frac{1}{2} P$, et on trouve le résultat de la réponse D.

Q14 : Réponses A,D

EXERCICE II

Ça commence bien ! Il est clair que les relations de l'énoncé ne permettent pas de déterminer la suite (u_n) puisqu'on ne peut même pas calculer u_1 ! !

On supposera donc, pour toutes les questions, que la suite commence à $n = 1$ et on remplacera dans l'énoncé u_0 par u_1 ... (c'est d'ailleurs ce que fait l'énoncé pour la suite (f_n) de la question 17).

15. On traite donc toute la question avec u_1 à la place de u_0 ...

Dans ce cas, il est facile de voir que seule la réponse B est exacte.

Q15 : Réponse B (si énoncé rectifié)

---

16. Si (u_n) converge vers une limite finie λ alors $u_n + \frac{1}{n}$ tend aussi vers λ et en passant à la limite dans la relation de récurrence, on obtient $\lambda^2 = \lambda$, d'où $\lambda \in \{0, 1\}$.

Q16 : Réponse E : aucune bonne réponse

---

17. A. B. Les f_n n'étant définies que sur $\mathbb{R}_+$, $f_p(u_n)$ n'a un sens que si $u_n \geqslant 0$. Pour cela, il suffit que u_1 soit positif.

    C. D. En fait, il est facile de montrer par récurrence que $u_n = f_n(u_1)$ pour tout $n \in \mathbb{N}^*$ donc, même en rectifiant l'énoncé, aucune des réponses C et D n'est exacte.

Q17 : Réponse B (si énoncé rectifié)

---

18. En calculant les premiers termes, on se fait vite une idée... Il est facile de montrer par récurrence que f_n est une fonction polynomiale de degré 2^{n-1} et que ses coefficients sont tous positifs, donc f_n et f'_n seront à valeurs strictement positives sur $\mathbb{R}_+^*$.

Q18 : Réponses A,D

---

19. C'est une question de cours. Dans le théorème des valeurs intermédiaires, il n'y a pas unicité dans la conclusion, et il n'y a aucune hypothèse sur le sens de variation.

Q19 : Réponse E : aucune bonne réponse

---

20. Pas besoin de réfléchir longtemps : on voit facilement que toutes les réponses sont déjà fausses pour $n = 1$ ($f_1(x) = x$) !

    Cependant : pour $n \geqslant 2$: puisque f_n est continue strictement croissante, que $f_n(0) = 0$ (récurrence facile), que $f_n(1) > 1$ (récurrence facile) et que $\lim\limits_{n\to+\infty} f_n(x) = +\infty$ puisque f_n est une fonction polynomiale de terme dominant $x^{2^{n-1}}$, on déduit du théorème de bijection que les réponses A et C sont correctes pour $n \geqslant 2$...

Q20 : Réponse E : aucune bonne réponse

---

21. Là, on tombe dans le farfelu ! Inutile encore de réfléchir : l'énoncé affirme $f_n(\beta_n) = 1$ et il est marqué $f_n(\beta_n) < 1$ ou $f_n(\beta_n) > 1$ dans les réponses !

Q21 : Réponse E : aucune bonne réponse

---

22. C'est une question de cours.

Q22 : Réponses B,C

---

23. Là encore se pose un problème : en effet, la définition des suites (α_n) et (β_n) donnée dans la question 20 est inexacte pour $n = 1$.. Nous allons donc traiter cette question en supposant $n \geqslant 2$.

    On a :

$$f_{n+1}(\alpha_n) = f_n(\alpha_n)\left(f_n(\alpha_n) + \frac{1}{n}\right) = 1 - \frac{1}{n} < 1 - \frac{1}{n+1} = f_{n+1}(\alpha_{n+1})$$

donc $\alpha_n < \alpha_{n+1}$ puisque f_{n+1} est strictement croissante.
De la même façon :

$$f_{n+1}(\beta_n) = f_n(\beta_n)\left(f_n(\beta_n) + \frac{1}{n}\right) = 1 + \frac{1}{n} > 1 = f_{n+1}(\beta_{n+1})$$

donc $\beta_n > \beta_{n+1}$ puisque f_{n+1} est strictement croissante.

Q23 : Réponse B

---

24. L'énoncé de la question A est ambigu : en effet, le fait que (α_n) soit croissante et majorée par (β_n) ne suffit pas en général à assurer la convergence mais ici, puisque β_n est elle aussi majorée (par 1), cela suffit...

Les autres réponses découlent immédiatement du cours : la réponse B car (α_n) est croissante majorée, et la réponse D puisque (β_n) est décroissante minorée et d'après le principe de prolongement des inégalités. Puisqu'il n'y a en théorie que 2 réponses exactes au maximum, il fallait donc considérer la réponse A comme inexacte...

Q24 : Réponses A(?),B,D

---

25. A. B. Puisque $\alpha_n < L \leqslant L' < \beta_n$ et que f_n est strictement croissante, on aura $f_n(\alpha_n) < f_n(L) \leqslant f_n(L') < f_n(\beta_n)$ soit $1 - \dfrac{1}{n} < f_n(L) \leqslant f_n(L') < 1$. La réponse A est correcte. La réponse B ne l'est pas car, on va le voir ci-dessous, on a en fait $L = L'$.

D. f_n étant croissante sur $\mathbb{R}_+$, on a toujours, pour tous $a, b \geqslant 0$, $f_n(a) - f_n(b)$ du signe de $a - b$. La réponse D est donc exacte.

C. Montrons que $L = L'$, i.e. que les suites (α_n) et (β_n) sont adjacentes.
Par définition, on a $\dfrac{1}{n} = f_n(\beta_n) - f_n(\alpha_n)$ donc, d'après le théorème des accroissements finis, il existe $c_n \in]\alpha_n, \beta_n[$ tel que $\dfrac{1}{n} = (\beta_n - \alpha_n)f'_n(c_n)$. Or f'_n étant une fonction polynomiale à coefficients positifs, elle est croissante sur $\mathbb{R}_+$, donc $\dfrac{1}{n} \geqslant (\beta_n - \alpha_n)f'_n(\alpha_n)$. Enfin, la relation $f'_{n+1}(x) = f'_n(x)\left(f_n(x) + \dfrac{1}{n}\right) + f_n(x)f'_n(x)$ donne $f'_{n+1}(\alpha_n) = (2 - \dfrac{1}{n})f'_n(\alpha_n)$ d'où $f'_{n+1}(\alpha_{n+1}) \geqslant f'_{n+1}(\alpha_n) \geqslant f'_n(\alpha_n)$, ce qui permet d'obtenir facilement par récurrence : $f'_n(\alpha_n) \geqslant 1$.
Finalement on obtient $\dfrac{1}{n} \geqslant \beta_n - \alpha_n \geqslant 0$, ce qui montre que $\lim\limits_{n\to+\infty} \beta_n - \alpha_n = 0$ et les suites sont bien adjacentes.
Remarque : Puisqu'il y avait déjà 2 réponses exactes dans cette question (A et D), on pouvait dire d'emblée que la réponse C est fausse, sans faire ce qui précède...

Q25 : Réponses A,D

---

26. On calcule, en utilisant des résultats déjà établis :

$$u_{n+1} - u_n = u_n\left(u_n - \left(1 - \frac{1}{n}\right)\right) = u_n\left(u_n - f_n(\alpha_n)\right) = u_n(f_n(u_1) - f_n(\alpha_n))$$

Or l'énoncé suppose u_1 strictement positif (voir question 18 avec énoncé rectifié), donc u_n est strictement positif pour tout $n \in \mathbb{N}^*$. f_n étant croissante, on obtient donc que $u_{n+1} - u_n$ est du signe de $u_1 - \alpha_n$.
Si on suppose $u_1 < L$, la suite (α_n) étant strictement croissante de limite L, on aura bien $u_1 < \alpha_n$ *à partir d'un certain rang* (qu'il est impossible de préciser). Donc (u_n) est décroissante à partir d'un certain rang. Étant minorée (par 0) elle converge. Sa limite vaut alors 0 ou 1 d'après la question 16. Ce ne peut être 1, car sinon, (u_n) étant décroissante (à partir d'un certain rang) de limite 1, elle serait supérieure à 1 et la relation $u_{n+1} = u_n\left(u_n + \dfrac{1}{n}\right)$ conduirait à (u_n) croissante ! En conclusion :

Q26 : Réponse C

---

27. Si $u_1 > L$ on a $u_1 > \alpha_n$ pour tout n donc d'après les calculs ci-dessus, (u_n) est croissante.

La suite (β_n) étant strictement décroissante de limite 1, il existe un rang à partir duquel $u_1 > \beta_n$ d'où $u_n = f_n(u_1) > f_n(\beta_n) = 1$. La suite (u_n) ne peut donc être convergente (car si elle l'était ça ne pourrait être que vers 0 ou 1). Étant croissante, elle diverge vers $+\infty$.

Remarque : L'énoncé ne traite pas le cas $u_1 = L$, c'est dommage. En fait, si $u_1 = L$, alors $u_n = f_n(L)$ et d'après l'encadrement obtenu à la question 25, on trouve que $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = 1$...

Q27 : Réponses A,D

EXERCICE III

28. A. B. C'est parce que la fonction $t \mapsto (x-t)f(2t)$ est *continue* sur $\mathbb{R}$ que l'on peut affirmer que l'intégrale existe.

C. D. On écrit, pour tout $x \in \mathbb{R}$: $\varphi(x) = x\int_0^x f(2t)\,dt - \int_0^x tf(2t)\,dt$ donc d'après les théorèmes du cours φ est dérivable sur $\mathbb{R}$ et

$$\forall x \in \mathbb{R}\,,\ \varphi'(x) = \int_0^x f(2t)\,dt + xf(2x) - xf(2x) = \int_0^x f(2t)\,dt$$

Q28 : Réponse B

---

29. Si f vérifie la propriété **(P)** on a $f(2x) = \varphi(x) + 1$ pour tout x. On en déduit que f est dérivable et que $2f'(2x) = \varphi'(x) = \int_0^x f(2t)\,dt$. Donc f' est dérivable, i.e. f est 2 fois dérivable et $4f''(2x) = f(2x)$, ce qui permet de démontrer sans difficulté que f est de classe $\mathscr{C}^\infty$ sur $\mathbb{R}$.

Q29 : Réponses A,D

---

30. La relation $4f''(2x) = f(2x)$ trouvée ci-dessus et valable pour tout x réel s'écrit aussi

$$\forall x \in \mathbb{R}\,,\ f''(x) = \frac{1}{4}f(x)$$

La réponse D est évidemment fausse, car la fonction nulle ne vérifie pas l'équation proposée !

Q30 : Réponse B

---

31. La résolution de l'équation différentielle trouvée ci-dessus conduit à $f(x) = Ae^{x/2} + Be^{-x/2}$...

Q31 : Réponse E : aucune bonne réponse

---

32. La relation **(P)** : $f(2x) = \int_0^x (x-t)f(2t)\,dt + 1$ donne immédiatement $f(0) = 1$.

On ne peut pas répondre aux questions C et D, car les constantes A et B introduites dans la question précédente ne correspondent à rien, aucune des réponses proposées dans cette question n'étant exacte !

Q32 : Réponse B

---

33. On peut aussi écrire la solution générale de l'équation différentielle sous la forme

$$f(x) = A\,\mathrm{sh}\left(\frac{x}{2}\right) + B\,\mathrm{ch}\left(\frac{x}{2}\right)$$

et dans ce cas la condition $f(0) = 1$ donne

$$f(x) = A\,\mathrm{sh}\left(\frac{x}{2}\right) + \mathrm{ch}\left(\frac{x}{2}\right) = A\,\mathrm{sh}\left(\frac{x}{2}\right) + \mathrm{sh}\left(\frac{x}{2}\right) + e^{-x/2} = (A+1)\,\mathrm{sh}\left(\frac{x}{2}\right) + e^{-x/2}$$

et finalement, quitte à changer A en $A - 1$:

Q33 : Réponse A

---

34. Les solutions à l'exercice sont donc à chercher *parmi* celles de la forme $x \mapsto A\,\mathrm{sh}\left(\frac{x}{2}\right) + e^{-x/2}$. On remplace alors dans la relation **(P)** et on calcule pour trouver finalement :

Q34 : Réponse C

⋆ ⋆ ⋆ ⋆
⋆ ⋆ ⋆
⋆ ⋆
⋆