CORRIGÉ ENAC 2012

PARTIE I

1. **A. B.** F est l'ensemble des combinaisons linéaires de $\{f_1, f_2, f_3\}$, c'est donc le sous-espace vectoriel de E engendré par la famille de ces trois éléments.

C.D. E est un anneau lorsqu'on le munit de la loi $+$ et de la loi $\times$ de multiplication des applications (mais attention : $(\mathrm{E}, +, \circ)$ n'est *pas* un anneau, la loi $\circ$ étant distributive à droite mais pas à gauche par rapport à la loi $+$...). L'élément unité de cet anneau est la fonction constante égale à 1. Pour qu'une fonction f admette un symétrique pour la loi $\times$, il faut (et il suffit) qu'elle ne s'annule pas ; ce n'est pas le cas de f_2 et de f_3, on ne peut donc pas avoir une structure de groupe.

De plus, le produit $f_1 \times f_1$ (par exemple), qui est l'application $x \mapsto \mathrm{e}^{2x}$, n'est évidemment pas combinaison linéaire des f_i donc n'appartient pas à F. F n'étant pas stable pour la loi $\times$ ne peut être un anneau.

Q1 : Réponse A

---

2. La linéarité de D ne pose pas de problème (linéarité de la dérivation). De plus, si f est de classe $\mathscr{C}^\infty$ il en est de même de f' donc D est bien une application de E dans E : c'en est un endomorphisme.

Q2 : Réponses A,C

---

3. Le noyau de D est l'ensemble des applications f de E telles que $f' = 0$: c'est le sous-espace vectoriel des applications constantes.

L'image de D est égale à E puisque toute application de classe $\mathscr{C}^\infty$ de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$ possède une primitive, qui est aussi de classe $\mathscr{C}^\infty$.

En conclusion :

Q3 : Réponse E : aucune bonne réponse

---

4. D'après ce qui a été dit ci-dessus :

Q4 : Réponses A,D

---

5. Un calcul sans grand intérêt ni difficulté : si $f = af_1 + bf_2 + cf_3$, d'après les D.L des fonctions usuelles, on a, au voisinage de 0 :

$$\begin{aligned} f(x) &= a(1 + x + \frac{x^2}{2}) + b\left(1 - \frac{x}{2}\right)\left(x\frac{\sqrt{3}}{2}\right) + c\left(1 - \frac{x}{2} + \frac{x^2}{8}\right)\left(1 - 3\frac{x^2}{8}\right) + \mathrm{o}(x^2) \\ &= (a + c) + \left(a + b\frac{\sqrt{3}}{2} - \frac{c}{2}\right)x + \left(\frac{a}{2} - b\frac{\sqrt{3}}{4} - \frac{c}{4}\right) + \mathrm{o}(x^2). \end{aligned}$$

Donc :

Q5 : Réponse B

---

6. Si l'on a $af_1 + bf_2 + cf_3 = 0$ alors d'après la question précédente et par unicitré du D.L, on aura le système :

$$\begin{cases} a + c = 0 \\ a + b\dfrac{\sqrt{3}}{2} - \dfrac{c}{2} = 0 \\ \dfrac{a}{2} - b\dfrac{\sqrt{3}}{4} - \dfrac{c}{4} = 0 \end{cases}$$

d'où l'on tire facilement $a = b = c = 0$.

Il en résulte que la famille $\{f_1, f_2, f_3\}$ est libre ; étant génératrice de F par définition, c'en est donc une base.

Q6 : Réponses A,C

---

7. **A.B.D.** D est linéaire, on l'a déjà vu. Des calculs élémentaires donnent : $\mathrm{D}(f_1)=f_1$, $\mathrm{D}(f_2)=-\dfrac{1}{2}f_2+\dfrac{\sqrt{3}}{2}f_3$ et $\mathrm{D}(f_3)=-\dfrac{\sqrt{3}}{2}f_2-\dfrac{1}{2}f_3$, donc si f appartient à F il en est de même de $\mathrm{D}(f)$: D induit donc bien un endomorphisme de F.

C. Sa matrice dans une base **de F** sera donc une matrice 3×3 puisque F est de dimension 3. Mais l'énoncé parle d'une base **de E**, la réponse C. est donc inexacte (coquille ou piège ? comme souvent à l'Enac, impossible de savoir...).

Q7 : Réponse B

---

8. D'après les calculs faits ci-dessus, puisque la matrice de f dans la base $\mathscr{B}=\{f_1,f_2,f_3\}$ a pour colonnes les coordonnées des vecteurs $\mathrm{D}(f_1),\mathrm{D}(f_2),\mathrm{D}(f_3)$ dans cette base, on a :

$$\mathrm{M}=\begin{pmatrix}1&0&0\\0&-\frac{1}{2}&-\frac{\sqrt{3}}{2}\\0&\frac{\sqrt{3}}{2}&-\frac{1}{2}\end{pmatrix}.$$

Par conséquent :

Q8 : Réponse B

---

9. La matrice $\mathrm{B}=\begin{pmatrix}-\frac{1}{2}&-\frac{\sqrt{3}}{2}\\\frac{\sqrt{3}}{2}&-\frac{1}{2}\end{pmatrix}$ est la matrice dans le plan euclidien orienté d'une rotation d'angle θ tel que $\cos\theta=-\dfrac{1}{2}$ et $\sin\theta=\dfrac{\sqrt{3}}{2}$, soit $\theta=\dfrac{2\pi}{3}$.

Donc $\det\mathrm{B}=1$ et un calcul de déterminant par blocs donne $\det\mathrm{M}=1$. De plus, $\mathrm{B}^3=\mathrm{I}_2$ (rotation d'angle $3\times\dfrac{2\pi}{3}$), d'où en calculant le produit par blocs : $\mathrm{M}^3=\mathrm{I}_3$.

En conclusion :

Q9 : Réponses B,C

---

10. Puisque $\mathrm{D_F}$ a pour matrice M dans la base $\mathscr{B}$, les réponses à cette question découlent directement des précédentes (réponses B et D).

Remarque : *en fait (mais ce n'est pas voulu) la réponse C. est exacte aussi ! En effet, l'énoncé de cette réponse peut être écrit sous la forme :*

$$\mathrm{D}\ \textit{non bijective} \Rightarrow \mathrm{D_F}\ \textit{pas automorphisme}$$

or l'implication « Faux ⇒ Faux » est Vraie ! !

Q10 : Réponses B,D (et C ?)

---

11. On peut écrire, pour $g,h\in\mathrm{F}$:

$$\varphi(g,h)=\sum_{i=0}^{2}\mathrm{D}^i(g)(0)\mathrm{D}^i(h)(0).$$

Les applications $f\mapsto\mathrm{D}^i(f)(0)$ étant des formes linéaires sur E, φ est une forme bilinéaire symétrique sur F (d'ailleurs la définition de φ se limite à $g,h\in\mathbf{F}$, donc ce ne peut être un produit scalaire **sur E** comme l'affirme la réponse A.)

De plus, pour toute $g\in\mathrm{F}$, $\varphi(g,g)$ est un réel positif (somme de trois carrés) ; enfin, si $\varphi(g,g)=0$ alors $g(0)=g'(0)=g''(0)=0$, donc d'après la formule de Taylor-Young, on a $g(x)=o(x^2)$ au voisinage de 0. Si

l'on écrit $g = af_1 + bf_2 + cf_3$, on obtient alors, d'après la question 5 et par unicité du D.L le même système qu'à la question 6, ce qui implique $a = b = c = 0$ d'où $g = 0$.
En conclusion, φ est une forme bilinéaire symétrique définie positive sur F, c'est un produit scalaire sur F, qui munit donc F d'une structure d'espace euclidien.

Q11 : Réponse C

---

12. – Il est vrai que $\varphi(f_1, f_1) = 3$ (car $f_1(0) = f_1'(0) = f_1''(0) = 1$), donc $\mathscr{B}$ ne peut être une famille orthonormée pour le produit scalaire φ.

– Soient $g = af_1 + bf_2 + cf_3$ et $h = a'f_1 + b'f_2 + c'f_3$. D'après la question 5. et la formule de Taylor-Young, on a

$$g(0) = a + c \quad , \quad g'(0) = a + b\frac{\sqrt{3}}{2} - \frac{c}{2} \quad \text{et} \quad g''(0) = a - b\frac{\sqrt{3}}{2} - \frac{c}{2}$$

et des résultats similaires pour h donc :

$$\begin{aligned}\varphi(g,h) &= (a+c)(a'+c') + \left(a + b\frac{\sqrt{3}}{2} - \frac{c}{2}\right)\left(a' + b'\frac{\sqrt{3}}{2} - \frac{c'}{2}\right) + \left(a - b\frac{\sqrt{3}}{2} - \frac{c}{2}\right)\left(a' - b'\frac{\sqrt{3}}{2} - \frac{c'}{2}\right)\\ &= 3aa' + \frac{3}{2}bb' + \frac{3}{2}cc'\end{aligned}$$

ce qui prouve que la base $\mathscr{B}$ est orthogonale pour φ. N'étant pas ortho*normée*, la réponse D. est exacte aussi.

Q12 : Réponses B, D

---

13. A.B. Si f est solution, la relation $f''' = f$ prouve que f''' est dérivable donc f est quatre fois dérivable sur $\mathbb{R}$, et on montre facilement par récurrence sur n, de la même façon, que f est n fois dérivable sur $\mathbb{R}$ pour tout entier n, donc f est nécessairement de classe $\mathscr{C}^\infty$.

C.D. La réponse C. est exacte, et la démonstration qui y figure est tout à fait suffisante (avec la convention habituelle, bien sûr, qu'une fonction polynôme de degré < 0 est la fonction polynôme nulle).

Q13 : Réponses A,C

---

14. Par définition, $\operatorname{Ker} T$ est l'ensemble des applications f de classe $\mathscr{C}^\infty$ sur $\mathbb{R}$ telles que $f''' = f$, et pas seulement les solutions polynomiales, donc la réponse A. est fausse.

On a vu que l'endomorphisme induit par D sur F vérifie $D_F^3 = \mathrm{Id}_F$, donc si $f \in F$, $T(f) = 0$ et $f \in \operatorname{Ker} T$: ainsi, $F \subset \operatorname{Ker} T$ et par conséquent :

Q14 : Réponse C

---

15. Si f est solution de (E) alors $f''' = f$ donc $g' = g$. On aura donc g de la forme $x \mapsto \lambda e^x$, avec $\lambda \in \mathbb{R}$ soit $g = \lambda f_1$.

Q15 : Réponse B

---

16. A.B. Il s'agit d'une équation différentielle linéaire d'ordre 2 à coefficients constants, dont l'équation caractéristique est $X^2 + X + 1 = 0$, de solutions les complexes j et $\bar{j}$ (avec $j = e^{2i\frac{\pi}{3}} = -\frac{1}{2} + i\frac{\sqrt{3}}{2}$).

Les solutions à valeurs dans $\mathbb{C}$ forment donc un $\mathbb{C}$-espace vectoriel de dimension 2, engendré par les fonctions $t \mapsto e^{jt}$ et $t \mapsto e^{\bar{j}t}$, ce qui est la réponse B.

C. On peut aussi choisir comme base de cet espace vectoriel les fonctions $t \mapsto \frac{1}{2}\left(e^{jt} + e^{\bar{j}t}\right) = f_3(t)$ et $t \mapsto \frac{1}{2i}\left(e^{jt} - e^{\bar{j}t}\right) = f_2(t)$. La réponse C. est donc exacte.

Remarque : cependant, l'énoncé n'est pas très clair, puisqu'il n'est pas précisé s'il s'agit des solutions réelles ou complexes, ni quel est le corps de base... Ainsi, si l'on considère les solutions à valeurs dans $\mathbb{C}$, et que l'on considère l'ensemble de ces solutions comme un $\mathbb{R}$-espace vectoriel , on obtient un espace de dimension 4 ! Mais je ne crois pas que cela soit voulu par l'énoncé...

D. Réponse évidemment fausse d'après ce qui précède, ou directement d'après le cours, sans calcul.

Q16 : Réponses B,C

---

17. Notons déjà, bien que cela ne figure pas clairement dans l'énoncé, qu'il semble être question ici des solutions *réelles* de l'équation...

A.B Puisque la fonction $t \mapsto \mathrm{e}^t$ n'est pas solution de l'équation homogène, on peut chercher une solution particulière de l'équation $y'' + y' + y = \lambda \mathrm{e}^t$ sous la forme $y(t) = \mathrm{C}\mathrm{e}^t$. En remplaçant dans l'équation, on obtient $\mathrm{C} = \dfrac{\lambda}{3}$. À cette solution particulière on ajoute les solutions de l'équation homogène, trouvées plus haut, et on obtient l'ensemble des solutions : ce sont les fonctions de la forme :

$$t \mapsto \frac{\lambda}{3}\mathrm{e}^t + \alpha f_2(t) + \beta f_3(t).$$

Les deux réponses proposées sont donc inexactes.

C.D. Néanmoins, tout ce qui précède montre que l'ensemble des solutions de l'équation $f''' = f$, c'est-à-dire de l'équation $\mathrm{T}(f) = 0$, est l'ensemble des combinaisons linéaires de f_1, f_2 et f_3, c'est-à-dire F (en faisant ici varier le paramètre λ, conformément au résultat de la question 15., alors que l'énoncé l'a fixé... cette confusion est regrettable).

Q17 : Réponse D

PARTIE II (Moyenne arithmético-géométrique)

ATTENTION : il faut pour tout ce qui suit supposer en fait b strictement inférieur à a !
En effet, si $a = b$, les deux suites sont constantes, et, par exemple, les QUATRE réponses des questions 18,19,21 etc... sont exactes ! !

Nous ajouterons donc cette hypothèse à l'énoncé...Toutes les inégalités larges proposées sont alors, en fait, strictes.

18. A.B. Récurrence facile :
on a déjà par hypothèse l'inégalité $0 < b_0 \leqslant a_0$, et si l'on a $0 < b_n \leqslant a_n$, alors b_{n+1} est bien défini et est encore strictement positif, et $a_{n+1} - b_{n+1} = \dfrac{a_n + b_n}{2} - \sqrt{a_n b_n} = \dfrac{(\sqrt{a_n} - \sqrt{b_n})^2}{2} \geqslant 0$, ce qui démontre la propriété de la réponse A. à l'ordre $n+1$.

C.D. Il suffit de remplacer pour montrer que seule la première égalité de la réponse C. est exacte et que seule la seconde égalité de la réponse D. est exacte.

Q18 : Réponse A

---

19. Les inégalités précédentes montrent que, pour tout n : $a_{n+1} - a_n \leqslant 0$;, donc (a_n) est décroissante ; étant décroissante, elle sera *majorée* (et non minorée) par son 1er terme, a.

On a aussi $b_{n+1} - b_n \geqslant 0$ donc la suite (b_n) est croissante ; elle sera donc *minorée* par son 1er terme b.

En conclusion :

Q19 : Réponse E : aucune bonne réponse

---

20. On a en fait : (a_n) décroissante, (b_n) croissante et $b_n \leqslant a_n$ pour tout n. Donc (a_n) est décroissante minorée par b et (b_n) est croissante majorée par a. Les deux suites convergent donc, vers des limites que nous noterons ℓ_a et ℓ_b respectivement.

Par passage à la limite dans la relation $a_{n+1} = \dfrac{a_n + b_n}{2}$, on obtient $\ell_a = \ell_b$. Les deux suites sont donc finalement adjacentes.
En conclusion :

Q20 : Réponse B

---

21. B.D. On peut d'emblée éliminer ces deux réponses qui impliquent $b_{n+1} - a_{n+1}$ positif !

A.C. On a déjà calculé plus haut : $a_{n+1} - b_{n+1} = \dfrac{(\sqrt{a_n} - \sqrt{b_n})^2}{2}$.

De plus, $(\sqrt{a_{n+1}} - \sqrt{b_{n+1}})^2 - (a_{n+1} - b_{n+1}) = 2(b_{n+1} - \sqrt{a_{n+1}}\sqrt{b_{n+1}}) = 2\sqrt{b_{n+1}}(\sqrt{b_{n+1}} - \sqrt{a_{n+1}})$ est négatif. La réponse exacte est donc la réponse C.

Q21 : Réponse C

---

22. L'inégalité de la question précédente implique : $d_{n+1}^2 \leqslant \dfrac{{d_n}^2}{2}$ d'où $0 \leqslant d_{n+1} \leqslant \dfrac{d_n}{\sqrt{2}}$ et par récurrence : $0 \leqslant d_n \leqslant \dfrac{d_0}{(\sqrt{2})^n} = \dfrac{\sqrt{a} - \sqrt{b}}{(\sqrt{2})^n}$. Ainsi :

Q22 : Réponse E : aucune bonne réponse

---

23. D'après les calculs ci-dessus : $0 \leqslant \sqrt{a_n} - \sqrt{b_n} \leqslant \dfrac{\sqrt{a} - \sqrt{b}}{(\sqrt{2})^n}$, d'où, en multipliant par $\sqrt{a_n} + \sqrt{b_n}$:

$$0 \leqslant a_n - b_n \leqslant \frac{\sqrt{a} - \sqrt{b}}{(\sqrt{2})^n}(\sqrt{a_n} + \sqrt{b_n}). \quad (*)$$

Puisque $b_n \leqslant a_n \leqslant a$, on a $\sqrt{a_n} + \sqrt{b_n} \leqslant 2\sqrt{a}$ donc :

$$a_n \leqslant \frac{\sqrt{a} - \sqrt{b}}{(\sqrt{2})^n} 2\sqrt{a} + b_n \leqslant \frac{\sqrt{a} - \sqrt{b}}{(\sqrt{2})^n} 2\sqrt{a} + \lim_{n \to +\infty} b_n$$

puisque, la suite (b_n) étant croissante, b_n est inférieure à sa limite.

On obtient ainsi l'inégalité de la réponse **A.**

Mais l'inégalité de la réponse **B.** est aussi exacte, quoique sans aucun intérêt ; en effet, pour tout entier n on a $b_n \leqslant \lim\limits_{n \to +\infty} b_n = \lim\limits_{n \to +\infty} a_n$ et donc, a fortiori, $b_n \leqslant \lim\limits_{n \to +\infty} a_n + \mathrm{X}$ où X est un réel positif quelconque !

Et là, il y a un problème... En effet, la relation $(*)$ implique :

$$b_n \geqslant a_n - \frac{\sqrt{a} - \sqrt{b}}{(\sqrt{2})^n}(\sqrt{a_n} + \sqrt{b_n}) \geqslant a_n - \frac{\sqrt{a} - \sqrt{b}}{(\sqrt{2})^n} 2\sqrt{a} \geqslant \lim_{n \to +\infty} a_n - \frac{\sqrt{a} - \sqrt{b}}{(\sqrt{2})^n} 2\sqrt{a}$$

puisque, (a_n) étant décroissante, a_n est supérieure à sa limite. La réponse **D.** est donc aussi exacte...

Et pour finir en beauté, la réponse **C.** est probablement exacte aussi (mais je n'ai pas envie de chercher complètement, assez passé de temps sur cette question stupide, cf. la remarque ci-après...) :

en effet, puisque $\lim\limits_{n \to +\infty} \ell_a - \dfrac{\sqrt{a} - \sqrt{b}}{(\sqrt{2})^n} 2\sqrt{a} = \ell_a > 0$, la quantité $\ell_a - \dfrac{\sqrt{a} - \sqrt{b}}{(\sqrt{2})^n} 2\sqrt{a}$ est positive (au moins à partir d'un certain rang). Elle est donc forcément supérieure à son opposée :

$$\ell_a - \frac{\sqrt{a} - \sqrt{b}}{(\sqrt{2})^n} 2\sqrt{a} \geqslant -\ell_a + \frac{\sqrt{a} - \sqrt{b}}{(\sqrt{2})^n} 2\sqrt{a}$$

et on déduit alors de l'inégalité de la réponse **D.** celle de la réponse **C.**, au moins à partir d'un certain rang...

Q23 : Réponses A,B,D : trois réponses exactes..., et même probablement quatre

---

Remarque : *Les majorations ci-dessus sont non seulement compliquées, mais en plus elles sont loin d'être optimales ! (autrement dit, du travail pour rien...). En effet, on a :*

$$d_{n+1} = \sqrt{a_{n+1}} - \sqrt{b_{n+1}} = \frac{a_{n+1} - b_{n+1}}{\sqrt{a_{n+1}} + \sqrt{b_{n+1}}} = \frac{(\sqrt{a_n} - \sqrt{b_n})^2}{2(\sqrt{a_{n+1}} + \sqrt{b_{n+1}})} \leqslant \frac{d_n^2}{4\sqrt{b}}$$

ce qui permet d'obtenir $d_n \leqslant \dfrac{d_0^{2^n}}{(4\sqrt{b})^n}$, *bien plus précis, et qui montre la convergence* quadratique *de la suite...*

PARTIE III

24. Déjà, les théorèmes usuels assurent la continuité de f sur $\mathbb{R}^*$.

Ensuite, puisque $\operatorname{Arctan} t \underset{t\to 0}{\sim} t$, on a $\lim\limits_{t\to 0} \dfrac{\operatorname{Arctan} t}{t} = 1$ donc :

Q24 : Réponse B

---

25. Le développement limité bien connu : $\operatorname{Arctan} t \underset{t\to 0}{=} t - \dfrac{t^3}{3} + \mathrm{o}(t^4)$ donne $f(t) \underset{t\to 0}{=} 1 - \dfrac{t^2}{3} + \mathrm{o}(t^3)$. Ainsi f admet un D.L d'ordre 1 en 0 (en fait, elle y admet un D.L à tout ordre) ; elle y est donc dérivable ; sa dérivée en 0 est le coefficient de t dans le D.L précédent, c'est-à-dire 0.

En conclusion :

Q25 : Réponse C

---

26. D'après les théorèmes usuels, f est dérivable sur $\mathbb{R}^*$ et on vient de voir qu'elle l'est aussi en 0 ; elle est donc dérivable sur $\mathbb{R}$.

Un calcul immédiat donne : $\forall t \in \mathbb{R}^*$, $f'(t) = -\dfrac{1}{t^2} \operatorname{Arctan} t + \dfrac{1}{t(t^2+1)}$.

Q26 : Réponses B,D

---

27. On fait une intégration par parties :

$$\mathrm{I}(t) = \int_0^t \frac{1}{2} \underbrace{\frac{2w}{(1+w^2)^2}}_{=f'} \underbrace{w}_{=g} \, \mathrm{d}w = \left[-\frac{w}{2(1+w^2)} \right]_0^t + \frac{1}{2} \int_0^t \frac{\mathrm{d}w}{1+w^2}$$

$$= -\frac{t}{2(1+t^2)} + \frac{1}{2} \operatorname{Arctan} t = -t^2 f'(t)/2.$$

Q27 : Réponse C

---

28. On a évidemment $\mathrm{I}(t) > 0$ pour $t > 0$ (intégrale d'une fonction continue positive non identiquement nulle sur $[0, t]$). Donc $f'(t) < 0$ pour $t > 0$.

Ainsi f est strictement décroissante sur $\mathbb{R}_+^*$ (et strictement croissante sur $\mathbb{R}_-^*$ puisqu'elle est paire). Par conséquent :

Q28 : Réponse E : aucune bonne réponse

---

29. f est paire, $f'(0) = 0$ donc :

Q29 : Réponses B,D

---

30. **A.B.** On écrit $f(t) = 1 + \mathrm{o}(t) = 1 + t\varepsilon(t)$ avec $\lim\limits_{t\to 0} \varepsilon(t) = 0$. Donc $\phi(x) = 1 + \dfrac{1}{x}\displaystyle\int_0^x t\varepsilon(t)\,\mathrm{d}t$ et, puisque la fonction ε est bornée au voisinage de 0 :

$$\left|\frac{1}{x}\int_0^x t\varepsilon(t)\,\mathrm{d}t\right| \leqslant \frac{1}{|x|}\left|\int_0^x t\,\mathrm{d}t\right| \|\varepsilon\|_\infty = \frac{|x|}{2}\|\varepsilon\|_\infty \xrightarrow[x\to 0]{} 0$$

ce qui prouve que $\lim\limits_{x\to 0} \phi(x) = 1$ et ϕ est continue en 0.

Enfin, sur $\mathbb{R}^*$, ϕ est de classe $\mathscr{C}^\infty$ comme quotient de telles fonctions, donc finalement ϕ est continue sur $\mathbb{R}$ (on peut penser que la justification donnée par l'énoncé dans la réponse B. n'est pas complète, car la seule limite en 0 ne suffit pas, mais elle n'est pas fausse donc on peut considérer la réponse comme exacte).

Rem : en fait, $t \mapsto \dfrac{\mathrm{Arctan}\, t}{t}$ est développable en série entière sur $]-1,1[$ et il est facile d'en déduire qu'il en est de même de ϕ, donc en fait ϕ est de classe $\mathscr{C}^\infty$...

C.D. f est paire donc $x \mapsto \displaystyle\int_0^x f$ est impaire et ϕ est donc paire.

$$\boxed{\textbf{Q30 : Réponses B,C}}$$

---

31. On élimine d'emblée deux réponses grossièrement fausses :

B $\lim\limits_{x\to\infty} f(x) = 0$, on ne peut donc pas avoir $f(x) \geqslant 1$ sur $\mathbb{R}$ (ou aussi à cause des variations de f, question 28).

C. Réponse fausse car f est décroissante et non croissante sur $[0,x]$ lorsque $x > 0$.

Ensuite :

A.D Soit $x < 0$. f étant croissante sur $[x,0]$, on a : $\forall t \in [x,0]$, $1 \geqslant f(t) \geqslant f(x)$ donc

$$\int_x^0 \mathrm{d}t \geqslant \int_x^0 f(t)\,\mathrm{d}t \geqslant \int_x^0 f(x)\,\mathrm{d}t = -xf(x)$$

ce qui implique $-x \geqslant -x\phi(x) \geqslant -xf(x)$ donc $1 \geqslant \phi(x) \geqslant f(x)$ puisque $-x > 0$.
On obtient ensuite la même égalité pour $x > 0$ puisque f et ϕ sont paires.
Rem : les inégalités sont plus directes à obtenir pour $x > 0$, mais j'ai procédé ainsi pour respecter la formulation de l'énoncé dans la question D.

$$\boxed{\textbf{Q31 : Réponse D}}$$

---

32. $x \mapsto \displaystyle\int_0^x f(t)\,\mathrm{d}t$ est de classe $\mathscr{C}^1$ sur $\mathbb{R}$ comme primitive d'une fonction continue, donc ϕ est de classe $\mathscr{C}^1$ sur $\mathbb{R}^*$. On a de plus, pour $x \neq 0$:

$$\phi'(x) = -\frac{1}{x^2}\int_0^x f(t)\,\mathrm{d}t + \frac{1}{x}f(x) = \frac{f(x) - \phi(x)}{x}.$$

Le D.L de f en 0 : $f(t) = 1 + \mathrm{o}(t)$ s'intègre en $\displaystyle\int_0^x f(t)\,\mathrm{d}t = x + \mathrm{o}(x^2)$ d'où $\phi(x) = 1 + \mathrm{o}(x)$. Cela montre que ϕ admet en 0 un D.L d'ordre 1 donc y est dérivable, et que $\phi'(0) = 0$.
Conclusion :

$$\boxed{\textbf{Q32 : Réponses B,D}}$$

---

33. **A.B.** L'inégalité $\mathrm{Arc}\tan t \leqslant \dfrac{\pi}{2}$ donne, pour tout $x \geqslant 1$:

$$\mathrm{J}(x) = \int_1^x \frac{\mathrm{Arc}\tan t}{t}\,\mathrm{d}t \leqslant \frac{\pi}{2}\int_1^x \frac{\mathrm{d}t}{t} = \frac{\pi}{2}\ln x\,.$$

C.D. Donc pour $x \geqslant 1$:

$$0 \leqslant \phi(x) = \frac{1}{x}\int_0^1 f(t)\,\mathrm{d}t + \frac{1}{x}\mathrm{J}(x) \leqslant \frac{1}{x}\int_0^1 f(t)\,\mathrm{d}t + \frac{\pi}{2}\frac{\ln x}{x}$$

ce qui prouve que $\lim\limits_{x\to+\infty} \phi(x) = 0$.

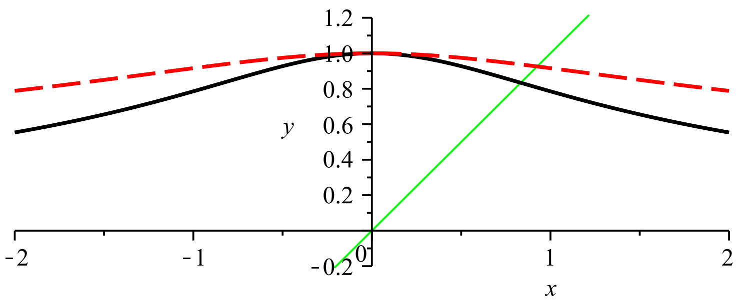
$\boxed{\textbf{Q33 : Réponses B,C}}$

---

34. On a déjà vu que ϕ est paire et que $\phi'(0) = 0$. Donc :

$\boxed{\textbf{Q34 : Réponse C}}$

On a représenté ci-dessous les graphes de f (en noir), de ϕ (en rouge) et de la droite d'équation $y = x$ (en vert) :



35. **A.** Cette phrase ne veut rien dire : on dit « bijection **de** ... **sur** ... ».

B. Fantaisiste : ϕ est à valeurs positives...

C. – Montrons déjà que l'équation $\phi(x) = x$ admet une et une seule solution α sur $\mathbb{R}$.

Déjà, cette équation ne peut avoir de solution sur $\mathbb{R}_-$, puisque ϕ est à valeurs positives.
Sur $\mathbb{R}_+$ posons : $g(x) = \phi(x) - x$; g est dérivable sur $\mathbb{R}_+^*$ et, pour tout $x > 0$: $g'(x) = \phi'(x) - 1 < 0$.
Donc g est strictement décroissante de 1 à $-\infty$ donc s'annule bien une fois et une seule en un point $\alpha > 0$ ($\alpha \approx 0,9256..$ par Maple).

– Montrons maintenant que ϕ est lipschitzienne de rapport $\leqslant \frac{1}{4}$:

Pour $x \neq 0$, on a : $\phi(x) = \frac{1}{x}\int_0^x f(t)\,\mathrm{d}t = \int_0^1 f(ux)\,\mathrm{d}u$ en posant $t = ux$, formule qui d'ailleurs reste vraie pour $x = 0$. Donc, pour tous x, y réels :

$$\left|\varphi(x) - \varphi(y)\right| \leqslant \int_0^1 \left|f(ux) - f(uy)\right|\,\mathrm{d}u \leqslant \int_0^1 \left\|f'\right\|_\infty \left|x - y\right| u\,\mathrm{d}u = \frac{\left\|f'\right\|_\infty}{2}\left|x - y\right|$$

d'après l'inégalité des accroissements finis.

Il ne nous reste plus qu'à montrer que $\forall t \in \mathbb{R}, \left|f'(t)\right| \leqslant \dfrac{1}{2}$ soit, par parité, que pour tout $t \in \mathbb{R}_+$, $\dfrac{\operatorname{Arc}\tan t}{t^2} - \dfrac{1}{t(1+t^2)} \leqslant \dfrac{1}{2}$ ou encore $\operatorname{Arc}\tan t \leqslant \dfrac{t^2}{2} + \dfrac{t}{1+t^2}$.

Pour cela, on considère la fonction auxiliaire $g : t \mapsto \dfrac{t^2}{2} + \dfrac{t}{1+t^2} - \operatorname{Arc}\tan t \ (t \geqslant 0)$.

$g'(t) = t + \dfrac{1-t^2}{(1+t^2)^2} - \dfrac{1}{1+t^2} = \dfrac{t[(1+t^2)^2 - 2t]}{(1+t^2)^2}$. Une autre « petite » étude de fonction auxiliaire montre que $(1+t^2)^2 - 2t$ reste positif sur $\mathbb{R}_+$, donc finalement $g'(t) \geqslant 0$ donc g croissante donc g reste positive sur $\mathbb{R}_+$ puisque $g(0) = 0$.

On a donc finalement prouvé :

$$\forall (x,y) \in \mathbb{R},\ \left|\phi(x) - \phi(y)\right| \leqslant \frac{1}{4}\left|x - y\right|.$$

– On en déduit, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$: $\left|u_n - \alpha\right| = \left|\phi(u_{n-1}) - \phi(\alpha)\right| \leqslant \dfrac{1}{4}\left|u_{n-1} - \alpha\right|$ et on obtient facilement le résultat de la réponse C. par récurrence sur n.

D. De la question précédente, on déduit : $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = \alpha$.

Q35 : Réponse C

---

36. D'après la question 32, on a :

$$\forall x \in \mathbb{R}^*,\ x^2\phi'(x) + x\phi(x) = xf(x) = \operatorname{Arc}\tan x.$$

Ainsi, ϕ est solution de l'équation (E) sur $\mathbb{R}^*$, mais aussi sur $\mathbb{R}$ car ϕ est bien dérivable sur $\mathbb{R}$ et la relation est encore vérifiée pour $x = 0$.

Sur $\mathbb{R}_+^*$ ou sur $\mathbb{R}_-^*$, la solution générale de l'équation homogène $x^2y' + xy = 0$ est $y = \dfrac{K}{x}$ où K est une constante dépendant de l'intervalle considéré.

L'ensemble des solutions de l'équation est donc l'ensemble des applications de la forme :

$$x \mapsto \begin{cases} \dfrac{K_1}{x} + \phi(x) & \text{si } x > 0 \\ \dfrac{K_2}{x} + \phi(x) & \text{si } x < 0 \end{cases} \quad \text{avec } K_1, K_2 \in \mathbb{R}.$$

On peut donc en conclure :

Q36 : Réponse D

⋆ ⋆ ⋆ ⋆
⋆ ⋆ ⋆
⋆ ⋆
⋆