Dans le plan complexe $\mathbb{C}$, on considère la fonction

$$f : z \longmapsto z' = \frac{iz - 2 + 4i}{z - i}\cdot$$

On note $\mathcal{D}$ l'ensemble de définition de f .

Question n° 01 :

$z' = \dfrac{iz - 2 + 4i}{z - i}$ donc $\mathcal{D} = \mathbb{C}\backslash\{i\}$.
$zz' - z'i = iz - 2 + 4i$
$z(z' - i) = iz' - 2 + 4i$
Pour $z' \neq i$, $z = \dfrac{iz' - 2 + 4i}{z' - i}$.
1.a) fausse . 1.b) fausse . 1.c) exacte . 1.d) exacte .

Question n° 02 :

$Z = z - i$ donc $z = Z + i$ et $Z' = z' - i$ donc $z' = Z' + i$.
On a $zz' - i(z + z') = -2 + 4i$ donc $(z - i)(z' - i) - i^2 = -2 + 4i$.
$ZZ' + 1 = -2 + 4i$ donc $ZZ' = -3 + 4i$. Comme $|-3 + 4i| = 5$:
2.a) fausse . 2.b) exacte . 2.c) fausse . 2.d) fausse .

Question n° 03 :

Si M décrit le cercle de centre A et de rayon 5 et seulement dans ce cas, $|Z| = 5$ donc $|Z'| = 1$, M' décrit alors le cercle de centre A et de rayon 1 .

Les réponses 3.a) et 3.b) sont donc fausses .

$$\arg(ZZ') \equiv (\overrightarrow{Ox}, \overrightarrow{AM}) + (\overrightarrow{Ox}, \overrightarrow{AM'}) \qquad [2\pi]$$

3.c) est fausse .

Si M décrit l'axe des imaginaires sauf A et seulement dans ce cas, $\arg(Z) \equiv \frac{\pi}{2} \quad [\pi]$, $\arg(Z') \equiv \arg(-3 + 4i) - \frac{\pi}{2} \quad [\pi]$ donc:

$$(\overrightarrow{Ox}, \overrightarrow{AM'}) \equiv \arg(-3 + 4i) - \frac{\pi}{2} \quad [\pi]$$

et M' décrit la droite passant par A et perpendiculaire à la droite (OC) privée de A (C désigne le point d'affixe $-3 + 4i$) .

donc 3.d) est exacte .

3.a) fausse . 3.b) fausse . 3.c) fausse . 3.d) exacte .

Question n° 04 :

Lorsque M décrit une droite passant par A, Z garde un argument fixe, donc Z' aussi . M' décrit une droite passant par A et privée de A .

4.a) est fausse .

$$Z = \frac{-3+4i}{Z'} \qquad \text{donc} \qquad z = i + \frac{-3+4i}{z'-i}.$$

On désigne par P le point d'affixe $Z' = z' - i$ et par Q le point d'affixe $\frac{1}{Z'} = \frac{1}{z'-i}$. M' décrit un cercle de centre O et de rayon ρ si et seulement si Q décrit un cercle de centre A', d'affixe $-i$ et de rayon ρ . Si $\rho = 1$, R et P puis M décrivent des droites . Si $\rho \neq 1$, R, P et M décrivent chacun un cercle .

4.b) est donc fausse .

Lorsque M' décrit une droite passant par O, Q décrit une droite passant par A' d'affixe $-i$ et de même direction . R et P décrivent un cercle passant par O et privé de O . M décrit alors un cercle passant par A et privé de A .

4.c) est fausse .

Si M décrit un cercle de centre A et de rayon $r \neq 0$, M' décrit un cercle de centre A et de rayon $5/r$. $(ZZ' = -3+4i)$

4.d) est fausse .

4.a) fausse . 4.b) fausse . 4.c) fausse . 4.d) fausse .

On considère les fonctions de la variable réelle x définies par

$$u(x) = x - 1 + \sqrt{x^2 - 2x} \quad \text{et} \quad v(x) = x - 1 - \sqrt{x^2 - 2x}$$

de courbes représentatives $\mathcal{C}_u$ et $\mathcal{C}_v$ dans le repère Oxy.

Question n° 05 :

$$u'(x) = 1 + \frac{x-1}{\sqrt{x^2-2x}} = \frac{x - 1 + \sqrt{x^2-2x}}{\sqrt{x^2-2x}}$$

$$\mathcal{D} = \left]-\infty, 0\right] \cup \left[2, +\infty\right[\qquad \mathcal{D}' = \left]-\infty, 0\right[\cup \left]2, +\infty\right[$$

5.a) fausse . 5.b) fausse . 5.c) fausse . 5.d) exacte .

Question n° 06 :

$$u'(x) = \frac{x - 1 + \sqrt{x^2 - 2x}}{\sqrt{x^2 - 2x}}$$

Si $x > 2$, $u'(x) > 0$.
Si $x < 0$,

$$u'(x) = \frac{(x-1)^2 - (x^2 - 2x)}{\sqrt{x^2 - 2x} \quad (x - 1 - \sqrt{x^2 - 2x})},$$

$$u'(x) = \frac{1}{\sqrt{x^2 - 2x} \quad (x - 1 - \sqrt{x^2 - 2x})}.$$

Donc si $x < 0$, $u'(x) < 0$.
$u(x) \times v(x) = (x-1)^2 - (x^2 - x) = 1$.
$u(x) > 0$ pour $x > 2$ et $v(x) < 0$ pour $x < 0$.
Donc $v(x) > 0$ pour $x > 2$ et $u(x) < 0$ pour $x < 0$.
6.a) fausse . 6.b) fausse . 6.c) exacte . 6.d) fausse .

Question n° 07 :

Si $x \neq 0$,

$$u(x) = x - 1 + |x|\sqrt{1 - \frac{2}{x}} = x - 1 + |x|\Big(1 - \frac{1}{x} + \frac{1}{2}(\frac{1}{2} - 1)\frac{4}{2!x^2} + \circ(\frac{1}{x^2})\Big)$$

Pour $x > 2$,

$$u(x) = 2x - 2 - \frac{1}{2x} + \circ(\frac{1}{x}).$$

7.a) fausse . 7.b) exacte . 7.c) fausse . 7.d) exacte .

Question n° 08 :

Pour $x < 0$,

$$u(x) = \frac{1}{2x} + \circ(\frac{1}{x}).$$

8.a) fausse . 8.b) exacte . 8.c) exacte . 8.d) fausse .

Question n° 09 :

$$v'(x) = 1 - \frac{x-1}{\sqrt{x^2-2x}} = \frac{\sqrt{x^2-2x}-(x-1)}{\sqrt{x^2-2x}} = -\frac{v(x)}{\sqrt{x^2-2x}}$$

Pour $x < 0$, $v(x) < 0$ donc $v'(x) > 0$.
Pour $x > 2$, $v(x) > 0$ donc $v'(x) < 0$.
9.a) est fausse . 9.b) est vraie .

$$\lim_{x\to 2} u'(x) = +\infty \quad , \quad \lim_{x\to 2} v'(x) = -\infty \quad \text{et} \quad u(2) = v(2) = 1$$

Donc $\mathcal{C}_u$ et $\mathcal{C}_v$ admettent une même tangente verticale en $x = 2$. 9.c) est exacte .

$$\lim_{x\to 0} u'(x) = -\infty \quad , \quad \lim_{x\to 0} v'(x) = +\infty \quad \text{et} \quad u(0) = v(0) = -1$$

Donc $\mathcal{C}_u$ et $\mathcal{C}_v$ admettent une même tangente verticale en $x = 0$. 9.d) est fausse .
9.a) fausse . 9.b) exacte . 9.c) exacte . 9.d) fausse .

Question n° 10 :

Courbe $\mathcal{C}$.

Pour $x > 2$,

$$v(x) = \frac{1}{2x} + \circ(\frac{1}{x}).$$

Pour $x < 0$,

$$v(x) = 2x - 2 - \frac{1}{2x} + \circ(\frac{1}{x}).$$

$$u(x) - (2x - 2) = \sqrt{x^2 - 2x} - (x - 1) = -v(x)$$

Si $x \geq 2$, $u(x) < 2x - 2$. $\mathcal{C}_u$ est en dessous de son asymptote oblique pour $x \geq 2$.
Si $x \leq 0$, $u(x) < 0$ donc $\mathcal{C}_u$ est en dessous de $x'x$.
Si $x \geq 2$, $v(x) > 0$ donc $\mathcal{C}_v$ est en dessus de $x'x$.

$$v(x) - (2x - 2) = -\sqrt{x^2 - 2x} - (x - 1) = -u(x)$$

Si $x \leq 0$, $v(x) > 2x - 2$. $\mathcal{C}_v$ est en dessus de son asymptote oblique pour $x \leq 2$.
10.a) fausse . 10.b) fausse . 10.c) fausse . 10.d) fausse .

Question n° 11 :

Soit A le point de coordonnées $(1, 0)$ .La symétrie $\mathcal{S}_A$ de centre A transforme le point M de coordonnées (x, y) en M' de coordonnées (x', y') telles que:

$$x + x' = 2 \qquad y + y' = 0.$$

Si $\mathcal{C}'_u = \mathcal{S}_A(\mathcal{C}_u)$, $\mathcal{C}'_u$ a pour équation:

$$-y' = 2 - x' - 1 + \sqrt{(2 - x')^2 - 2(2 - x')},$$

$$-y' = -x' + 1 + \sqrt{x'^2 - 2x'}.$$

Donc $\mathcal{C}'_u = \mathcal{C}_v$. Donc $\mathcal{C}$ admet A pour centre de symétrie .
$\mathcal{C}$ a pour équations:

$$[y - (x - 1)] - \sqrt{x^2 - 2x} = 0 \qquad \text{ou} \qquad [y - (x - 1)] + \sqrt{x^2 - 2x} = 0$$

soit:

$$[y - (x - 1)]^2 - (x^2 - 2x) = 0$$

$$y^2 - 2xy + 2y + 1 = 0$$

11.a) exacte . 11.b) fausse . 11.c) exacte . 11.d) fausse .

Question n° 12 :

$\overrightarrow{OM} = \overrightarrow{OO'} + \overrightarrow{O'M}$ et donc:

$$x\vec{i} + y\vec{j} = \vec{i} + x'\vec{I} + y'\vec{J} = \vec{i} + x'\vec{i} + y'(\vec{i} + 2\vec{j})$$

d'où $x = 1 + x' + y'$ et $y = 2y'$.

Une équation de $\mathcal{C}$ dans $(O', \vec{I}, \vec{J})$ sera donc:

$$4y'^2 - 2(1 + x' + y')2y' + 4y' + 1 = 0,$$

$$4x'y' - 1 = 0.$$

12.a) exacte . 12.b) fausse . 12.c) fausse . 12.d) exacte .

Soient les équations différentielles associées

$$x(2 - x)y' + (1 - x)y = 1 \qquad (E)$$

$$x(2 - x)y' + (1 - x)y = 0 \qquad (E')$$

On note $I_1 = \left]-\infty, 0\right[$, $I_2 = \left]0, 2\right[$ et $I_3 = \left]2, +\infty\right[$. On pose $U = I_1 \cup I_2 \cup I_3$.

Question n° 13 :

(E') équivaut sur chaque intervalle I_i, $(i = 1, \dots, 3)$, à:

$$\frac{y'}{y} = -\frac{x - 1}{x^2 - 2x},$$

$$\ln(|y|) = -\frac{1}{2}\ln(|x^2 - 2x|) + K_i \qquad (i = 1, \dots, 3),$$

où K_i, $(i = 1, \dots, 3)$ est une constante sur I_i .

D' où l'on tire la solution de (E'), sur chaque intervalle I_i, $(i = 1, \dots, 3)$:

$$y = \frac{\lambda_i}{\sqrt{|x^2 - 2x|}}$$

où $\lambda_i \quad (i = 1, \dots, 3)$ est une constante sur I_i .

Nous pouvons alors répondre aux questions 13, 14 et 15 .

13.a) fausse . 13.b) exacte . 13.c) fausse . 13.d) fausse .

Question n° 14 :

14.a) fausse . 14.b) exacte . 14.c) fausse . 14.d) exacte .

Question n° 15 :

15.a) fausse . 15.b) exacte . 15.c) fausse . 15.d) exacte .

Question n° 16 :

On pose $\varepsilon = 1$ si $x \in I_1 \cup I_3$ et $\varepsilon = -1$ si $x \in I_2$. La solution générale de (E') est donc sur I_i:

$$y = \frac{\lambda_i}{\sqrt{\varepsilon(x^2 - 2x)}}.$$

On pose:

$$y = \frac{z}{\sqrt{\varepsilon(x^2 - 2x)}},$$

$$y' = \frac{z'}{\sqrt{\varepsilon(x^2 - 2x)}} - \frac{(x-1)z}{(x^2 - 2x)\sqrt{\varepsilon(x^2 - 2x)}}.$$

On reporte alors dans (E):

$$\frac{x(2-x)z'}{\sqrt{\varepsilon(x^2 - 2x)}} + \frac{(x-1)z}{\sqrt{\varepsilon(x^2 - 2x)}} + \frac{(1-x)z}{\sqrt{\varepsilon(x^2 - 2x)}} = 1.$$

Il reste:

$$-\varepsilon\sqrt{\varepsilon(x^2 - 2x)}z' = 1$$

$$z' = \frac{-\varepsilon}{\sqrt{\varepsilon(x^2 - 2x)}}.$$

Comme $-\varepsilon = \mathrm{sgn}[x(2-x)]$, nous en déduisons:
16.a) fausse . 16.b) fausse . 16.c) exacte . 16.d) fausse .

Pour $x \in I\!R\backslash\{0, 2\}$ soit la fonction $F(x) = \displaystyle\int \frac{dx}{\sqrt{|x(2-x)|}}$.

Question n° 17 :

La fonction $x \mapsto u = x - 1$ est continue et dérivable sur $I\!R$. L'image par cette fonction de $\left]0, 2\right[$ est $\left]-1, 1\right[$. La fonction $x \mapsto \text{Arcsin}(x)$ est continue et dérivable sur $\left]-1, 1\right[$ donc la fonction $x \mapsto \theta$ est continue et dérivable sur $\left]0, 2\right[$. Arcsin est croissante sur $\left]-1, 1\right[$ donc la fonction $x \mapsto \theta$ est croissante sur $\left]0, 2\right[$.

Soit:

$$g(x) = \text{Arcsin}(x - 1)$$

$$g'(x) = \frac{1}{\sqrt{1 - (x-1)^2}} = \frac{1}{\sqrt{2x - x^2}} = \frac{1}{\sqrt{|x^2 - 2x|}}$$

sur I_2 .

17.a) fausse . 17.b) fausse . 17.c) fausse . 17.d) fausse .

Question n° 18 :

Soients:

$$s(x) = \frac{x}{x-2} \qquad s'(x) = \frac{-2}{(x-2)^2}$$

$$t(x) = \frac{x-2}{x} \qquad t'(x) = \frac{2}{x^2}$$

Nous obtenons donc les variations de s, t, u, v sur $\mathcal{I}$:

x	$-\infty$		0
$s'(x)$		$-$	
$s(x)$	1	$\searrow$	0
$u(x)$	1	$\searrow$	0

x	$-\infty$		0
$t'(x)$		$+$	
$t(x)$	1	$\nearrow$	$+\infty$
$v(x)$	1	$\nearrow$	$+\infty$

18.a) exacte . 18.b) fausse . 18.c) fausse . 18.d) exacte .

Question n° 19 :

a) et c) sont vraies . b) est fausse car il existe d'autres façons de paramètrer de façon rationnelle la courbe d'équation:

$$y = \frac{1}{\sqrt{x^2 - 2x}}.$$

d) est fausse car $2 \notin \left]-\infty, 0\right[$.

19.a) exacte . 19.b) fausse . 19.c) exacte . 19.d) fausse .

Question n° 20 :

$$F(x) = \int \frac{dx}{\sqrt{x(2-x)}} = \int \frac{dx}{\sqrt{(x-1)^2 - 1}} = -\int \frac{d(1-x)}{\sqrt{(1-x)^2 - 1}}$$

Donc sur $\left]-\infty, 0\right[$:

$$F(x) = -\text{Argch}(1-x) = -\ln(1 - x + \sqrt{(1-x)^2 - 1}) = -\ln(1 - x + \sqrt{x^2 - 2x}).$$

Sur $\left]2, +\infty\right[$:

$$F(x) = \text{Argch}(x-1) = \ln(x - 1 + \sqrt{x^2 - 2x}).$$

20.a) fausse . 20.b) fausse . 20.c) exacte . 20.d) fausse .

α étant un paramètre réel, on donne les matrices

$$M = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 2 \\ 0 & 1 & 0 \\ \alpha & -1 & -1 \end{pmatrix} \qquad \text{et} \qquad N = \begin{pmatrix} X & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ \alpha & -1 & -1 \end{pmatrix}.$$

Question n° 21 :

La condition $ab \neq 0$ entraine que a) est fausse: on ne peut pas obtenir $\alpha = 2a + b\alpha$.

Si on cherche à transformer l'élément de première ligne troisième colonne en 0,on est obligé de faire $L_1 \leftarrow L_1 + 2L_3$ et L_1 devient:

$$(2 + 2\alpha, -1, 0)$$

En faisant alors $L_1 \leftarrow L_1 + L_2$, pour transformer en 0 l'élément de première ligne deuxième colonne, L_1 devient:

$$(2 + 2\alpha, 0, 0).$$

donc obligatoirement $X = 2 + 2\alpha$.

21.a) fausse . 21.b) fausse . 21.c) fausse . 21.d) fausse .

Question n° 22 :

Une opération du type (1) multiplie les déterminants qui contiennent une partie de la ligne i par a qui est non nul, donc ne change pas le rang de la matrice .

On a vu dans la question précédente que pour obtenir par des transformations du type (1) une matrice N, nécessairement on devait avoir $X = 2 + 2\alpha$ .Donc si $\alpha = -1$, $X = 0$.

$$N = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ -1 & -1 & -1 \end{pmatrix}.$$

Le rang de N est donc 2 .

22.a) exacte . 22.b) fausse . 22.c) exacte . 22.d) fausse .

On considère dans l'espace vectoriel $\mathcal{E} = \mathbb{R}^3$, l'endomorphisme f dont la matrice dans la base canonique $\mathcal{B}_0 = (\vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$ est

$$M = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 2 \\ 0 & 1 & 0 \\ -1 & -1 & -1 \end{pmatrix}. \qquad (1)$$

Question n° 23 :

Il suffit d'appliquer le cours . Notons que pour la question d) on demande implicitement des matrices réelles dans la triangulation .

23.a) fausse . 23.b) fausse . 23.c) fausse . 23.d) fausse .

Question n° 24 :

$$\det(M - \lambda I) = \begin{vmatrix} 2-\lambda & 1 & 2 \\ 0 & 1-\lambda & 0 \\ -1 & -1 & -1-\lambda \end{vmatrix}$$

$$\det(M-\lambda I) = (2-\lambda)(1-\lambda)(-1-\lambda)+2(1-\lambda) = (1-\lambda)[(\lambda-2)(\lambda+1)+2] = (1-\lambda)(\lambda^2-\lambda)$$

$$\det(M - \lambda I) = -\lambda(\lambda - 1)^2.$$

24.a) fausse . 24.b) fausse . 24.c) fausse . 24.d) exacte .

Question n° 25 :

$$M^2 = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 2 \\ 0 & 1 & 0 \\ -1 & -1 & -1 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} 2 & 1 & 2 \\ 0 & 1 & 0 \\ -1 & -1 & -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 2 \\ 0 & 1 & 0 \\ -1 & -1 & -1 \end{pmatrix} = M$$

Donc $M(M - I) = 0$ et pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, $M^n = M = M^2$.
$M(M + I)^2 = M^3 + 2M^2 + M = 4M$. Donc, $M(M + I)^2 \neq 0$.
25.a) exacte . 25.b) fausse . 25.c) fausse . 25.d) exacte .

Question n° 26 :

Comme $M^2 = M$, $f^2 = f$ et donc f est un projecteur . Par suite, Im f et Ker f sont propres (respectivement associés aux valeurs propres 1 et 0) et supplémentaires . 0 étant valeur propre simple, dim(Ker f) = 1 d'où dim(Im f) = 2 . (On savait aussi que rang(f)=rang(M)= 2) .
26.a) fausse . 26.b) exacte . 26.c) fausse . 26.d) exacte .

Question n° 27 :

Les sous espaces propres ont pour équations:

$$\left\{ \begin{array}{rcrcrcl} 2x & + & y & + & 2z & = & 0 \\ & & y & & & = & 0 \\ -x & - & y & - & z & = & 0 \end{array} \right. \quad \text{soit} \quad \left\{ \begin{array}{rcl} y & = & 0 \\ x + z & = & 0 \end{array} \right. \quad \text{pour Ker}f,$$

$$x + y + 2z = 0 \quad \text{pour Im}f.$$

Nous pouvons donc répondre aux questions 27 et 28 .
27.a) exacte . 27.b) fausse . 27.c) fausse . 27.d) exacte .

Question n° 28 :

28.a) fausse . 28.b) exacte . 28.c) exacte . 28.d) fausse .

Question n° 29 :

Les vecteurs de coordonnées $(0, 2, 0)$ et $(0, -2, 0)$ n'appartenant pas à Im f, a) et b) sont fausses . On a déja vu que f était un projecteur mais pas une involution .
29.a) fausse . 29.b) fausse . 29.c) exacte . 29.d) fausse .

Soient f et g les endomorphismes de l'espace vectoriel $\mathcal{E} = I\!R^3$ dont les matrices, relativement à la base canonique $\mathcal{B}_0 = (\vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$ de $\mathcal{E}$, sont respectivement

$$F = \begin{pmatrix} 1 & -1 & -1 \\ -2 & 2 & 3 \\ 2 & -2 & -3 \end{pmatrix} \qquad \text{et} \qquad G = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -2 & 3 & 4 \\ 2 & -2 & -3 \end{pmatrix}.$$

Question n° 30 :

$$\det(F - \lambda I) = \begin{vmatrix} 1-\lambda & -1 & -1 \\ -2 & 2-\lambda & 3 \\ 2 & -2 & -3-\lambda \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1-\lambda & -1 & -1 \\ -2 & 2-\lambda & 3 \\ 0 & -\lambda & -\lambda \end{vmatrix}$$

$$\det(F - \lambda I) = -\lambda \begin{vmatrix} 1-\lambda & -1 & -1 \\ -2 & 2-\lambda & 3 \\ 0 & 1 & 1 \end{vmatrix} = -\lambda \begin{vmatrix} 1-\lambda & 0 & 0 \\ -2 & 2-\lambda & 3 \\ 0 & 1 & 1 \end{vmatrix}$$

$$\det(F - \lambda I) = -\lambda(1-\lambda)(-1-\lambda) = -\lambda(\lambda-1)(\lambda+1).$$

f est donc diagonalisable .

$$\det(G - \lambda I) = \begin{vmatrix} 1-\lambda & 0 & 0 \\ -2 & 3-\lambda & 4 \\ 2 & -2 & -3-\lambda \end{vmatrix} = (1-\lambda)[(-\lambda+3)(-\lambda-3)+8]$$

$$\det(G - \lambda I) = (1-\lambda)(\lambda^2-1) = (\lambda+1)(\lambda-1)^2.$$

30.a) exacte . 30.b) exacte . 30.c) fausse . 30.d) fausse .

Question n° 31 :

Soient P et Q des propositions . Alors:

$$(P \Longrightarrow Q) \qquad = \qquad (Q \vee (\neg P))$$

En a) $P =$ «Les valeurs propres sont toutes simples. ».P est vraie, $\neg P$ est fausse .
En a) $Q =$ «f n'est pas diagonalisable .». Q est fausse donc a) est fausse .
En b) $P =$ «f n'est pas bijective . ».P est vraie car $\det(f)$= 0. $\neg P$ est fausse .
En b) $Q =$ «f est diagonalisable .». Q est vraie donc $(Q \vee (\neg P))$ est vraie . Donc b) est vraie .

Cherchons le sous espace propre relatif à la valeur propre 1 de g:

$$\begin{cases} 0x + 0y + 0z = 0 \\ -2x + 2y + 4z = 0 \\ 2x - 2y - 4z = 0 \end{cases}$$

C'est un plan vectoriel, par suite g est diagonalisable .

En c) $P =$ «Les valeurs propres sont toutes simples . ».P est fausse . $(Q \vee (\neg P))$ est vraie .

En d) $P =$ «g est bijective . ».P est vraie car det(g)$= -1$. En d) $Q =$ «f n'est pas diagonalisable . ».Q est fausse . $(Q \vee (\neg P))$ est fausse . Donc d) est fausse .

31.a) fausse . 31.b) exacte . 31.c) exacte . 31.d) fausse .

Question n° 32 :

Il résulte de ce qui précède que:

32.a) exacte . 32.b) exacte . 32.c) fausse . 32.d) fausse .

Question n° 33 :

$$F - G = \begin{pmatrix} 0 & -1 & -1 \\ 0 & -1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

$$\det(F - G - \lambda I) = \begin{vmatrix} -\lambda & -1 & -1 \\ 0 & -1-\lambda & -1 \\ 0 & 0 & -\lambda \end{vmatrix} = \lambda^2(-1-\lambda)$$

Le sous espace propre de valeur propre 0 a pour équations:

$$\begin{cases} 0x & - & y & - & z & = & 0 \\ 0x & - & y & - & z & = & 0 \\ 0x & + & 0y & + & 0z & = & 0 \end{cases} \quad \text{soit} \quad y + z = 0.$$

Donc $F - G$ est diagonalisable et a) est vraie .

Pour b) il s'agit encore d'une implication . (Voir la question 31) . $P =$ «32.a) et 32.b) sont fausses .». P est fausse, $(\neg P)$ est vraie .

$Q =$ «a) est impossible ». $\neg P$ étant vraie, $(Q \vee (\neg P))$ est vraie . Donc 33.b) est exacte.

Finalement:

33.a) exacte . 33.b) exacte . 33.c) exacte . 33.d) fausse .

Dans l'espace vectoriel $\mathcal{E} = I\!R^n$ où $n \in I\!N^*$, on considère l'endomorphisme f tel que $f^n = id_{\mathcal{E}}$, où $id_{\mathcal{E}}$ désigne l'endomorphisme tel que $id_{\mathcal{E}}(\vec{u}) = \vec{u}, \forall \vec{u} \in \mathcal{E}$.

Question n° 34 :

Remarquons d'abord que si $n \geq 2$, il existe plusieurs endomorphismes f de $\mathcal{E}$ tels que $f^n = id_{\mathcal{E}}$.

L'affirmation a) est fausse: pour $n = 2$ l'endomorphisme de matrice:

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$$

donne un contre exemple .

L'affirmation b) est fausse: pour $n = 2$ l'endomorphisme de matrice:

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

donne un contre exemple .

L'affirmation c) est fausse: même contre exemple que pour l'affirmation b) .

L'affirmation d) est exacte: si λ est valeur propre de f, il existe un vecteur $\vec{u} \in \mathcal{E}$ tel que:

$$f^n(\vec{u}) = \lambda^n \vec{u} = \vec{u}$$

$$(\lambda^n - 1)\vec{u} = \vec{0}$$

$$\lambda^n - 1 = 0$$

Or les seules solutions *réelles* de cette équations sont 1 et -1 . (On est dans un espace vectoriel réel, on cherche des valeurs propres réelles .)

34.a) fausse . 34.b) fausse . 34.c) fausse . 34.d) exacte .

Question n° 35 :

L'affirmation a) est fausse: pour $n = 3$, $(-id_{\mathcal{E}})^3 = -id_{\mathcal{E}}$.
L'affirmation b) est fausse car $(id_{\mathcal{E}})^3 = id_{\mathcal{E}}$.
L'affirmation c) est fausse: pour $n = 4$, $id_{\mathcal{E}}$ donne un contre exemple .
L'affirmation d) est fausse: $(-id_{\mathcal{E}})^4 = id_{\mathcal{E}}$.

35.a) fausse . 35.b) fausse . 35.c) fausse . 35.d) fausse .

On considère la fonction numérique définie par

$$f(x) = \sqrt{x^2 - 5x + 6} \quad \exp(\frac{1}{x})$$

de courbe représentative $\mathcal{C}$ dans le repère Oxy.

Question n° 36 :

$x^2 - 5x + 6$ admet 2 et 3 pour zéros .

$$\mathcal{D} = \Big]-\infty, 0\Big[\cup \Big]0, 2\Big] \cup \Big[3, +\infty\Big[.$$

$$\mathcal{D}' = \Big]-\infty, 0\Big[\cup \Big]0, 2\Big[\cup \Big]3, +\infty\Big[.$$

36.a) fausse . 36.b) exacte . 36.c) fausse . 36.d) fausse .

Question n° 37 :

Posons $\varepsilon = 1$ si $x > 0$ et appartient à $\mathcal{D}$ et $\varepsilon = -1$ si $x < 0$ et appartient à $\mathcal{D}$.

$$\sqrt{x^2 - 5x + 6} = \varepsilon x\Big(1 - \frac{5}{x} + \frac{6}{x^2}\Big)^{1/2} = \varepsilon x\Big[1 + \frac{1}{2}\Big(-\frac{5}{x} + \frac{6}{x^2}\Big) - \frac{1}{8}\Big(-\frac{5}{x}\Big)^2 + \circ\Big(\frac{1}{x^2}\Big)\Big]$$

$$\sqrt{x^2 - 5x + 6} = \varepsilon x\Big[1 - \frac{5}{2x} + \frac{3}{x^2} - \frac{25}{8x^2} + \circ\Big(\frac{1}{x^2}\Big)\Big] = \varepsilon\Big[x - \frac{5}{2} - \frac{1}{8x} + \circ\Big(\frac{1}{x}\Big)\Big]$$

$$\exp\Big(\frac{1}{x}\Big) = 1 + \frac{1}{x} + \frac{1}{2x^2} + \circ\Big(\frac{1}{x^2}\Big)$$

$$f(x) = \varepsilon\Big[x - \frac{5}{2} - \frac{1}{8x} + \circ\Big(\frac{1}{x}\Big)\Big] \times \Big[1 + \frac{1}{x} + \frac{1}{2x^2} + \circ\Big(\frac{1}{x^2}\Big)\Big]$$

$$f(x) = \varepsilon\Big(x - \frac{5}{2} - \frac{1}{8x} + 1 - \frac{5}{2x} + \frac{1}{2x}\Big) + \circ\Big(\frac{1}{x}\Big)$$

$$f(x) = \varepsilon\Big(x - \frac{3}{2} + \frac{-1 - 20 + 4}{8x}\Big) + \circ\Big(\frac{1}{x}\Big)$$

$$f(x) = \varepsilon\Big(x - \frac{3}{2} - \frac{17}{8x}\Big) + \circ\Big(\frac{1}{x}\Big)$$

Donc 37.a) est fausse et 37.b) est vraie .

37.c) et 37.d) sont évidemment fausses car on ne peut rien *déduire* de global d'une propriété locale .

37.a) fausse . 37.b) exacte . 37.c) fausse . 37.d) fausse .

Question n° 38 :

$$f'(x) = \left[\frac{2x - 5}{2\sqrt{x^2 - 5x + 6}} - \frac{1}{x^2}\sqrt{x^2 - 5x + 6}\right]\exp\Big(\frac{1}{x}\Big)$$

$$f'(x) = \frac{x^2(2x - 5) - 2(x^2 - 5x + 6)}{x^2\sqrt{x^2 - 5x + 6}}\exp\Big(\frac{1}{x}\Big)$$

$$f'(x) = \frac{2x^3 - 7x^2 + 10x - 12}{x^2\sqrt{x^2 - 5x + 6}}\exp\Big(\frac{1}{x}\Big)$$

$f(x)$ a le signe de $g(x) = 2x^3 - 7x^2 + 10x - 12$. $g'(x) = 6x^2 - 14x + 10$ .Le discriminant réduit de $g'(x)$ est $\Delta' = 49 - 60 = -11 < 0$. $g'(x)$ est positive donc g est croissante . g change de signe entre 2 et 3 car $g(2) = 16-28+20-12 = -4$ et $g(3) = 54-63+30-12 = 9$.

On en déduit le tableau de variation de f:

x	$-\infty$ 0	0 2	2 3	3 $+\infty$
$f'(x)$	$-$	$-$	//	$+$
$f(x)$	$+\infty$ $\searrow$ 0	$+\infty$ $\searrow$ 0	//	0 $\nearrow$ $+\infty$

Donc 38.a) est vraie et 38.b) est fausse . 38.c) est fausse car on ne compte pas comme tangente la tangente au point $(0,0)$ qui est un prolongement par continuité de la courbe . Enfin 38.d) est fausse car il n'y a que deux tangentes verticales, en 2 et 3 .

38.a) exacte . 38.b) fausse . 38.c) fausse . 38.d) fausse .

On note, sous réserve d'existence, $L_\lambda = \lim\limits_{x \to \lambda} \left[\dfrac{2^x + 5^x}{2}\right]^{1/x}$

Question n° 39 :

$$f(x) = \left[\frac{2^x + 5^x}{2}\right]^{1/x} = \exp(\varphi(x))$$

$$\varphi(x) = \ln(f(x)) = \frac{1}{x}\Big[\ln(2^x + 5^x) - \ln(2)\Big] = \frac{1}{x}\Big[\ln(5^x) + \ln\Big(1+\Big(\frac{2}{5}\Big)^x\Big) - \ln(2)\Big]$$

$$\varphi(x) = \ln(5) + \frac{1}{x}\ln(1 + \exp(x\ln(2/5)) - \frac{1}{x}\ln(2)$$

$$\varphi(x) = \ln(5) + \frac{1}{x}\ln(1 + 1 + \frac{1}{x}\ln(2/5) + \circ(x)) - \frac{1}{x}\ln(2)$$

$$\varphi(x) = \ln(5) + \frac{1}{x}\ln(1 + \frac{x}{2}\ln(2/5) + \circ(x))$$

$$\varphi(x) = \ln(5) + \frac{1}{2}\ln(2/5) + \circ(x) = \ln(\sqrt{10}) + \circ(x)$$

Finalement:

$$\lim_0 \varphi = \ln(\sqrt{10}) \qquad \text{et} \qquad L_0 = \sqrt{10}.$$

39.a) fausse . 39.b) fausse . 39.c) exacte . 39.d) exacte .

Question n° 40 :

$$\varphi(x) = \ln(5) + \frac{1}{x}\ln(1 + \exp(x\ln(2/5)) - \frac{1}{x}\ln(2)$$

$$\lim_{+\infty} x\ln(2/5) = -\infty \quad , \quad \lim_{+\infty} \exp(x\ln(2/5)) = 0 \quad , \quad \lim_{+\infty} \varphi = \ln 5$$

$$\lim_{+\infty} f = 5$$

40.a) fausse . 40.b) fausse . 40.c) fausse . 40.d) exacte .

---

	a	b	c	d	e
01	□	□	■	■	□
02	□	■	□	□	□
03	□	□	□	■	□
04	□	□	□	□	■
05	□	□	□	■	□
06	□	□	■	□	□
07	□	■	□	■	□
08	□	■	■	□	□
09	□	■	■	□	□
10	□	□	□	□	■
11	■	□	■	□	□
12	■	□	□	■	□
13	□	■	□	□	□
14	□	■	□	■	□
15	□	■	□	■	□
16	□	□	■	□	□
17	□	□	□	□	■
18	■	□	□	■	□
19	■	□	■	□	□
20	□	□	■	□	□
21	□	□	□	□	■
22	■	□	■	□	□
23	□	□	□	□	■
24	□	□	□	■	□
25	■	□	□	■	□
26	□	■	□	■	□
27	■	□	□	■	□
28	□	■	■	□	□
29	□	□	■	□	□
30	■	■	□	□	□
31	□	■	■	□	□
32	■	■	□	□	□
33	■	■	■	□	□
34	□	□	□	■	□
35	□	□	□	□	■
36	□	■	□	□	□
37	□	■	□	□	□
38	■	□	□	□	□
39	□	□	■	■	□
40	□	□	□	■	□