Question 1 H.P. pour les PCSI $\boxed{\text{ENAC } 2002}$

• $a_n\left(\frac{p}{q}\right)^n + \dots + a_1\left(\frac{p}{q}\right) + a_0 = 0$ soit $a_n p^n + a_{n-1} q\, p^{n-1} + \dots + a_1 q^{n-1} p + a_0 q^n = 0$

$p(a_n p^{n-1} + \dots + a_1 q^{n-1}) = -a_0 q^n$ donc $p \mid a_0 q^n$; psq $p \wedge q^n = 1$, on a $\underline{p \mid a_0}$
(théo. de Gauss)

• De même $q(a_0 q^{n-1} + \dots + a_{n-1} p^{n-1}) = -a_n p^n$ et, puisque $q \wedge p^n = 1$, $\underline{q \mid a_n}$

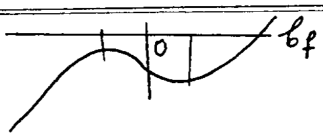
$\boxed{p \mid a_0 \text{ et } q \mid a_n}$ (on avait bien $q \mid a_n p^n$) donc c'est $\boxed{C}$ <u>qui est juste</u>.

$\boxed{D}$ est fausse psq $p \mid a_0$ et $q \mid a_n$ donc $pq \mid a_0 a_n$

Pour $\boxed{A}$ et $\boxed{B}$, on ne peut rien dire a priori

---

Question 2 $f(x) = x^3 - x - 1$ $f'(x) = 3x^2 - 1$ donc



$f\left(\frac{1}{\sqrt3}\right) = \frac{1}{3\sqrt3} - \frac{1}{\sqrt3} - 1 < 0$; $f\left(-\frac{1}{\sqrt3}\right) = -\frac{1}{3\sqrt3} + \frac{1}{\sqrt3} - 1 = \frac{2}{3\sqrt3} - 1 < 0$

f admet une seule racine réelle a et deux racines complexes conjuguées

• $\boxed{A}$, $\boxed{C}$, $\boxed{D}$ sont évidemment fausses $\left(a > \frac{1}{\sqrt3}\right)$

• On ne sait pas si $a \in \mathbb{Q}$: d'après le ①, si $a = \frac{p}{q}$, alors $p \mid 1$ et $q \mid 1$ soit $|p| = |q| = 1$, ce qui est impossible puisque $a \neq 1$ et $a \neq -1$ $\boxed{E}$ à noircir !!

Question 3 $\cos nx = \mathrm{Re}(\cos nx + i \sin nx) = \mathrm{Re}(\cos x + i \sin x)^n$

$= \mathrm{Re}\left(\sum_0^n C_n^k \cos^{n-k} x \; i^k \sin^k x\right) = \sum_{p \leq n/2} C_n^{2p} \cos^{n-2p} x \,(-1)^p \sin^{2p} x$

• On obtient donc
un polynôme P_n de degré n et à coef^{ts} dans $\mathbb{Z}$: $\boxed{C}$ <u>vrai</u>

• $\boxed{D}$ est vraie également ($t \longmapsto \cos t$ prend une $\infty^{té}$ de valeurs)

Question 4 $\cos x = \cos x$ $P_1 = X$ C, B, A faux

$\cos 2x = 2\cos^2 x - 1$ $P_2 = 2X^2 - 1$ $\boxed{D}$ <u>vrai</u>

$\cos 0.x = 1$ $P_0 = 1$

Question 5 • formules de trigo : A et B sont fausses !! $\boxed{E}$

$\cos a \cos b = \frac{1}{2}\left[\cos(a+b) + \cos(a-b)\right]$

• $\cos(n+1)x + \cos(n-1)x = 2\cos nx \cos x$ C, D fausses !!

Donc $\forall x$ $P_{n+1}(\cos x) + P_{n-1}(\cos x) = 2\, P_n(\cos x) \cos x$

Puisque cos prend une $\infty^{té}$ de valeurs $\neq$, les poly. st égaux et $\boxed{P_{n+1} + P_{n-1} = 2 X P_n}$

Question 6

$\forall x \quad \cos nx = \sum_{p \leq n} C_n^{2p} \cos^{n-2p} x \, (-1)^p \sin^{2p} x$ donc

- $P_n(X) = \sum_{p \leq n/2} C_n^{2p} X^{n-2p} (-1)^p (1-X^2)^p = X^n - C_n^2 X^{n-2}(1-X^2) + C_n^4 X^{n-4}(1-X^2)^2 + \dots$
$+ (-1)^k C_n^{2k} X^{n-2k}(1-X^2)^k + \dots$

P_n est de degré n donc ne peut avoir une parité opp. à celle de n $\quad \boxed{A}$ ~~vraie~~ faux

- coef^t de X^n $\quad C_n^0 + C_n^2 + C_n^4 + \dots + (-1)^k C_n^{2k} (-1)^k + \dots$ $\quad \boxed{B}$ vraie
c'est bien 2^{n-1}

- $P_n(-1) = P_n(\cos\pi) = \cos(n\pi) = (-1)^n$
- $P_n(0) = P_n\left(\cos\frac{\pi}{2}\right) = \cos n\frac{\pi}{2}$ $\quad$ C, D faux

$= \sum_{p \leq n} C_n^{2p} 0^{n-2p} . (-1)^p . = \begin{cases} 0 \text{ si } n \text{ est impair} \\ (-1)^{n/2} \text{ sinon} \end{cases}$

Question 7

$\forall x \quad P_n(\cos x) = \cos nx$

Or $\cos nx = 0 \iff \exists k \in \mathbb{Z} \quad nx = \frac{\pi}{2} + k\pi$

Donc P_n s'annule au - pour tous les nbres de la formes $x_k = \cos\alpha_k$ où $\alpha_k = \frac{\pi}{2n} + \frac{k\pi}{n}$, $k \in$ [illegible])

Par ex, avec $0 \leq k \leq n-1$, on a $0 \leq \frac{k\pi}{n} \leq \frac{n-1}{n}\pi$ donc $\frac{\pi}{2n} \leq \frac{\pi}{2n} + \frac{k\pi}{n} \leq \frac{\pi}{2n} + \frac{n-1}{n}\pi = \frac{2n-1}{2n}\pi <$ [illegible]

les x_k sont des nbres distincts, élts de $]-1, 1[$: il y en a n et $d^\circ P_n = n$ donc ce sont les seuls !! $\quad \boxed{D}$ vrai

---

Qu. n°8

$x_k = \cos\left(\frac{\pi}{2n} + \frac{k\pi}{n}\right)$ racines de P_n $\quad 0 \leq k \leq n-1$

$y_i = \cos\left(\frac{\pi}{2(n-1)} + i\frac{\pi}{n-1}\right)$ " " P_{n-1} $\quad 0 \leq i \leq n-2$

$\forall k \quad 0 \leq k \leq n-2 \quad 0 < \frac{\pi}{2n} + \frac{k\pi}{n} < \frac{\pi}{2(n-1)} + k\frac{\pi}{n-1} < \frac{\pi}{2n} + \frac{(k+1)\pi}{n} < \pi$ $\quad \boxed{C}$ vrai

donc, psq $\cos \searrow$ sur $[0, \pi]$, $\forall k \leq n-2 \quad 1 > x_k > y_k > x_{k+1} > -1$

$$\boxed{(E_n) \quad y'' + n^2 y = 0}$$

Sol^{ns}: $\quad y = \lambda \cos nx + \mu \sin nx = A . \cos(nx + \varphi) \quad$ A et φ qcq

Question 9

A faux $\qquad$ C, D faux

B vrai $\quad (\mu = 0, \lambda = 1)$

Question 10

$X = \cos x \qquad y = y(x) \qquad \frac{dy}{dx} = \frac{dy}{dX} \times \frac{dX}{dx} = -\sin x \frac{dy}{dX}$

$$\frac{d^2y}{dx^2} = \frac{d}{dx}\left(-\sin x\,\frac{dy}{dX}\right) = -\cos x\,\frac{dy}{dX} - \sin x\,\frac{d}{dx}\left(\frac{dy}{dX}\right) = -\cos x\,\frac{dy}{dX} + \frac{d^2y}{dX^2}\,(\sin^2 x)$$

$\boxed{B}$ vrai

(E_m) devient $-\cos x\,\dfrac{dy}{dX} + \sin^2 x\,\dfrac{d^2y}{dX^2} + m^2 y = 0$ soit $(1-X^2)\dfrac{d^2y}{dX^2} - X\dfrac{dy}{dX} + m^2 y = 0$ $\boxed{D}$ vrai

---

Question 11 $\forall x\ P_m(\cos x) = \cos mx$

$\forall x\ -\sin x\,P'_m(\cos x) = -m\sin mx$

$-\cos x\,P'_m(\cos x) + \sin^2 x\,P''_m(\cos x) = -m^2\cos mx = -m^2 P_m(\cos x)$

Psq cos prend une $\infty^{té}$ valeurs : $-X P'_m(X) + (1-X^2)P''_m(X) = -m^2 P_m(X)$

Avec $X=\cos x$, on a $\sin^2 x = 1-X^2$ et non $1+X^2$...

Si (Γ'_m) est l'équ° du 10-d), alors $\boxed{D}$ est vrai...

Question 12 $Q_m(x) = \sum\limits_{k\le \frac{m}{2}} a_{m,k}\,x^{m-2k} = a_{m,0}x^m + a_{m,1}x^{m-2} + \dots + a_{m,k+1}x^{m-2k-2} + a_{m,k}x^{m-2k} + a_{m,k-1}x^{m-2k+2} + \dots$

$Q'_m(x) = m a_{m,0}x^{m-1} + (m-2)a_{m,1}x^{m-3} + \dots + (m-2k-2)a_{m,k+1}x^{m-2k-3} + (m-2k)a_{m,k}x^{m-2k-1} + (m-2k+2)a_{m,k-1}x^{m-2k+1} + \dots$

$Q''_m(x) = m(m-1)a_{m,0}x^{m-2} + \dots + (m-2k)(m-2k-1)a_{m,k}x^{m-2k-2} + \dots$

coef^t de x^{m-2k} ds $(1-x^2)Q''_m(x) - xQ'_m(x) + m^2 Q_m(x)$:

- $(m-2k+2)(m-2k+1)a_{m,k-1} - (m-2k)(m-2k-1)a_{m,k} - (m-2k)a_{m,k} + m^2 a_{m,k}$ donc $\boxed{A}$ faux

  $(m-2k+2)(m-2k+1)a_{m,k-1} + a_{m,k}\left[m^2 - (m-2k)(m-2k-1+1)\right] = 0$ $\qquad m^2-(m-2k)^2 = -4k^2+4km = 4k(m-k)$

- $a_{m,k} = -\dfrac{1}{4k(m-k)}(m-2k+2)(m-2k+1)a_{m,k-1}$ donc $\boxed{B}$ vrai

- $\boxed{C}$ faux psq les $a_{m,k}$ dépendent du choix de $a_{m,0}$

- $\boxed{D}$ à voir ...
  Par récurrence, peut être : pour $k=0$ $\dfrac{(-1)^{-1}}{2^0}\dfrac{m}{m}C_m^0 a_{m-0} \neq a_{m,0}$ sauf si $a_{m,0}=0$...

$p \wedge q = 1 \quad r = \frac{p}{q} \quad 0 < r < 1/2 \quad \cos(r\pi) \in \mathbb{Q}$

Question 14

- Psq $p \wedge q = 1$, d'après Bachet. Bezout : $\exists (u,v) \in \mathbb{Z}^2 \quad pu + qv = 1$ $\boxed{B}$ vrai
- $\cos\frac{\pi}{3} = \frac{1}{2} \quad p = 1, \; q = 3$ donc $\boxed{A}$ faux
- si $q = 2$, p est néc^t impair et on a $\cos\left(\frac{p}{2}\pi\right) = 0$ donc $\boxed{C}$ et $\boxed{D}$ faux
  $(p = 1)$

Question 15 $\quad q = 4k \quad k \in \mathbb{N}^*$

- $\boxed{A}$ faux psq on peut avoir $q = 3$
- $\boxed{B}$ faux psq ——————— $q = 2$
- $\boxed{C}$
- $\boxed{D}$ $\quad P_k\left(\cos\left(\frac{\pi}{4k}\right)\right) = \cos\left(\frac{\pi}{4}\right) \quad \left(x = \frac{\pi}{4k}\right)$

  $\left(\cos\frac{p\pi}{4k}\right) \in \mathbb{Q}$ donc, psq P_k est à coef^s ds $\mathbb{Z}$ $\quad P_k\left(\cos\frac{p\pi}{4k}\right) = \cos\frac{p\pi}{4} \notin \mathbb{Q}$ avec $p \neq 0$

$\boxed{D}$ peut être vrai... le "car" est mal fichu . et alors $\boxed{C}$ faux

Question 16

- On peut avoir $q = 3$ donc $\boxed{A}$ faux
- $h = q$ impair $\quad P_h\left(\cos\frac{\pi}{h}\right) = \cos\pi = -1$ $\quad \boxed{B}$ vrai
- $\boxed{C}$ faux psq $\quad P_h\left(\cos\frac{\pi}{h}\right) = -1$
- $P_h\left(\cos\frac{\pi}{h}\right) + 1 = 0 \quad a_{h,0} = 2^{h-1}$ donc $\boxed{D}$ vrai

$E = \mathbb{R}[X] \qquad F = \mathbb{R}_3[X] \qquad f : \begin{array}{ccc} E & \longrightarrow & E \\ P & \longmapsto & P(X) - P(X-1) \end{array}$

Question 17

$\dim F = 4$

$f \in \mathcal{L}(E)$

$\forall P \quad d^\circ P \leq 3, \quad d^\circ(f(P)) \leq 3$ donc $f_{|F} \in \mathcal{L}(F)$

A) faux B) vrai

C) faux D) vrai

Question 18

- $\boxed{A}$ faux psq M matrice $(3,3)$ et non $(4,4)$, ainsi que $\boxed{C}$
- $f(1) = 1 - 1 = 0$

  $f(X) = X - (X-1) = 1$

  $f(X^2) = X^2 - (X-1)^2 = 2X - 1$

  $f(X^3) = X^3 - (X-1)^3 = 3X^2 - 3X + 1$

  $\mathcal{B} = (1, X, X, X^2)$

$$M_{\mathcal{B}} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & 2 & -3 \\ 0 & 0 & 0 & 3 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

seul $\boxed{D}$ est vrai

Question 19 H.P pour a] et b]

si $i_0 = i_i$, le rang peut être modifié ... mal posé

A] et B] idiots si $n \neq p$ ....

Question 20

$\boxed{A}$ faux : le "car" n'est pas valable • $\boxed{B}$ faux par la m̂ raison ($\dim F = 4$)

$rg\, M = rg(C_2, C_3, C_4)$ car $C_1 = 0$

$= 3$ car C_2, C_3, C_4 indpts

$\boxed{C}$ faux car $rg\, M = 3$ • $\boxed{D}$ vrai ...

Question 21

• On a bien $\dim \operatorname{Ker} f_F = \dim F - rg f_F$ mais c'est $4 - 3 = 1$ $\boxed{A}$ faux

•] faux (idiot car $\operatorname{Ker} f_F \subset \mathbb{R}_3[X]$: $\operatorname{Ker} f_F$ est l'ens des poly. constants et non des réels)

• $\boxed{C}$ faux psq $\operatorname{Im} f_F$ de dim 3, de base $(f_F(X), f_F(X^2), f_F(X^3))$ soit encore $(1, X, X^2)$

• $\boxed{D}$ vrai

$A_0 = 1$ * A_1 défini par $f(A_1) = 1\, A_0$ et $A_1(0) = 0$

soit $A_1(X) - A_1(X-1) = 1$ et $A_1(0) = 0$

* A_2 tq $A_2(X) - A_2(X-1) = 2\, A_1(X)$ et $A_2(0) = 0$

* A_3 " $A_3(X) - A_3(X-1) = 3\, A_2(X)$ et $A_3(0) = 0$

Question 22

$P = a + bX + cX^2 + dX^3$

$f_F(P) = (b - c + d) + (2c - 3d)X + 3d\, X^2$

• $\boxed{A}$ faux psq $d° A_0 = 0$

• $\boxed{B}$ vrai psq $\forall i \quad A_i(0) = 0$

• A_1 défini par $(b - c + d) + (2c - 3d)X + 3d\, X^2 = 1$ et $a = 0$ soit $d = 0$, $c = 0$, $b = 1$

$A_1(X) = X$

• A_2 —— $= 2X$ et $a = 0$ soit $d = 0$, $2c = 2$, $c = 1$, $b = 1$

$A_2(X) = X + X^2 = X(X+1)$

• A_3 — — $= 3X(X+1)$ et $a = 0$ soit $3d = 3$, $d = 1$, $2c - 3 = 3$, $c = 3$, $b - 2 = 0$, $b = 2$

$A_3(X) = 2X + 3X^2 + X^3 = X(2 + 3X + X^2)$

$= X(X+1)(X+2)$

$\boxed{C}$ vrai , $\boxed{D}$ vrai psq famille de d° ≠ $\mathcal{B}' = (A_0, A_1, A_2, A_3)$

Question 23 Par défⁿ $f_F(A_i) = i\, A_{i-1}$ donc $\underset{\mathcal{B}'}{\operatorname{Mat}} f_F = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 3 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$

$1 \leq i$

$f_F(A_0) = A_0$

$A_0 = 1$

$A_1 = X$

$A_2 = X + X^2$

$A_3 = 2X + 3X^2 + X^3$

donc $P = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 1 & 3 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$ $\boxed{C}$ vrai

---

Question 24 $M' = Mat_{\mathcal{A}} f_F = P^{-1} M P$ $\boxed{D}$ vrai

---

Question 25 $g(X^i) = A_i$ $0 \leq i \leq 3$

Si on ne suppose pas de + que g est linéaire, on ne peut rien dire ...

supposons g linéaire

- g transforme $\mathcal{B}$ en $\mathcal{A}$ donc g bij^{ve} $\boxed{A}$ faux et $\boxed{B}$ vrai
- $G = Mat_{\mathcal{B}}(g)$; par déf^n m̂ $G = P$ $\boxed{D}$ vrai, $\boxed{C}$ faux

---

$I_n = \int_0^{\pi/2} \sin^n x \, dx$ $I_0 = \int_0^{\pi/2} dx = \pi/2$; $I_1 = [-\cos x]_0^{\pi/2} = 1$

$I_n - I_{n-1} = \int_0^{\pi/2} \sin^{n-1} x (\sin x - 1) \, dx \leq 0$ $\left(\forall x \in [0, \pi/2] \quad \sin^{n-1} x (\sin x - 1) \leq 0 \right)$

Question 26 tout est faux...

Question 27 I.P.P $u(x) = \sin^{n-1} x$ $u'(x) = (n-1) \sin^{n-2} x \cdot \cos x$

$v'(x) = \sin x$ $v(x) = -\cos x$

$n \geq 2$ $I_n = 0 + (n-1) \int_0^{\pi/2} \sin^{n-2} x (1 - \sin^2 x) \, dx = (n-1)(I_{n-2} - I_n)$ $\boxed{n I_n = (n-1) I_{n-2}}$

$\boxed{C}$

Qu...on 28 On sait que cela dépend de la parité de n ; si n pair, il y aura π à la fin...

$\boxed{A}$ évid^t faux

$2p I_{2p} = (2p-1) I_{2p-2}$; $I_{2p} = \frac{2p-1}{2p} \cdot \frac{2p-3}{2p-2} \cdots \frac{3}{4} \cdot \frac{1}{2} \cdot \frac{\pi}{2} = \frac{2p}{2p} \cdot \frac{(2p-1)}{2p} \cdot \frac{2p-3}{2p-2} \cdots \frac{3}{4} \cdot \frac{2}{2} \cdot \frac{1}{2} \cdot \frac{\pi}{2}$

$I_{2p} = \frac{(2p)! \, \pi}{(p!)^2 \, 2^{2p+1}}$

$I_{2p+1} = \frac{(p!)^2 \, 2^{2p}}{(2p+1)!}$

$I_{2p+1} = \frac{2p}{2p+1} \cdot \frac{2p-2}{2p-1} \cdots \frac{2}{3} \cdot 1 = \frac{2p}{2p+1} \cdot \frac{2p}{2p} \cdot \frac{2p-2}{2p-1} \cdots \frac{2}{3} \cdot \frac{2}{2} \cdot 1$

donc seul $\boxed{C}$ est vrai

Question 29 $(I_n) \downarrow$ donc tout est faux

Question 30 $\boxed{A}$ et $\boxed{B}$ faux psq $(I_n) \downarrow$

$u = \cos t$ $du = -\sin t \, dt$ $I_n = \int_0^{\pi/2} \sin t \left(\sin^{n-1} t \right) dt = -\int_1^0 \sqrt{1-u^2}^{\,n-1} du = \int_0^1 (1-u^2)^{\frac{n-1}{2}} du$

$I_{2n+1} = \int_0^1 (1-u^2)^n \, du$ $\boxed{C}$ vrai, $\boxed{D}$ c^t faux