

QCM de mathématiques,
Concours ENAC Pilotes,
Année 1995.

Question n°01 :

t est C^1 sur $\mathcal{I}'$ et

$$\forall u \in \mathcal{I}', t'(u) = \frac{1}{2} \left(1 + \frac{1}{u^2} \right).$$

De plus $\lim_{u \rightarrow +\infty} t(u) = +\infty$, donc :

Réponse : a et b.

Question n°02 :

t est C^2 sur $\mathcal{I}'$ et

$$\forall u \in \mathcal{I}', t''(u) = -\frac{1}{u^3} < 0.$$

Donc t est concave. De plus, $t(u) = \frac{1}{2}(u + o(1))$, donc son graphe admet une asymptote oblique d'équation : $y = \frac{x}{2}$ (la courbe est clairement sous son asymptote).

Réponse : b et c.

Question n°03 :

Comme $\lim_0 t = -\infty$, avec la question **01**, t est un homéomorphisme croissant de $\mathcal{I}'$ dans

$\mathbb{R}$. De plus, pour $(t, u) \in \mathbb{R} \times \mathcal{I}' : t(u) = t \iff u^2 - 2tu - 1 = 0 \iff u = t \pm \sqrt{t^2 + 1}$.

Or $u > 0$, donc $t(u) = t \iff u = t + \sqrt{t^2 + 1}$.

Réponse : a et c.

Question n°04 :

Soit $(t, u) \in \mathcal{I} \times]0, 1] : f(t) = u \iff t^2 + 1 = \frac{1}{u^2} \iff t = \sqrt{\frac{1}{u^2} - 1}$ (et c) et d) représentent la même fonction qui n'est pas solution).

Réponse : a et b.

Question n°05 :

$\forall t \in \mathcal{I} \quad f''(t) = \frac{2t^2 - 1}{(1 + t^2)^{\frac{5}{2}}}$. Le point d'inflexion est en $\left(\frac{1}{\sqrt{2}}, \sqrt{\frac{2}{3}} \right)$. La courbe est convexe

pour $t \geq \frac{1}{\sqrt{2}}$ et $y = 0$ est asymptote.

Réponse : c.

Question n°06 :

A a pour coordonnées $(0, 1)$ et B a pour coordonnées $(1, \frac{1}{\sqrt{2}})$, donc D a pour équation

cartésienne $\left(1 - \frac{1}{\sqrt{2}}\right)x + y - 1 = 0$. Ainsi le point d'abscisse t de $\mathcal{F}'$ appartient à D si et

seulement si $f(t) = 1 + \left(\frac{1}{\sqrt{2}} - 1\right)t$. Posons $g(t) = f(t) - 1 + \left(1 - \frac{1}{\sqrt{2}}\right)t$.

$$g'(t) = -\frac{t}{(1 + t^2)^{\frac{3}{2}}} + \left(1 - \frac{1}{\sqrt{2}}\right) \text{ et } g''(t) = \frac{2t^2 - 1}{(1 + t^2)^{\frac{5}{2}}}.$$

Ainsi g' est décroissante sur $\left[0, \frac{1}{\sqrt{2}}\right]$ avec $g'(0) > 0$ et $g'\left(\frac{1}{\sqrt{2}}\right) < 0$, puis est croissante sur $\left[\frac{1}{\sqrt{2}}, 1\right]$ avec $g'(1) = 1 - \frac{3}{2\sqrt{2}} < 0$. Donc il existe un unique $\alpha \in \left]0, \frac{1}{\sqrt{2}}\right[$ tel que :

$$\forall t \in [0, \alpha[\quad g'(t) > 0 \text{ et } \forall t \in]\alpha, 1] \quad g'(t) < 0.$$

Donc g est strictement croissante sur $[0, \alpha]$ avec $g(0) = 0$ puis strictement décroissante sur $[\alpha, 1]$ avec $g(1) = 0$. Ainsi $\forall t \in]0, 1[\quad g(t) > 0$. Donc D et $\mathcal{F}'$ n'ont en commun que les points A et B . De plus $g'(1) \neq 0$ et $g'\left(\frac{1}{\sqrt{2}}\right) \neq 0$, donc c et d sont fausses.

Réponse : b.

Question n°07 :

G est continuellement dérivable et $G' = g$. Même si l'on suppose que g est monotone, elle peut changer de signe (prendre par exemple $g(x) = x - 1$) donc c et d sont fausses.

Réponse : b.

Question n°08 :

t n'est pas définie sur $\mathcal{I}$ donc a et b sont fausses. Cependant pour $x \in \mathcal{I}'$ t est une application C^1 de $[1, t^{-1}(x)]$ dans $[0, x]$ et le changement de variable est donc possible. $dt = \frac{1}{2} \left(1 + \frac{1}{u^2}\right) du$. Un calcul simple montre alors que d est vraie.

Réponse : d.

Question n°09 :

Ce changement de variable donne donc :

$$F(x) = \int_1^{x+\sqrt{1+x^2}} \frac{du}{u} = h(x) = -\ln(-x + \sqrt{1+x^2}) = \operatorname{argsh}(x).$$

Réponse : c.

Question n°10 :

Pour $x > 0$ $v(x) = x \left(1 + \sqrt{1 + \frac{1}{x^2}}\right) = x \left(1 + \left(1 + \frac{1}{2x^2} - \frac{1}{8x^4} + o\left(\frac{1}{x^4}\right)\right)\right)$ donc :

$$v(x) = 2x + \frac{1}{2x} - \frac{1}{8x^3} + o\left(\frac{1}{x^3}\right).$$

Réponse : a et d.

Question n°11 :

Au voisinage de $+\infty$, $h(x) = \ln(2x(1 + o(1))) = \ln 2 + \ln x + o(1)$, donc $\mathcal{H}$ admet la courbe asymptote d'équation $y = \ln x + \ln 2$.

De plus au voisinage de $-\infty$, $v(x) = -\frac{1}{2x} + o\left(\frac{1}{x}\right)$, donc $h(x) = -\ln(-x) - \ln(2) + o(1)$.

Réponse : e.

Question n°12 :

Réponse : b et c.

Question n°13 :

Réponse : a et c.

Question n°14 :

$\vec{u} \in \text{Im}(\varphi)$ si et seulement si le système $A\vec{v} = \vec{u}$ admet des solutions, or ce système est équivalent à celui de matrice S' , donc a est vraie.

$\vec{u} \in \text{Ker}(\varphi)$ si et seulement si $\vec{u}$ vérifie $A\vec{u} = 0$ qui est équivalent au système du d) d'après la question précédente.

Réponse : a et d.

Question n°15 :

$$\vec{u} \in \text{Im}(\varphi) \cap \text{Ker}(\varphi) \iff \begin{cases} 2x & -3y & -z & & = 0 \\ x & -y & & +t & = 0 \\ 7x & -13y & -7z & +t & = 0 \\ & 2y & & +2t & = 0 \end{cases}.$$

Effectuons sur le déterminant D de ce système l'opération $C_2 \leftarrow C_2 - C_4$ puis développons selon la dernière ligne. On obtient :

$$D = 2 \begin{vmatrix} 2 & -3 & -1 \\ 1 & -2 & 0 \\ 7 & -14 & -7 \end{vmatrix}.$$

On effectue ensuite $L_3 \leftarrow L_3 - 7L_1$, puis on développe selon la première colonne. On obtient :

$$D = -2 \begin{vmatrix} 1 & -2 \\ -7 & 7 \end{vmatrix} = 14 \neq 0.$$

Donc $\text{Im}(\varphi) \cap \text{Ker}(\varphi) = \{0\}$ d'où d) puis b).

Réponse : b et d.

Question n°16 :

0 est une valeur propre si et seulement si $\dim(\text{Ker}\psi) > 0$. Ainsi a est fausse. b est faux d'après le cours. Si $\psi(x) = 0$ alors $\psi^2(x) = 0$, donc c est vraie. Cependant d est fausse : $\psi = 0$ en est un contreexemple.

Réponse : c.

Question n°17 :

Réponse : a et c.

Question n°18 :

Réponse : b et c.

Question n°19 :

On vérifie que $A(A - I)(A + 2I) = 0$ (c'est en fait connu car A est diagonalisable). Donc $A^3 = -A^2 + 2A$ et on en déduit c par récurrence.

Réponse : b et c.

Question n°20 :

b est vrai d'après le cours. Le quotient de la division euclidienne d'un polynôme à coefficients entiers par un polynôme unitaire est un polynôme à coefficients entiers. Ainsi Q , et donc R , sont à coefficients entiers.

Dans l'égalité $X^n = X(X - 1)(X + 2)Q + R$, on substitue X par 0, puis 1 et -2. On obtient ainsi le système suivant :

$$\begin{cases} \gamma &= 0 \\ \alpha + \beta + \gamma &= 1 \\ 4\alpha - 2\beta + \gamma &= (-2)^n \end{cases}.$$

Réponse : b et c.

Question n°21 :

Le système de la question précédente donne :

$$\alpha = \frac{1 - (-2)^{n-1}}{3} \text{ et } \beta = \frac{2 + (-2)^{n-1}}{3}.$$

On en déduit que $2\alpha - \beta = -(-2)^{n-1}$.

Réponse : b.

Question n°22 :

ζ est une bijection strictement croissante et C^∞ de $\mathcal{U}$ dans $[2\ln(3), +\infty[$.

Réponse : a.

Question n°23 :

$\forall x \in \mathcal{U} \quad \zeta'(x) = \frac{2}{1+x} \leq \frac{2}{3}$, ainsi a est vraie et b est fausse.

$u_1 = 2\ln(3) > 2 = u_0$: ζ étant strictement croissante, on en déduit que (u_n) est une suite définie et strictement croissante.

Réponse : a et d.

Question n°24 :

Si l'on avait $\zeta(x) = x + 1$, (u_n) serait divergente alors que ζ' est bornée, donc a est fausse.

Si l'on avait $\zeta(x) = \frac{x}{2}$, (u_n) serait convergente alors que ζ n'est pas bornée, donc b est fausse.

On vérifie que $2,449 < u_4 < 2,450$ mais que $u_5 > 2,476$.

Réponse : c.

Question n°25 :

$$(1) \iff 2\ln\left(\frac{x}{x-1}\right) - \frac{1}{x-1} = 0 \iff -2\ln\left(1 - \frac{1}{x}\right) - \frac{1}{x-1} = 0.$$

Posons $u(x) = 2\ln\left(1 - \frac{1}{x}\right) + \frac{1}{x-1}$.

Remarquons que $u(x) = \frac{1}{x-1} (2(x-1)\ln(x-1) - 2(x-1)\ln x + 1)$, donc $\lim_{x \rightarrow 1} u(x) = +\infty$.

u est C^∞ sur $\mathcal{I}$ et $u'(x) = \frac{x-2}{x(x-1)^2}$. Donc u est strictement décroissante sur $]1, 2]$ avec $\lim_{x \rightarrow 1} u(x) = +\infty$ et $u(1.5) < 0$. Donc il existe un unique $l \in]1, 1.5]$ tel que $u(l)=0$ mais l'équation $u(x) = 0$ n'admet aucune solution entre 1.5 et 2.

Réponse : a.

Remarque : Soit $X \in \mathcal{U}$, $x = \frac{1}{X} + 1 \in]1, 1.5]$, donc $(1) \iff X = \frac{1}{t-1}$. ζ est croissante et $u_0 < \frac{1}{t-1}$: On en déduit par récurrence que (u_n) est majorée par $\frac{1}{t-1}$. Comme elle est strictement croissante elle converge dans $\mathbb{R}$ et sa limite est un point fixe, donc u_n converge vers $\frac{1}{t-1}$. La question 23 montrait la contractance de ζ et donc la convergence de u_n .

Question n°26 :

Réponse : b et c.

Question n°27 :

D'après l'étude de u effectuée à la question 25, a est vraie. On en déduit que f' admet un unique zéro sur $\mathcal{I}$.

Réponse : a.

Question n°28 :

$$f(x) = x^2 \left(-\frac{1}{x} - \frac{1}{2x^2} - \frac{1}{3x^3} + o\left(\frac{1}{x^3}\right) \right) = -x - \frac{1}{2} - \frac{1}{3x} + o\left(\frac{1}{x}\right).$$

Réponse : a.

Question n°29 :

b est vraie d'après la question 27. De plus $\mathcal{F}$ admet exactement deux asymptotes, d'équation : $x = 1$ et $y = -x - \frac{1}{2}$.

Réponse : b et c.

Question n°30 :

Pour a comme pour b, l'asymptote oblique n'est pas correctement positionnée.

Au voisinage de $+\infty$, $f(x) + x \sim -\frac{1}{2}$, ce qui prouve d. Remarquons cependant que l'inégalité de convexité classique $\forall u \in]-1, +\infty[\setminus \{0\}, \ln(1+u) < u$ montre que $\forall x \in \mathcal{I}$

$$f(x) < x^2 \cdot \frac{-1}{x} = -x.$$

Réponse : d.

Question n°31 :

Soit $x > 0$: $\sqrt{x} > 0$ donc $\varphi(\sqrt{x}) > 0$.

Réponse : a.

Question n°32 :

D'après la remarque de la question 30 (*stricto sensu* $a \implies c$), on a :

Réponse : a et c.

Question n°33 :

$x > 1$ donc l'intégrale est bien définie. $J(2) = 0$ donc c et d sont fausses. Une primitive de $e^{-\sqrt{t}}$ est $-2(1 + \sqrt{t})e^{-\sqrt{t}}$.

Réponse : a.

Question n°34 :

a est vraie et b est en contradiction avec la question **32**. D'après cette dernière, pour $x \geq 2$, $I(x) \leq J(x)$. Ainsi d) est vraie. C'est suffisant puisqu'il y a au plus deux réponses exactes.

Réponse : a et d.

Remarque : Supposons que c est vraie. Alors pour $x \geq 2$, $I(x) = J(x)$. Par dérivation on obtient : $\forall x \geq 2 \ e^{x \ln(1 - \frac{1}{\sqrt{x}})} = e^{-\sqrt{x}}$, ce qui est faux. Ainsi c) est fausse.

Question n°35 :

$$\left(1 - \frac{1}{\sqrt{n}}\right)^n = e^{n\left(-\frac{1}{\sqrt{n}} - \frac{1}{2n} + o\left(\frac{1}{n}\right)\right)} = e^{-\sqrt{n} - \frac{1}{2} + o(1)}.$$

Réponse : b et d.

Question n°36 :

Comme $A = B^2$, B commute avec A .

Réponse : a et c.

Question n°37 :

Il est facile de construire des contre-exemples pour a) et b).

Réponse : c.

Question n°38 :

Les matrices étant triangulaires inférieures, leurs valeurs propres sont les éléments de leur diagonale. Elles sont toutes simples, donc A et B sont diagonalisables.

Réponse : b et c.

Question n°39 :

P est inversible et

$$P^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -\frac{2}{3} & 1 & 0 \\ 0 & 2 & 1 \end{pmatrix}.$$

On vérifie ensuite que seule c est vraie.

Réponse : c.

Question n°40 :

On a :

$$D_1 = \begin{pmatrix} 4 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \quad D_2 = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Réponse : a et c.

Remarques :

- De façon générale, une calculatrice performante favorise beaucoup le candidat,
- il y a des questions "piège", (résultat d'un long calcul correct à un signe près, à un inverse près ...),
- Certaines sont mal posées (8),
- on ne termine pas l'étude de la suite u_n ,
- les questions sur la diagonalisation sont à l'extrême limite du programme de Sup.