Corrigé ENAC 2007

2H30

PARTIE I

① Réponses exactes : b) et c)

② • En additionnant les 3 égalités, on trouve : $3x+(y+z)(1+j+j^2)=a+b+c \rightarrow$ d) fausse.
• En multipliant la 2ᵉ ligne par j^2 et la 3ᵉ par j puis en additionnant, on trouve :

$$3y+(y+z)(1+j+j^2)=a+bj^2+cj$$

Réponse exacte : a)

③ Puisque $1+j+j^2=0$, ce qui précède donne $x=\frac{a+b+c}{3}$ et $y=\frac{a+bj^2+cj}{3}$. En mult. la 2ᵉ ligne par j et la 3ᵉ par j^2 et en additionnant, on trouve $3z=a+bj+cj^2$ soit $z=\frac{a+bj+cj^2}{3}$

Réponse exacte : c)

④ $x,y,z\in\mathbb{R}$ ssi $a+b+c$, $a+bj^2+cj$ et $a+bj+cj^2$ app. à $\mathbb{R}$.
Cela implique $a=x+y+z\in\mathbb{R}$, d'où $b+c$, $bj+cj^2$, $bj^2+cj\in\mathbb{R}$
Alors, en posant $b=b_1+ib_2$ $(b_1,b_2\in\mathbb{R})$ et $c=c_1+ic_2$ $(c_1,c_2\in\mathbb{R})$

$b+c\in\mathbb{R} \Leftrightarrow b_2+c_2=0$

$bj+cj^2=(b_1+ib_2)\left(\frac{-1+i\sqrt3}{2}\right)+(c_1+ic_2)\left(\frac{-1-i\sqrt3}{2}\right)\in\mathbb{R} \Leftrightarrow -b_2+\sqrt3 b_1-c_2-\sqrt3c_1=0$

ce qui donne : $b_2=-c_2$ et $b_1=c_1$ soit $c=\bar b$

Il est facile de vérifier que, récipᵗ, si a est réel et $\bar b=c$, alors x,y,z sont réels.

La C.N.S. est donc : $a\in\mathbb{R}$ et $\bar b=c$

Ainsi, d) serait "presque" juste, s'il n'y avait l'affirmation farfelue j^2 et $-j$ conjugués !!

Aucune réponse exacte

PARTIE II

⑤ $u_n+iv_n=\int_0^\pi e^{(\alpha+in)x}dx=\frac{1}{\alpha+in}\left[e^{(\alpha+in)x}\right]_0^\pi=\frac{(-1)^ne^{\alpha\pi}-1}{\alpha+in}$ (car $e^{in\pi}=(-1)^n$)

d'où $u_n=\mathrm{Re}(u_n+iv_n)=\frac{\alpha}{\alpha^2+n^2}\left((-1)^ne^{a\pi}-1\right)$

Réponse exacte : c)

⑥ Le calcul ci-dessus donne : $v_n=\mathrm{Im}(u_n+iv_n)=\frac{-n}{\alpha^2+n^2}\left((-1)^ne^{a\pi}-1\right)$

Réponses exactes : b) et d)

⑦ $|u_n|=\left|\frac{\left((-1)^ne^{a\pi}-1\right)\alpha}{\alpha^2+n^2}\right|\le\frac{(e^{a\pi}+1)|\alpha|}{\alpha^2+n^2}$ (avec égalité pour n impair)

et $|v_n|\le\frac{n}{a^2+n^2}\left(e^{a\pi}+1\right)$ (avec égalité pour n impair). Donc :

Aucune réponse exacte.

⑧ $v_{2k}=\frac{2k}{a^2+4k^2}\left(1-e^{a\pi}\right)\underset{k\to\infty}{\sim}\frac{1-e^{a\pi}}{2k}$

Réponse exacte : c)

⑨ a) Une suite peut très bien ne pas être de signe constant et converger !! (ex : $\frac{(-1)^n}{n}$)
b) Il existe des suites majorées non convergentes !! (ex : $-n$)

- $|u_n| \leq \frac{|a|(e^{a\pi}+1)}{a^2+n^2}$ donc $\lim_{n\to\infty} u_n = 0$

Réponse exacte : c)

30mn

PARTIE III

(10) $\varphi_1(u) = \frac{1}{x^2\cos^2 u + \sin^2 u}$ avec $u \in [0,\pi/2]$ est défini et continu sur I pour tout x réel non nul

Réponses exactes : c)

(11) $\varphi_2(u) = \frac{\sin u}{x^2\cos^2 u+\sin^2 u}$ est dérivable sur I pour tout x non nul.

Si, de plus, $u \in]0,\frac{\pi}{2}]$, alors, pour $x=0$, $\varphi_2(u) = \frac{1}{\sin u}$ et, dans tous les cas, φ_2 est bien dérivable sur $]0,\frac{\pi}{2}]$; et on a : $\forall u \in]0,\frac{\pi}{2}]$, $\varphi_2'(u) = \frac{\cos u\,(x^2\cos^2 u+\sin^2 u) - \sin u\,(-2x^2\sin u\cos u + 2\sin u\cos u)}{(\text{—})^2}$

$$\varphi_2'(u) = \frac{x^2\cos^3 u + (2x^2-1)\sin u\cos u}{(\text{—})^2}$$

Réponses exactes : a) et c)

(12) Réponses exactes : c) et d)

(13) $F(X) = \int_0^X \frac{dt}{1+t^2} = \operatorname{Arctan} X$ donc : réponses exactes : b) et c)

(14) - $t = \frac{\tan u}{x} \in [0,+\infty[$ et $u = \operatorname{Arctan}(xt) \Rightarrow du = \frac{x\,dt}{1+x^2t^2}$ et $\cos^2 u = \frac{1}{1+\tan^2 u} = \frac{1}{1+x^2t^2}$, $\sin^2 u = 1-\cos^2 u = \frac{x^2t^2}{1+x^2t^2}$

d'où $J(x) = \int_0^{\pi/2} \frac{1}{x^2\cos^2 u+\sin^2 u}\,du = \int_0^{+\infty} \frac{dt}{\frac{x^2}{1+x^2t^2}+\frac{x^2t^2}{1+x^2t^2}} \times \frac{x}{1+x^2t^2} = \frac{1}{x}\int_0^{+\infty}\frac{dt}{1+t^2} = \frac{\pi}{2x}$

↳ a) b) fausses

excusez-moi pour ces ratures, j'avais mal lu l'énoncé !!

~~et $K(x) = \int_0^{\pi/2} \frac{\sin^2 u\,du}{x^2\cos^2 u+\sin^2 u} = \int_0^{+\infty} \frac{\frac{x^2t^2}{1+x^2t^2}}{\frac{x^2+x^2t^2}{1+x^2t^2}} \times \frac{x\,dt}{1+x^2t^2}$~~

- si $v = \cos u$, $dv = -\sin u\,du$

$$K(x) = \int_0^{\pi/2} \frac{\sin u\,du}{x^2\cos^2 u+\sin^2 u} = -\int_1^0 \frac{dv}{x^2v^2+1-v^2} = \int_0^1 \frac{dv}{1-(1-x^2)v^2}$$

$$= \frac{1}{2}\int_0^1 \left(\frac{1}{1-\sqrt{1-x^2}\,v} + \frac{1}{1+\sqrt{1-x^2}\,v}\right)dv \qquad (1-x^2>0)$$

$$= \frac{1}{2} \times \frac{1}{\sqrt{1-x^2}} \Big[-\ln(1-\sqrt{1-x^2}\,v) + \ln(1+\sqrt{1-x^2}\,v)\Big]_0^1$$

$$= \frac{1}{2\sqrt{1-x^2}} \ln \frac{1+\sqrt{1-x^2}}{1-\sqrt{1-x^2}}$$

Réponses exactes : c) et d)

(15) Qd $x \to 0$, ~~$\ln(1+\sqrt{1-x^2}) \to \ln 2$~~ et $(1-\sqrt{1-x^2}) \sim \frac{x^2}{2}$ d'où

et $1+\sqrt{1-x^2} \to 2$ d'où $\frac{1+\sqrt{1-x^2}}{1-\sqrt{1-x^2}} \sim \frac{4}{x^2}$ et $\ln(\sim) \sim \ln\frac{4}{x^2} \sim -2\ln x$

Puisque $\frac{1}{2\sqrt{1-x^2}} \to \frac{1}{2}$, $K(x) \sim -\ln x$

Réponse exacte : b)

(16) $f(x) = x\int_0^{\pi/2} \frac{u}{x^2\cos^2 u+\sin^2 u}\,du$

- On remarque que f est bien défini pour $x>0$
- $f(1) = \int_0^{\pi/2} u\,du = \frac{\pi^2}{8}$
- $f\left(\frac{1}{x}\right) = \frac{1}{x}\int_0^{\pi/2} \frac{u\,du}{\frac{1}{x^2}\cos^2 u+\sin^2 u} = x\int_0^{\pi/2}\frac{u\,du}{\cos^2 u + x^2\sin^2 u}$. En posant $v=\pi/2-x$, on trouve

$$f(1/x) = x\int_0^{\pi/2}\frac{(\pi/2-v)\,dv}{x^2\cos^2 v+\sin^2 v} = \frac{\pi x}{2}\int_0^{\pi/2}\frac{dv}{x^2\cos^2 v+\sin^2 v} - f(x)$$

Or j'ai fait le calcul en 14. : $\int_0^{\pi/2}\frac{dv}{x^2\cos^2 v+\sin^2 v} = \frac{\pi}{2x}$

donc $f(x)+f(1/x) = \pi^2/4$. <u>Réponse exacte : d)</u>

---

(17) $h(u) = u - \frac{\pi}{2}\sin u$

h est évidemment de classe C^∞ sur $\mathbb{R}$.

$\forall u\in\mathbb{R}$, $h'(u) = 1-\frac{\pi}{2}\cos u$ donc le T.V de h sur $[0,\frac{\pi}{2}]$ est :

u	0		$\operatorname{Arccos}\frac{2}{\pi}$		$\pi/2$
h'		$-$	0	$+$	
h	0	$\searrow$		$\nearrow$	0

Je pense qu'on peut considérer d) exacte (??) (mais il manque l'argument $h(0)=h(\pi/2)=0$ ...)

<u>Réponse(s) exacte(s) : a) et d)?</u>

---

(18) h est négative sur $[0,\pi/2]$, on a : $\forall u\in[0,\frac{\pi}{2}]$, $u\le\frac{\pi}{2}\sin u$

$$\text{d'où } f(x) = x\int_0^{\pi/2}\frac{u}{x^2\cos^2 u+\sin^2 u}\,du \le \frac{x\pi}{2}\int_0^{\pi/2}\frac{\sin u}{x^2\cos^2 u+\sin^2 u}\,du = \frac{x\pi}{2}K(x)$$

$$\text{d'où } 0\le f(x)\le\frac{\pi x}{2}K(x)$$

$\lim_{x\to 0} xK(x) = 0$ car $K(x)\underset{0}{\sim} -\ln(x)$ (l'argument de c) est donc faux) ...

<u>Réponse exacte : b)</u>

---

(19) $f(x) = \pi^2/4 - f(1/x)$; qd $x\to+\infty$, $\frac{1}{x}\to 0^+$ et $f(\frac{1}{x})\to 0$ donc $\lim_{x\to+\infty} f(x) = \pi^2/4$

<u>Réponse exacte : c)</u>

---

(20) a) b)

$$\frac{1}{P+Q}-\frac{1}{P}+\frac{Q}{P^2} = \frac{1}{(x+k)\cos^2 u+\sin^2 u} - \frac{1}{x\cos^2 u+\sin^2 u} + \frac{k\cos^2 u}{(x\cos^2 u+\sin^2 u)^2}$$

$$= \frac{(x\cos^2 u+\sin^2 u)^2 - [(x+k)\cos^2 u+\sin^2 u][x\cos^2 u+\sin^2 u] + k\cos^2 u\,[(x+k)\cos^2 u+\sin^2 u]}{P^2(P+Q)}$$

inutile

$$= \frac{P^2 - P(P+Q) + Q(P+Q)}{P^2(P+Q)} = \frac{Q^2}{P^2(P+Q)} \quad \hookrightarrow \text{réponse a)}$$

$$\bullet\ \left|\frac{g(x+k)-g(x)}{k} + \int_0^{\pi/2}\frac{u\cos^2 u}{(x\cos^2 u+\sin^2 u)^2}\,du\right| = \left|\frac{1}{k}\left(\int_0^{\pi/2}\frac{u}{P+Q}\,du - \int_0^{\pi/2}\frac{u}{P}\,du\right) + \frac{1}{k}\int_0^{\pi/2}\frac{uQ}{P^2}\,du\right|$$

$$= \left|\frac{1}{k}\int_0^{\pi/2}\frac{uQ^2}{P^2(P+Q)}\,du\right| = \left|k\int_0^{\pi/2}\frac{u\cos^4 u}{P^2(P+Q)}\,du\right|$$

$$\le |k|\int_0^{\pi/2}\frac{u\cos^4 u}{P^2|P+Q|}\,du = |k|\int_0^{\pi/2}\frac{u\cos^4 u}{(x\cos^2 u+\sin^2 u)^2\,|(x+k)\cos^2 u+\sin^2 u|}$$

Puisque $x>0$, $(x\cos^2 u+\sin^2 u)^2 > (\frac{x}{2}\cos^2 u+\sin^2 u)^2$ et $(x+k)\cos^2 u+\sin^2 u > \frac{x}{2}\cos^2 u+\sin^2 u$ (car $k>-\frac{x}{2}$)

on a : $$\left|\ \sim\ \right| \le |k|\int_0^{\pi/2}\frac{u\cos^4 u}{(\frac{x}{2}\cos^2 u+\sin^2 u)^3}\,du$$

donc c) est fausse ! (exposant 3 au déno. et non 2) 4

On peut alors en déduire que l'expression entre les valeurs absolues tend vers 0 qd $h \to 0$, i.e. que g est dérivable sur $\mathbb{R}_+^*$ et :

$$g'(a) = -\int_0^{\pi/2} \frac{u\cos^2 u}{(a\cos^2 u + \sin^2 u)^2}\, du \quad !$$

Réponse exacte : a)

---

(21) $f(\sqrt{x}) = \sqrt{x} \int_0^{\pi/2} \frac{u}{x\cos^2 u + \sin^2 u} du$ (p. $x>0$) d'où $g(x) = \frac{f(\sqrt{x})}{\sqrt{x}}$ soit $f(a) = a\, g(a^2)$

g étant dérivable sur $]0,+\infty[$ (question préc.), f l'est aussi et : $f'(a) = g(a^2) + 2a^2 g'(a^2)$

$$f'(a) = \int_0^{\pi/2} \frac{u\,du}{a^2\cos^2 u + \sin^2 u} - 2a^2 \int_0^{\pi/2} \frac{u\cos^2 u}{(a^2\cos^2 u + \sin^2 u)^2} du$$

$$= \int_0^{\pi/2} \frac{u(a^2\cos^2 u + \sin^2 u) - 2a^2 u \cos^2 u}{(\quad)^2} du$$

$$= \int_0^{\pi/2} \frac{u(-a^2\cos^2 u + \sin^2 u)}{(\quad)^2} du$$

Réponse exacte : b)

[14]

---

(22) PARTIE IV

Réponse exacte : b) (E n'est pas stable pour la multiplication !)

---

(23) (Le "e^x" de l'énoncé est curieux... ne serait-ce pas $\operatorname{sh} x$??) Mais bon, faisons avec !!

$(\lambda_1 + \lambda_2 x + \lambda_3 x^2)\operatorname{ch} x \underset{x\to\infty}{\sim} \lambda_3 x^2 \frac{e^x}{2}$ (si $\lambda_3 \neq 0$) et $(\mu_1 + \mu_2 x + \mu_3 x^2) e^x \underset{+\infty}{\sim} \mu_3 x^2 e^x$ si $\mu_3 \neq 0$

donc $f(x) e^{-x} \sim \mu_3 x^2$ si $\mu_3 \neq 0$

Même sorte de calculs en $-\infty$. Finalement : Aucune réponse juste (erreur d'énoncé probable !! remplacer e^x par $\operatorname{sh} x$ ...)

---

(24) Réponse exacte : c) (facilement)

---

(25) Réponse exacte : c) (facilement)

---

(26) $D(f_1) = f_1' = f_2$; $D(f_2) = f_2' = f_1$

$D(f_3)(x) = \operatorname{ch} x + x\operatorname{sh} x \to D(f_3) = f_1 + f_4$

$D(f_4)(x) = \operatorname{sh} x + x\operatorname{ch} x \to D(f_4) = f_2 + f_3$

$D(f_5)(x) = 2x\operatorname{ch} x + x^2\operatorname{sh} x \to D(f_5) = 2f_3 + f_6$

$D(f_6)(x) = 2x\operatorname{sh} x + x^2\operatorname{ch} x \to D(f_6) = 2f_4 + f_5$

La matrice de D ds la base $(f_1, \dots f_6)$ est donc :

$$\begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

Aucune réponse exacte

---

(27) Il est facile de voir que les colonnes de cette matrice sont linᵗ indépendantes, donc elle est inversible et D est donc un automorphisme de E

Réponses exactes : a) et c)

(28) On calcule la matrice de D^2 :

$$M(D^2) = \begin{pmatrix} 0&1&1&0&0&0\\ 1&0&0&1&0&0\\ 0&0&0&1&2&0\\ 0&0&1&0&0&2\\ 0&0&0&0&0&1\\ 0&0&0&0&1&0 \end{pmatrix}^2 = \begin{pmatrix} 1&0&0&2&2&0\\ 0&1&2&0&0&2\\ 0&0&1&0&0&4\\ 0&0&0&1&4&0\\ 0&0&0&0&1&0\\ 0&0&0&0&0&1 \end{pmatrix}$$

donc $M(D^2-\mathrm{Id}) = \begin{pmatrix} 0&0&0&2&2&0\\ &0&2&0&0&2\\ &&0&0&0&4\\ &&&0&4&0\\ &0&&&0&0\\ &&&&&0 \end{pmatrix}$

Donc l'image de $D^2-\mathrm{Id}$ est : $\mathrm{Vect}(2f_2, 2f_1, 2f_1+4f_4, 2f_2+f_3) = \mathrm{Vect}(f_1,f_2,f_3,f_4)$

donc $\mathrm{Im}(D^2-\mathrm{Id})^2 = \mathrm{Vect}((D^2-\mathrm{Id})(f_1), \dots, (D^2-\mathrm{Id})(f_4)) = \mathrm{Vect}(2f_2, 2f_1) = \mathrm{Vect}(f_1,f_2)$

puis $\mathrm{Im}(D^2-\mathrm{Id})^3 = \mathrm{Vect}((D^2-\mathrm{Id})(f_1), (D^2-\mathrm{Id})(f_2)) = \{0\}$

Réponses exactes : a) et d)

---

(29) A l'aide de la matrice, on voit tout de suite que $\mathrm{Ker}(D^2-\mathrm{Id})^2 = \mathrm{Vect}(f_1,f_2)$ d'où :

Réponses exactes : b) et d)

---

(30) D'après le th. du rang, $\mathrm{Ker}(D^2-\mathrm{Id})^2$ est de dimension $6 - \dim \mathrm{Im}(D^2-\mathrm{Id})^2 = 4$

On remarque que $(D^2-\mathrm{Id})(f_3) = 2f_2 \in \mathrm{Ker}(D^2-\mathrm{Id})$

et $(D^2-\mathrm{Id})(f_4) = 2f_1 \in \mathrm{Ker}(D^2-\mathrm{Id})$

Donc $(D^2-\mathrm{Id})^2(f_i) = 0$ pour $1 \leq i \leq 4$ et $\mathrm{Ker}(D^2-\mathrm{Id})^2 = \mathrm{Vect}\{f_1,f_2,f_3,f_4\}$

Réponse exacte : d)

---

(31) $(D^2-\mathrm{Id})^3 = 0$ donc $\mathrm{Ker}(D^2-\mathrm{Id})^3 = E$! Aucune réponse exacte

---

(32) $(D^2-\mathrm{Id})^3 = D^6 - 3D^4 + 3D^2 - \mathrm{Id}$ donc $(D^2-\mathrm{Id})^3(f) = f^{(6)} - 3f^{(4)} + 3f'' - f$

Réponses exactes : a) et e)

PARTIE V Et encore les polynômes de Tchebychev !!

(33) • $\cos n\theta = \mathrm{Re}(e^{in\theta}) = \mathrm{Re}(\cos\theta + i\sin\theta)^n = \mathrm{Re}\left(\sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} \cos^{n-k}\theta\, (i\sin\theta)^k\right)$

$$= \sum_{\substack{k=0\\ k \text{ pair}}}^{n} \sim = \sum_{0 \leq 2k \leq n} \binom{n}{2k} \cos^{n-2k}\theta\, (i\sin\theta)^{2k}$$

$$= \sum_{0 \leq 2k \leq n} \binom{n}{2k} \cos^{n-2k}\theta\, (-1)^k (1-\cos^2\theta)^k$$

soit $P_n(X) = \sum_{0 \leq 2k \leq n} \binom{n}{2k} (-1)^k X^{n-2k} (1-X^2)^k$ ↳ réponse d)

• $\cos(n+1)\theta + \cos(n-1)\theta = 2\cos n\theta \cos\theta$ donc $P_{n+1}(X) + P_{n-1}(X) = 2XP_n(X)$

Réponse exacte : d)

---

(34) $P_0 = 1$, $P_1 = X$, $P_2 = 2X^2 - 1$, $P_3 = 4X^3 - 3X$ .. donc a) b) fausses

(cependant, la relation de récurrence ci-dessus permet de montrer facilement que P_n est de la parité de n)

- $T_{2n}(0) = T_{2n}(\cos\frac{\pi}{2}) = \cos 2n\frac{\pi}{2} = \cos n\pi = (-1)^n$
- En dérivant la relation : $\cos n\theta = T_n(\cos\theta)$, on a : $-n\sin n\theta = -\sin\theta \, T_n'(\cos\theta)$

  d'où pour $\theta = \frac{\pi}{2}$: $n \sin n\frac{\pi}{2} = T_n'(0)$ et $T'_{2n-1}(0) = (2n-1)\sin(2n-1)\frac{\pi}{2} = (-1)^{n+1}(2n-1)$!

  (en fait, $(-1)^n(2n+1) = T'_{2n+1}(0)$ ...)

- $T_n(-1) = T_n(\cos\pi) = \cos n\pi = (-1)^n$

  ~~et ...~~ $T_1 = X$, $T_1' = 1$ donc d) est fausse !

  <u>Aucune réponse exacte</u>

---

(35) La rel. de récurrence : $T_{n+1} = 2XT_n - T_{n-1}$ permet de montrer par récurrence que, pour $n \geq 1$, T_n est un poly de d° n, de coeff. dominant $2^{n-1}X^n$

<u>Réponse exacte : b)</u>

---

(36) ~~$T_3 = 4X^3-3X$~~ $T_2 = 2X^2-1$ $(\cos 2\theta = 2\cos^2\theta - 1)$

$T_3 = 4X^3-3X$ $(\cos 3\theta = 4\cos^3\theta - 3\cos\theta)$

d'où $T_4 = 2XT_3 - T_2 = 8X^4 - 8X^2 + 1$

<u>Aucune réponse exacte</u>.

C'est déjà fini !