ENAC P 2001

Questions liées : 1 à 10

11 à 19

20 à 32

- I -

On considère 3 réels u_o, v_o, w_o vérifiant $u_o > v_o > w_o > 0$ et les suites $(u_n), (v_n), (w_n)$ définies par u_o, v_o, w_o et $\forall n \in \mathbb{N}$

$$\begin{aligned} 3u_{n+1} &= u_n + v_n + w_n \\ 3\ln v_{n+1} &= \ln u_n + \ln v_n + \ln w_n \\ \frac{3}{w_{n+1}} &= \frac{1}{u_n} + \frac{1}{v_n} + \frac{1}{w_n} \end{aligned}$$

1. Soit f la fonction de la variable réelle définie par $f(x) = (x+b+c)^3 - 27xbc$ où b et c sont des réels strictement positifs tels que $b \neq c$. On note f' la dérivée de f si elle existe :

   a) f' est positive sur $[-(b+c) - 3\sqrt{bc}, -(b+c) + 3\sqrt{bc}]$

   b) f' est négative sur $[b+c-3\sqrt{bc}, b+c+3\sqrt{bc}]$

   c) f est maximum en $b+c-3\sqrt{bc}$

   d) f est minimum en $-(b+c)+3\sqrt{bc}$

2. Dans le cas où $-(b+c)+3\sqrt{bc} < 0$, le minimum de la fonction f sur $\mathbb{R}_+$ est :

   a) $27bc(\sqrt{b}-\sqrt{c})^2$

   b) $(b+c)^3$

   Dans le cas où $-(b+c)-3\sqrt{bc} \geq 0$, le minimum de la fonction f sur $\mathbb{R}_+$ est :

   c) 0

   d) $27[(b+c)+\sqrt{bc}(3-bc)]$

3. La fonction f

   a) n'admet pas de minimum sur $\mathbb{R}_+$

   b) a un minimum négatif ou nul sur $\mathbb{R}_+$

   et on a :

   c) $\forall a > 0 \quad (a+b+c)^3 - 27abc > 0$

   d) $\forall a > 0 \quad (a+b+c)^3 - 27abc < 0$

4. Supposant u_n, v_n, w_n réels strictement positifs pour n entier fixé, on obtient en prenant $b = v_n$ et $c = w_n$

a) $u_{n+1} < v_{n+1}$

b) $u_{n+1} > w_{n+1} > 0$

en prenant $b = \dfrac{1}{v_n}$ et $c = \dfrac{1}{w_n}$

c) $u_{n+1} > v_{n+1}$

d) $v_{n+1} > w_{n+1} > 0$

5. Pour tout $n \in \mathbb{N}$, on peut écrire :

a) $v_{n+1} = \sqrt[3]{u_n + v_n + w_n}$

b) $v_{n+1} = \sqrt{u_n v_n w_n}$

c) $u_{n+1} w_{n+1} - v_{n+1}^2 = \dfrac{u_n v_n w_n (u_n + v_n + w_n)}{u_n v_n + u_n w_n + v_n w_n} - u_n v_n w_n$

d) $u_{n+1} w_{n+1} - v_{n+1}^2 = \dfrac{u_n v_n w_n (u_n + v_n + w_n)}{u_n v_n + u_n w_n + v_n w_n} - (u_n^2 v_n^2 w_n^2)^{1/3}$

6. La quantité $A_n = u_{n+1} w_{n+1} - v_{n+1}^2$ peut, pour tout n entier, s'exprimer sous la forme $A_n = B_n[u_n v_n w_n (u_n + v_n + w_n)^3 - (u_n v_n + u_n w_n + v_n w_n)^3]$ où B_n s'écrit :

a) $B_n = \dfrac{(u_n v_n w_n)^2}{(u_n v_n + u_n w_n + v_n w_n)^3}$

b)

$$B_n = \frac{(u_n v_n w_n)^{2/3}}{u_n v_n + u_n w_n + v_n w_n} \, \frac{1}{(u_n v_n w_n)^{2/3}(u_n + v_n + w_n)^2 + (u_n v_n + u_n w_n + v_n w_n)^2 + (u_n v_n w_n)^{1/3}(u_n + v_n + w_n)(u_n v_n + u_n w_n + v_n w_n)}$$

c) $B_n = \dfrac{(u_n v_n w_n)^{2/3}}{u_n v_n + u_n w_n + v_n w_n} \, \dfrac{1}{(u_n v_n w_n)^{2/3}(u_n + v_n + w_n)^2 + (u_n v_n + u_n w_n + v_n w_n)^2}$

d) $B_n = \dfrac{(u_n + v_n + w_n)^2}{(u_n v_n + u_n w_n + v_n w_n)^3}$

7. Pour tout $n \in \mathbb{N}$, le terme $u_n v_n w_n(u_n + v_n + w_n)^3 - (u_n v_n + u_n w_n + v_n w_n)^3 = C_n$ peut s'écrire :

a) $C_n = -(u_n w_n - v_n^2)[v_n^2 u_n w_n + v_n(u_n^3 + w_n^3) + u_n^2 w_n^2]$

b) $C_n = (u_n w_n - v_n^2)[-u_n^2 v_n w_n + u_n(v_n^3 + w_n^3) - v_n^2 w_n^2]$

et le signe de A_n est, donc pour tout $n \in \mathbb{N}$,

c) égal au signe de $u_n w_n - v_n^2$ donc au signe de $u_o w_o - v_o^2$

d) opposé au signe de $u_n w_n - v_n^2$

8. La suite (u_n) est :

a) décroissante car $(v_n - u_n) + (w_n - u_n) < 0 \quad \forall n \in \mathbb{N}$

b) croissante car $u_{n+1} - u_n \geq 0 \quad \forall n \in \mathbb{N}$

et la suite (w_n) est :

c) décroissante car $u_n(v_n - w_n) + v_n(u_n - w_n) < 0$

d) croissante car $w_{n+1} - w_n = \dfrac{u_n(v_n - w_n) + v_n(u_n - w_n)}{u_n v_n + u_n w_n + v_n w_n} > 0$

9. Les suites (u_n) et (w_n) sont :

a) convergentes car elles sont toutes deux croissantes et majorées

b) convergentes car elles sont adjacentes puisque l'on a aussi

$u_{n+1} - w_{n+1} < \frac{2}{3}(u_n - w_n) \quad \forall n \in \mathbb{N}$

et les 3 suites (u_n) ; (v_n) et (w_n)

c) sont convergentes mais de limites différentes car $u_n > v_n > w_n \quad \forall n \in \mathbb{N}$

d) sont convergentes et ont même limite car $u_n \leq v_n \leq w_n \quad \forall n \in \mathbb{N}^*$

10. Dans le cas particulier où $u_o w_o = v_o^2$, la suite (v_n) a pour limite, si elle converge :

a) 0

b) $\sqrt{u_o v_o}$

et dans le cas particulier où $u_o w_o > v_o^2$, la suite (v_n) est :

c) adjacente à la suite (u_n)

d) adjacente à la suite (w_n)