Question liées : 1 à 18 ; 19 à 22 ; 23 à 29 ; 30 à 32

- PARTIE I -

Pour $n \in \mathbb{N}$, on définit la fonction f_n par :

$$f_n : \mathbb{R}_+^* \rightarrow \mathbb{R}$$

$$x \mapsto f_n(x) = \begin{cases} \frac{x^n \ln x}{x^2 - 1} & \text{si } x \neq 1 \\ k_n & \text{si } x = 1 \end{cases}$$

où k_n est un réel fixé et $\ln$ désigne la fonction logarithme népérien. On notera C_n la courbe représentative de f_n dans un repère orthonormé. n désignera un entier naturel dans cette partie.

Question 1 : Le développement limité de la fonction $\ln(1+x)$ à l'ordre 3 au voisinage de 0 s'écrit, ε désignant une fonction telle que $\lim_{x \rightarrow 0} \varepsilon(x) = 0$

- a) $1 + x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} + x^3\varepsilon(x)$ b) $x + \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} + x^3\varepsilon(x)$
 c) $x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3!} + x^3\varepsilon(x)$ d) $x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} + x^3\varepsilon(x)$

Question 2 : Le développement limité de la fonction $\frac{1}{2+u}$ à l'ordre 2 au voisinage de 0 s'écrit, ε désignant toujours une fonction telle que $\lim_{u \rightarrow 0} \varepsilon(u) = 0$

- a) $1 - \frac{u}{2} + \frac{u^2}{4} + u^2\varepsilon(u)$ b) $\frac{1}{2} + \frac{u}{4} + \frac{u^2}{8} + u^2\varepsilon(u)$
 c) $-\frac{u}{4} + \frac{u^2}{8} + u^2\varepsilon(u)$ d) $\frac{1}{2} - \frac{u}{4} + u^2\varepsilon(u)$

Question 3 : Le développement limité à l'ordre 2 de la fonction f_0 au voisinage de 1 est alors, ε_0 étant une fonction vérifiant $\lim_{x \rightarrow 1} \varepsilon_0(x) = 0$

- a) $1 - \frac{x-1}{2} + \frac{5}{12}(x-1)^2 + (x-1)^2\varepsilon_0(x)$
 b) $\frac{1}{2} - \frac{x-1}{2} + \frac{5}{12}(x-1)^2 + (x-1)^2\varepsilon_0(x)$
 c) $\frac{1}{2} - \frac{2x-1}{4} + \frac{10x^2-9x+3}{24} + x^2\varepsilon_0(x)$
 d) $\frac{1}{2} - \frac{x}{2} + \frac{5}{12}x^2 + x^2\varepsilon_0(x)$

Question 4 : Pour tout entier n strictement positif, on a

- a) $f_n(x) = f_0(x) \quad \forall x \in \mathbb{R}_+^*$ b) $f_n(x) = x^n f_0(x) \quad \forall x \in \mathbb{R}_+^*$
 et le développement limité à l'ordre 2 de la fonction x^n au voisinage de 1 s'écrit, ε désignant une fonction telle que $\lim_{x \rightarrow 1} \varepsilon(x) = 0$
 c) $1 + nx + \frac{n(n-1)}{2}x^2 + x^2\varepsilon(x)$
 d) $1 + n(x-1) + \frac{n(n-1)}{2}(x-1)^2 + (x-1)^2\varepsilon(x)$

Question 5 : Pour $n \in \mathbb{N}$, le développement limité à l'ordre 2 au voisinage de 1 de la fonction f_n est alors, avec $\lim_{x \rightarrow 1} \varepsilon_n(x) = 0$

- a) $\frac{1}{2} - \frac{n-1}{2}(x-1) + \frac{3n^2-9n+5}{12}(x-1)^2 + (x-1)^2\varepsilon_n(x)$
 b) $1 + \frac{n-1}{2}(x-1) + \frac{3n^2-9n+5}{12}(x-1)^2 + (x-1)^2\varepsilon_n(x)$
 c) $\frac{1}{2} + \frac{n-1}{2}(x-1) + \frac{3n^2+9n+5}{12}(x-1)^2 + (x-1)^2\varepsilon_n(x)$

$$d) \frac{1}{2} + \frac{n-1}{2}x + \frac{3n^2 - 9n + 5}{12}x^2 + x^2\varepsilon_n(x)$$

Question 6 : Pour que, pour tout $n \in \mathbb{N}$, la fonction f_n soit continue sur $\mathbb{R}_+^*$ il faut poser :

a) $k_n = 1$ b) $k_n = \frac{n}{2}$ c) $k_n = \frac{1}{2}$ d) $k_n = -\frac{1}{2}$

On suppose dorénavant que k_n prend une valeur rendant f_n continue sur $\mathbb{R}_+^*$, pour n entier naturel fixé.

Question 7 : Pour tout entier n , la fonction f_n

- a) n'est pas dérivable en 1
- b) est dérivable en 1 car toute fonction continue en un point x_0 est dérivable en x_0
- c) est dérivable en 1 puisque f_n admet un développement limité d'ordre 1 en 1
- d) est dérivable en 1 et a pour dérivée $f'_n(1) = \frac{n-1}{2}$, car toute fonction admettant un développement limité d'ordre n en un point x_0 a une dérivée d'ordre n en x_0 , $\forall n \in \mathbb{N}^*$.

Question 8 : L'équation de la tangente à C_n au point de coordonnées $(1, k_n)$ s'écrit, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $y = h_n(x)$ avec pour tout $x \in \mathbb{R}$

a) $h_n(x) = -\frac{n-1}{2}(x-1) + \frac{1}{2}$ b) $h_n(x) = \frac{n-1}{2}(x-1) + \frac{1}{2}$
 c) $h_n(x) = \frac{n-1}{2}x - \frac{n}{2} + 1$ d) $h_n(x) = \frac{n-1}{2}x + \frac{1}{2}$

Question 9 : Pour tout $n \in \mathbb{N}$, la fonction $f_n - h_n$ est au voisinage de 1 du signe de $Q(n)$ où Q est la fonction polynôme définie sur $\mathbb{R}$ par

a) $Q(x) = 3x^2 - 9x + 5$ b) $Q(x) = 3x^3 + 9x + 5$
 c) $Q(x) = -3x^2 + 9x - 5$ d) $Q(x) = \frac{5}{12}$

Question 10 : La fonction polynôme Q

- a) n'admet pas de racines réelles
- b) admet nécessairement des racines réelles puisqu'elle est à coefficients réels
- c) admet 2 racines réelles positives $x_1 = \frac{9 - \sqrt{21}}{6}$ et $x_2 = \frac{9 + \sqrt{21}}{6}$
- d) admet 2 racines réelles négatives $x_1 = \frac{-9 - \sqrt{21}}{6}$ et $x_2 = \frac{-9 + \sqrt{21}}{6}$

Question 11 : Au voisinage du point d'abscisse 1, la courbe C_n reste :

- a) pour tout $n \in \mathbb{N}$, au dessus de sa tangente car $Q(n) > 0 \forall n \in \mathbb{N}$
- b) pour tout $n \in \mathbb{N}$, au dessous de sa tangente car $Q(n) < 0 \forall n \in \mathbb{N}$
- c) pour tout entier $n \geq 2$ au dessus de sa tangente et au dessous pour $n \leq 1$
- d) pour tout $n \in \mathbb{N} \setminus \{1, 2\}$ au dessus de sa tangente et au-dessous pour $n \in \{1, 2\}$

Question 12 : On a pour tout $x \in \mathbb{R}_+^* \setminus \{1\}$:

a) $f'_0(x) = \frac{x^2 - 1 - 2x^2 \ln x}{x(x^2 - 1)^2}$ b) $f'_0(x) = \frac{1}{2x^2}$
 et pour tout $n \in \mathbb{N}$
 c) $f'_n(x) = x^{n-2} (n \ln x + 1)$
 d) $f'_n(x) = \frac{x^{n+1} (1 + (n-2) \ln x) - x^{n-1} (1 + n \ln x)}{(x^2 - 1)^2}$

Question 13 : La fonction f_n :

- a) est prolongeable par continuité en 0 par 0 pour tout $n \in \mathbb{N}$ car $\lim_{x \rightarrow 0^+} x^n \ln x = 0$
- b) est prolongeable par continuité en 0 uniquement pour n entier strictement positif

- c) n'est prolongeable par continuité en 0 pour aucune valeur de l'entier n
- d) est prolongeable par continuité en 0 uniquement pour $n \geq 2$

Question 14 : La fonction $t_n(x) = \frac{f_n(x) - f_n(0)}{x}$, lorsqu'elle est définie, a pour limite à droite en 0 :

- a) $\lim_{x \rightarrow 0^+} t_n(x) = 0 \quad \forall n \in \mathbb{N}$
et la courbe C_n admet
- b) $\lim_{x \rightarrow 0^+} t_1(x) = +\infty$
- c) une demi-tangente horizontale en $(0, 0) \quad \forall n \in \mathbb{N}^*$
- d) une demi-tangente horizontale en $(0, 0)$ pour $n \geq 2$ et une demi-tangente verticale au point d'abscisse 0 pour $n \in \{0, 1\}$

On considère les fonctions φ_0, φ_1 et φ_2 définies sur $\mathbb{R}_+^*$ par :

$$\begin{aligned}\varphi_0(x) &= 1 - \frac{1}{x^2} - 2 \ln x \\ \varphi_1(x) &= \frac{x^2 - 1}{x^2 + 1} - \ln x \\ \varphi_2(x) &= x^2 - 1 - 2 \ln x\end{aligned}$$

Question 15 : La fonction φ_0

- a) a pour dérivée la fonction $\varphi_0'(x) = -\frac{1}{x} \quad \forall x \in \mathbb{R}_+^*$
- b) a pour dérivée la fonction $\varphi_0'(x) = \frac{2(x^2 - 1)}{x^3} \quad \forall x \in \mathbb{R}_+^*$
- c) atteint son maximum au point $x = 1$
- d) atteint son minimum au point $x = 1$

Question 16 : La fonction f_0

- a) est décroissante sur $\mathbb{R}_+^*$ mais n'est pas strictement décroissante
- b) est strictement décroissante sur $\mathbb{R}_+^*$ car $f_0'(x) = \frac{x}{(x^2 - 1)^2} \varphi_0(x) < 0 \quad \forall x \in \mathbb{R}_+^* \setminus \{1\}$ et
 $f_0'(1) = -\frac{1}{2}$
- c) est strictement croissante sur $\mathbb{R}_+^*$
et la courbe C_0 admet
- d) les droites $x = 0$ et $y = 0$ pour asymptotes car $\lim_{x \rightarrow 0} f_0(x) = 0$ et $\lim_{x \rightarrow +\infty} f_0(x) = +\infty$

Question 17 : On a :

- a) $\varphi_1'(x) = \frac{(x^2 - 1)^2}{x(x^2 + 1)^2} \quad \forall x \in \mathbb{R}_+^*$
- b) $\lim_{x \rightarrow +\infty} \varphi_1(x) = -\infty$
- c) $\lim_{x \rightarrow +\infty} \varphi_2(x) = +\infty$
- d) $\varphi_2(x) \leq 0 \quad \forall x \in \mathbb{R}_+^*$

Question 18 : La fonction f_1 prolongée à $\mathbb{R}_+^*$, si cela est possible,

- a) est décroissante sur $[0, 1]$ et croissante sur $[1, +\infty[$
- b) est positive sur $\mathbb{R}_+$ car croissante sur $\mathbb{R}_+$ et nulle en 0
et la droite Oy est
- c) direction asymptotique de la courbe C_2
- d) asymptote à la courbe C_1

- PARTIE II -

$\mathbb{R}^3$ est rapporté à la base canonique $B = (e_1, e_2, e_3)$ avec $e_1 = (1, 0, 0)$; $e_2 = (0, 1, 0)$ et $e_3 = (0, 0, 1)$. On considère f l'endomorphisme de $\mathbb{R}^3$ qui à tout triplet $(x, y, z) \in \mathbb{R}^3$ associe le triplet $((b+c)x + (c-a)y + (b-a)z, (c-b)x + (a+c)y + (a-b)z, (b-c)x + (a-c)y + (a+b)z)$ où a, b, c sont des réels distincts 2 à 2.

Question 19 : La matrice A de f par rapport à la base B s'écrit :

$$\begin{aligned} \text{a) } A &= \begin{pmatrix} (b+c) & (c-b) & (b-c) \\ (c-a) & (a+c) & (a-c) \\ (b-a) & (a-b) & (a+b) \end{pmatrix} & \text{b) } A &= \begin{pmatrix} (b+c) & (c-a) & (b-a) \\ (c-b) & (a+c) & (a-b) \\ (b-c) & (a-c) & (a+b) \end{pmatrix} \\ \text{c) } A &= \begin{pmatrix} (2b+2c-2a) & 0 & 0 \\ 0 & (2a+2c-2b) & 0 \\ 0 & 0 & (2a+2b-2c) \end{pmatrix} \\ \text{d) } A &= \begin{pmatrix} (b-a) & (c-a) & (b+c) \\ (a-b) & (a+c) & (c-b) \\ (a+b) & (a-c) & (b-c) \end{pmatrix} \end{aligned}$$

Question 20 : Pour tout λ réel la matrice $A - \lambda I$ a pour déterminant Δ

$$\begin{aligned} \text{a) } \Delta &= (2c - \lambda) \begin{vmatrix} 1 & (c-b) & (b-c) \\ 0 & (a+b-\lambda) & (a-b) \\ 0 & (a-b) & (a+b-\lambda) \end{vmatrix} \\ \text{b) } \Delta &= (2c - \lambda) \begin{vmatrix} 0 & (a+b-\lambda) & (a-b) \\ 1 & (a+c-\lambda) & (a-c) \\ 0 & (a-b) & (a+b-\lambda) \end{vmatrix} \\ \text{c) } \Delta &= (2a - \lambda)(2c - \lambda) \begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 \\ (c-b) & (2b-\lambda) & (a-b) \\ 0 & 0 & 1 \end{vmatrix} \\ \text{d) } \Delta &= \lambda^3 - \lambda^2(2a + 2b + 2c) + \lambda(4ab + 4ac + 4bc) - 8abc \end{aligned}$$

Question 21 : La matrice A

- a) est égale à sa transposée pour tout $(a, b, c) \in \mathbb{R}^3$
- b) est inversible pour tout $(a, b, c) \in \mathbb{R}^3$
- c) n'est pas inversible car son déterminant est nul $\forall (a, b, c) \in \mathbb{R}^3$
- d) est inversible si et seulement si a et b sont non nuls

Question 22 : Le polynôme $P(\lambda) = \det(A - \lambda I)$, pour $(a, b, c) \in \mathbb{R}^3$

- a) est de degré 2
- b) admet 0 pour racine car $\det A = 0$
- c) est égal à $(2a - \lambda)(2b - \lambda)(2c - \lambda)$
- d) est égal à $(\lambda - 2a)(\lambda - 2b)(\lambda - 2c)$

- PARTIE III -

Soit $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$ une suite bornée de nombres réels.
 On définit la suite $(y_n)_{n \in \mathbb{N}}$ par

$$\forall n \in \mathbb{N}, y_n = \frac{1}{n+1} \sum_{k=0}^n x_k$$
 On désigne par $\inf_{n \geq p} x_n$ (resp. $\sup_{n \geq p} x_n$) la borne inférieure (resp. supérieure) de l'ensemble $\{x_n \mid n \geq p\}$.

Question 23 : La suite de terme général $\inf_{n \geq p} x_n$, $n \in \mathbb{N}$, est

- a) convergente car décroissante et minorée
- b) croissante et majorée mais divergente car elle n'est pas de signe constant
- c) croissante, minorée et convergente
- d) convergente car toute suite bornée converge

Question 24 : La suite $\left(\inf_{p \geq n} y_p \right)_{n \in \mathbb{N}}$ est

- a) décroissante et minorée car elle a les mêmes propriétés que la suite $\left(\inf_{p \geq n} x_p\right)_{n \in \mathbb{N}}$
- b) croissante et majorée donc convergente
- c) divergente car la série de terme général $\frac{1}{n}$ diverge
- d) minorée et convergente

Question 25 : Les limites des suites $\left(\inf_{p \geq n} x_p\right)_{n \in \mathbb{N}}$ et $\left(\inf_{p \geq n} y_p\right)_{n \in \mathbb{N}}$ vérifient, si elles existent

- a) $\lim_{n \rightarrow +\infty} \left(\inf_{p \geq n} x_p\right) \leq \lim_{n \rightarrow +\infty} \left(\inf_{p \geq n} y_p\right)$
- b) $\lim_{n \rightarrow +\infty} \left(\inf_{p \geq n} x_p\right) \geq \lim_{n \rightarrow +\infty} \left(\inf_{p \geq n} y_p\right)$
et celles des suites $\left(\sup_{p \geq n} x_p\right)_{n \in \mathbb{N}}$ et $\left(\sup_{p \geq n} y_p\right)_{n \in \mathbb{N}}$
- c) $\lim_{n \rightarrow +\infty} \left(\sup_{p \geq n} y_p\right) \geq \lim_{n \rightarrow +\infty} \left(\sup_{p \geq n} x_p\right)$
- d) $\lim_{n \rightarrow +\infty} \left(\inf_{p \geq n} -y_p\right) \geq - \lim_{n \rightarrow +\infty} \left(\sup_{p \geq n} y_p\right) \geq - \lim_{n \rightarrow +\infty} \left(\sup_{p \geq n} x_p\right)$

Question 26 : On considère dans cette question le cas particulier où la suite $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$ est définie par : $\forall n \in \mathbb{N} \quad x_n = (-1)^n$. On a alors

- a) $y_n = 0$ si n est impair et $y_n = \frac{1}{n+1}$ si n est pair
- b) $y_n = -\frac{1}{n+1}$ si n est impair et $y_n = 0$ si n est pair
- c) $\lim_{n \rightarrow +\infty} \left(\inf_{p \geq n} x_p\right) = 0 = \lim_{n \rightarrow +\infty} \left(\sup_{p \geq n} x_p\right)$
- d) $\lim_{n \rightarrow +\infty} \left(\inf_{p \geq n} x_p\right) < \lim_{n \rightarrow +\infty} \left(\inf_{p \geq n} y_p\right) = \lim_{n \rightarrow +\infty} \left(\sup_{p \geq n} y_p\right) < \lim_{n \rightarrow +\infty} \left(\sup_{p \geq n} x_p\right)$

Question 27 : On peut avoir, pour certaines suites bornées $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$

- a) $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$ convergente et $\left(\inf_{p \geq n} x_p\right)_{n \in \mathbb{N}}$ divergente
- b) $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$ divergente et $\left(\inf_{p \geq n} x_p\right)_{n \in \mathbb{N}}$ convergente
et pour toute suite bornée $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$ on a l'équivalence
- c) $[(x_n)_{n \in \mathbb{N}} \text{ convergente}] \Leftrightarrow \left[\left(\inf_{p \geq n} x_p\right)_{n \in \mathbb{N}} \text{ et } \left(\sup_{p \geq n} x_p\right)_{n \in \mathbb{N}} \text{ convergentes} \right]$
- d) $[(y_n)_{n \in \mathbb{N}} \text{ convergente}] \Leftrightarrow \left[\left(\inf_{p \geq n} x_p\right)_{n \in \mathbb{N}} \text{ et } \left(\sup_{p \geq n} x_p\right)_{n \in \mathbb{N}} \text{ convergentes et ont même limite} \right]$

Soit A un nombre réel non nul, α un élément de l'intervalle $]1, +\infty[$ et $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ une suite de nombres réels strictement positifs convergeant vers 0 et vérifiant $\lim_{n \rightarrow +\infty} \theta_n = A$ où $\theta_n = u_n^{1-\alpha} - u_{n+1} u_n^{-\alpha} \quad \forall n \in \mathbb{N}$

Question 28 : On a nécessairement

- a) $A < 0$

- b) $A > 0$
 et la suite $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$ définie par $x_n = u_{n+1}^{1-\alpha} - u_n^{1-\alpha} \forall n \in \mathbb{N}$
 c) est convergente et a pour limite $(1 - \alpha)A$
 d) est divergente car $\forall n \in \mathbb{N} \quad x_n = \left[(1 - \theta_n u_n^{\alpha-1})^{1-\alpha} - 1 \right] u_n^{1-\alpha}$ et $\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n^{1-\alpha} = +\infty$

Question 29 : Soit $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$ et $(y_n)_{n \in \mathbb{N}}$ les suites définies par :

$\forall n \in \mathbb{N}, x_n = u_{n+1}^{1-\alpha} - u_n^{1-\alpha}$ et $y_n = \frac{1}{n+1} \sum_{k=0}^n x_k$. La suite $(y_n)_{n \in \mathbb{N}}$

- a) a pour limite $(\alpha - 1)A$ car $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$ converge vers $(\alpha - 1)A$
 b) a pour limite $(1 - \alpha)A$
 et la suite $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ est équivalente à la suite
 c) $n^{\frac{1}{1-\alpha}}$
 d) $[(1 - \alpha)A]^{\frac{1}{1-\alpha}} n^{\frac{1}{1-\alpha}}$

- PARTIE IV -

On considère la fonction réelle g définie sur l'intervalle $\left[0, \frac{\pi}{2}\right]$ par

$$g(t) = \begin{cases} \frac{\sin t}{t} & \text{si } t \neq 0 \\ \ell & \text{si } t = 0 \text{ où } \ell \text{ est un réel fixé.} \end{cases}$$

Question 30 : La fonction g est

- a) dérivable sur $\left[0, \frac{\pi}{2}\right]$ pour tout ℓ réel
 b) continue mais non dérivable sur $\left[0, \frac{\pi}{2}\right]$ dans le cas où $\ell = 1$
 c) pour $\ell = 1$, de classe $\mathcal{C}^1$ sur $\left[0, \frac{\pi}{2}\right]$ et a pour dérivée $g'(t) = \begin{cases} \frac{\cos t}{t^2} (t - \tan t) & \text{si } t \neq 0 \\ 0 & \text{si } t = 0 \end{cases}$
 d) de classe $\mathcal{C}^1$ sur $\left]0, \frac{\pi}{2}\right[$ uniquement, pour tout $\ell \in \mathbb{R}$.

Question 31 : La fonction g est, pour tout ℓ réel

- a) croissante sur $\left[0, \frac{\pi}{2}\right]$
 b) décroissante sur $\left[0, \frac{\pi}{2}\right]$ car $g'(t) \leq 0$ sur $\left[0, \frac{\pi}{2}\right]$
 c) décroissante sur $\left]0, \frac{\pi}{2}\right[$ mais n'est pas décroissante sur $\left[0, \frac{\pi}{2}\right]$ pour $\ell \in \mathbb{R} \setminus \{1\}$ car g' n'est pas définie en 0
 d) décroissante sur $\left[0, \frac{\pi}{2}\right]$ uniquement pour $\ell \geq 1$.

Question 32 : On a alors, pour tout ℓ réel

- a) $1 \leq g(t) \leq g\left(\frac{\pi}{2}\right) \forall t \in \left]0, \frac{\pi}{2}\right[$ b) $\frac{2}{\pi} \leq g(t) \leq \ell \forall t \in \left]0, \frac{\pi}{2}\right[$
 c) $\frac{2}{\pi} \leq g(t) \leq 1 \forall t \in \left]0, \frac{\pi}{2}\right[$ d) $\frac{2}{\pi} \leq g(t) \leq 1 \forall t \in \left[0, \frac{\pi}{2}\right]$