

CORRIGÉ ICNA Épreuve commune 2013

PARTIE I= ICNA Épreuve commune 2008!

1. Compte tenu de l'expression analytique de f , on obtient directement, d'après le cours :

$$\mathcal{M}_{\mathcal{B}}(f) = \begin{pmatrix} 2\alpha+3 & -\alpha & \alpha+1 \\ \alpha-2 & \alpha-1 & \alpha-2 \\ 2\alpha-1 & \alpha-1 & 2\alpha-1 \end{pmatrix}$$

Q1 : Réponse B

2. Pour la suite, $\alpha = -1$ donc $M = \begin{pmatrix} -1 & 1 & 0 \\ -3 & -2 & -3 \\ -3 & -2 & -3 \end{pmatrix}$.

Les questions suivantes étant liées, autant calculer directement le polynôme caractéristique de f :

$$\begin{aligned} \chi_M(X) &= \begin{vmatrix} -1-X & 1 & 0 \\ -3 & -2-X & -3 \\ -3 & -2 & -3-X \end{vmatrix} \\ &= \begin{vmatrix} -1-X & 1 & 0 \\ 0 & -2-X & -3 \\ X & -2 & -3-X \end{vmatrix} \quad \text{en faisant } C_1 \leftarrow C_1 - C_3 \\ &= -(1+X)(2+X)(3+X) - 3X + 6(1+X) = -(X^3 + 6X^2 + 8X) \end{aligned}$$

Les valeurs propres de f sont donc $0, -2, -4$; étant distinctes, M est diagonalisable et est semblable à $D = \text{diag}(0, -2, -4)$. Ce calcul préliminaire permet de répondre plus vite aux questions qui suivent.

- A. B. D. $\text{Ker } f$ est une droite vectorielle (c'est le sous-espace propre associé à la valeur propre 0 , qui est simple), donc le théorème du rang donne $\text{rg } f = 2$. Réponses fausses (et la « justification » de la question B est fausse aussi).
C. Réponse exacte ; la justification de l'énoncé est claire.

Q2 : Réponse C

3. Pour la suite, on peut aussi déterminer les sous-espaces propres E_0, E_{-2} et E_{-4} associés aux trois valeurs propres $0, -2$ et -4 .

Soit $V = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$.

$$MV = 0 \iff \begin{cases} -x + y = 0 \\ -3x - 2y - 3z = 0 \end{cases} \iff \begin{cases} y = x \\ 3z = -5x \end{cases} \quad \text{donc } E_0 = \text{Vect} \begin{pmatrix} 3 \\ 3 \\ -5 \end{pmatrix}$$

$$MV = -2V \iff \begin{cases} x + y = 0 \\ -3x - 3z = 0 \\ -3x - 2y - z = 0 \end{cases} \iff \begin{cases} y = -x \\ z = -x \end{cases} \quad \text{donc } E_{-2} = \text{Vect} \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ -1 \end{pmatrix}$$

$$MV = -4V \iff \begin{cases} 3x + y = 0 \\ -3x + 2y - 3z = 0 \\ -3x - 2y + z = 0 \end{cases} \iff \begin{cases} y = -3x \\ z = -3x \end{cases} \quad \text{donc } E_{-4} = \text{Vect} \begin{pmatrix} 1 \\ -3 \\ -3 \end{pmatrix}$$

On a alors $\text{Ker } f = E_0$ et $\text{Im } f = E_{-2} \oplus E_{-4}$ (je rappelle ici un résultat important : les vecteurs propres associés à une valeur propre *non nulle* appartiennent nécessairement à l'image).

Les sous-espaces propres étant supplémentaires, on a bien $\mathbb{R}^3 = \text{Ker } f \oplus \text{Im } f$; puisque $\text{Im } f = \text{Vect} \left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ -1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ -3 \\ -3 \end{pmatrix} \right\}$,

$\text{Im } f$ est le plan d'équation $y = z$, et il contient bien le vecteur $e_2 + e_3$.

Conclusion :

Q3 : Réponses A,C

4. « Coquille » dans l'énoncé : il fallait lire « $\chi = \det(M - \lambda I)$ ».

Le calcul du polynôme caractéristique a déjà été fait. Je rappelle que le degré du polynôme caractéristique d'un endomorphisme est toujours égal à la dimension de l'espace (ici, 3), et que cela n'a rien à voir avec son rang ! La « justification » de la réponse B est donc fausse.

Enfin, le polynôme donné dans la réponse D est l'opposé du véritable polynôme caractéristique lorsque l'on prend pour définition $\chi = \det(M - \lambda I)$.

Q4 : Réponse E (aucune réponse exacte)

5. Déjà fait. Je rappelle que 0 est valeur propre d'un endomorphisme si et seulement si celui-ci n'est pas injectif (ce qui équivaut à non bijectif si l'espace est de dimension finie).

Q5 : Réponse B

6. Déjà fait.

Q6 : Réponse A

7. D'après l'énoncé, $\lambda_1 = -4$ donc, compte tenu des contraintes, $v_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ -3 \\ -3 \end{pmatrix}$; $\lambda_2 = -2$ et $v_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ -1 \end{pmatrix}$; $\lambda_3 = 0$ et

$$v_3 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ -\frac{5}{3} \end{pmatrix}.$$

(v_1, v_2, v_3) est une base de $\mathbb{R}^3$, puisque f est diagonalisable ; (v_1, v_2) est une base de $\text{Im } f$ et v_3 engendre $\text{Ker } f$.

La réponse D est exacte, puisque $f(v_3) = 0$!

Q7 : Réponses C,D

8. $P = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ -3 & -1 & 1 \\ -3 & -1 & -\frac{5}{3} \end{pmatrix}$ et $D = \begin{pmatrix} -4 & 0 & 0 \\ 0 & -2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$.

D'après le cours, $D = P^{-1}MP$ soit $PD = MP$.

Enfin, la réponse D est fausse : les valeurs propres de M et de D sont, par construction, les mêmes !

Q8 : Réponse B

9. Le système proposé s'écrit, en posant $V = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$: $PV = \begin{pmatrix} r \\ s \\ t \end{pmatrix}$.

P étant inversible (c'est une matrice de passage !), ce système est un système de Cramer qui admet pour unique solution

$$V = P^{-1} \begin{pmatrix} r \\ s \\ t \end{pmatrix}.$$

Q9 : Réponse C

10. P est la matrice de passage de $\mathcal{B}$ à $\mathcal{B}'$, donc P^{-1} est celle de $\mathcal{B}'$ à $\mathcal{B}$; par définition, les coefficients des ses *colonnes* sont donc les coordonnées des vecteurs de $\mathcal{B}$ dans $\mathcal{B}'$.

Les réponses A,B, C sont donc fausses (noter que $\text{rg } P = \text{rg } P^{-1} = 3$!)

Plutôt que de chercher P^{-1} par les méthodes habituelles, autant se servir de l'énoncé ! On effectue donc le produit matriciel :

$$\begin{pmatrix} -4 & -1 & -3 \\ 12 & -2 & 6 \\ 0 & 3 & -3 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ -3 & -1 & 1 \\ -3 & -1 & -\frac{5}{3} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 8 & 0 & 0 \\ 0 & 8 & 0 \\ 0 & 0 & 8 \end{pmatrix}$$

Le produit des deux matrices est égal à $8I_3$ donc P^{-1} est en fait égale à $\frac{1}{8}$ de la matrice de l'énoncé.

Q10 : Réponse E (aucune réponse exacte)

11. A. B. On a vu que $M = PDP^{-1}$ donc $M^n = PD^nP^{-1}$ pour tout entier n .

C. Le simple calcul de M^2 montre que la dernière ligne de M^2 n'est pas nulle...

D. M ayant ses deux dernières lignes égales, il en sera de même pour les matrices M^n pour tout $n \geq 1$: cela découle directement de la formule du produit matriciel.

Q11 : Réponses B,D

12. A. B. Par définition de l'image, l'équation $f(u) = b$ a (au moins) une solution si et seulement si b appartient à l'image de f .

C. $f(v_1) = -4v_1$ donc tout vecteur u de la droite vectorielle $\mathbb{R}v_1$ vérifie $f(u) = -4u$. La réponse C est fausse.

D. On sait que, si u_0 est une solution particulière de l'équation (s'il en existe), l'ensemble des solutions sera le sous-espace affine $u_0 + \text{Ker } f$. Ce n'est pas un sous-espace vectoriel, sauf si $u_0 = 0$, i.e $b = 0$.

Q12 : Réponse B

13. A. B. Les solutions de (II) sont évidemment

$$\begin{cases} y_1(t) = C_1 e^{-4t} \\ y_2(t) = C_2 e^{-2t} \\ y_3(t) = C_3 \end{cases} \quad \text{avec } C_1, C_2, C_3 \text{ constantes réelles}$$

C'est donc un $\mathbb{R}$ -espace vectoriel de dimension 3.

C. D. Le système (II) s'écrit $Y' = DY$ et le système (I) s'écrit $X' = MX$, soit $X' = PDP^{-1}X$ ou $P^{-1}X' = D(P^{-1}X)$.
Donc (I) se ramène à (II) en posant $Y = P^{-1}X$ soit $X = PY$.

Q13 : Réponses B,C

Maintenant, $\alpha = 1$, donc $M = \begin{pmatrix} 3 & -1 & 2 \\ -1 & 0 & -1 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}$.

14. La matrice M est de rang 2 (deux lignes proportionnelles, et la troisième indépendante), donc $\text{rg } f = 2$ et $\dim \text{Ker } f = 1$. C'est la réponse A.

La réponse D est elle aussi exacte : en effet, la phrase « f non injective » implique que le noyau n'est pas réduit à $\{0\}$, donc est de dimension non nulle, et il est forcément de dimension inférieure ou égale à 3.

Q14 : Réponses A,D

15. Pour déterminer $\text{Ker } f$, on résout l'équation $MV = 0$, avec $V = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$. On obtient

$$MV = 0 \iff \begin{cases} 3x - y + 2z = 0 \\ -x - z = 0 \\ xz = 0 \end{cases} \iff \begin{cases} y = x \\ z = -x \end{cases}$$

donc $\text{Ker } f = \text{Vect} \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix}$.

La réponse A est exacte ; la réponse B est fausse puisque la droite D n'est même pas incluse dans P ; le calcul précédent montre également que C et D sont fausses.

Q15 : Réponse A

16. • D'après le théorème du rang et le calcul fait à la question précédente, $\text{Im } f$ est un plan ; cela permet d'éliminer d'emblée les réponses A, C et D !
 • On calcule le polynôme caractéristique :

$$\chi_M(X) = \begin{vmatrix} 3-X & -1 & 2 \\ -1 & -X & -1 \\ 1 & 0 & 1-X \end{vmatrix} = \dots = X^2(4-X)$$

On peut remarquer que 0 est valeur propre double, alors que le sous-espace propre associé ($\text{Ker } f$) est de dimension 1, donc M n'est pas diagonalisable.

Q16 : Réponse E (aucune réponse exacte)

17. Le but des deux questions suivantes est de trigonaliser M, puisque la relation proposée peut aussi s'écrire $Q = N^{-1}MN$.

On cherche donc une base $\mathcal{B}' = (e'_1, e'_2, e'_3)$ telle que $\mathcal{M}_{\mathcal{B}'}(f) = Q = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 4 \end{pmatrix}$. La matrice N sera la matrice de passage de $\mathcal{B}$ à $\mathcal{B}'$.

e'_1 est nécessairement un vecteur de $\text{Ker } f$; on peut prendre $e'_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix}$.

e'_3 est nécessairement un vecteur du sous-espace propre associé à la valeur propre 4 ; il suffit de vérifier que le vecteur $\begin{pmatrix} 3 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix}$ convient.

On cherche ensuite un vecteur e'_2 tel que $f(e'_2) = e'_1$, et l'énoncé demande de le chercher sous la forme $e'_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ a \\ b \end{pmatrix}$.

L'équation $Me'_2 = e'_1$ donne le système

$$\begin{cases} 3 - a + 2b = 1 \\ -1 - b = 1 \\ 1 + b = -1 \end{cases}$$

Ce système est de rang 2, et possède la solution unique $a = b = -2$.

Rem/ Si on ne remarque pas qu'il s'agissait de trigonaliser M, on pouvait se contenter de faire les calculs en écrivant les équations issues de l'égalité $MN = NQ$! Cela est même peut-être plus simple...

Q17 : Réponses B,D

18. D'après les calculs ci-dessus, il existe une et une seule matrice N de la forme voulue qui vérifie $MN = NQ$; il s'agit de celle obtenue pour $a = b = -2$; elle est inversible et on a donc $Q = N^{-1}MN$.

Q18 : Réponses A,D

Maintenant, $\alpha = 0$ soit $M = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ -2 & -1 & -2 \\ -1 & -1 & -1 \end{pmatrix}$ (cela commence à devenir lassant...)

19. On calcule encore le polynôme caractéristique ; on trouve $\chi_M(X) = X(1-X)(X+2)$; donc M possède trois valeurs propres distinctes, et est par suite diagonalisable.

On calcule : $M \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$ donc $e_1 - e_3$ est un vecteur propre de f , mais c'est un vecteur de $\text{Ker } f$. La réponse C est fausse.

On calcule encore : $M \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix}$ donc $e_1 - e_2$ est bien un vecteur propre de f ; de toutes façons (calcul précédent inutile), il ne peut constituer une base de $\text{Im } f$ puisque $\text{Im } f$ est un plan. La réponse D est fausse.

Q19 : Réponse A

20. • D'après le th. de Cayley-Hamilton, $\chi_M(M) = 0$, soit ici $M(M+2I)(M-I) = 0$ ou $M(M^2 + M - 2I) = 0$. Les réponses A et B sont donc inexactes.

• $M - I$ n'est pas inversible, puisque 1 est valeur propre de M . La réponse C est fausse.

• La réponse D est fausse aussi. En effet, si on avait $M^2 = u_2M + v_2I$, M posséderait un polynôme annulateur de degré 2 ; cela est impossible puisque, ici, M étant diagonalisable, son polynôme minimal est scindé à racines simples et a pour racines les valeurs propres de M , donc est de degré 3.

Rem : J'ai supposé pour la justification ci-dessus que la phrase de l'énoncé « n entier supérieur à 2 » signifie « ... supérieur ou égal... » Si on comprend « ... strictement supérieur... », donc supérieur ou égal à 3, le résultat est encore inexact de toutes façons, puisque d'après le th. de Cayley-Hamilton, M^3 est combinaison linéaire de M^2 , M et I . Donc pas de regret pour la réponse :

Q20 : Réponse E (aucune réponse exacte)

PARTIE II = ICNA Épreuve commune 2007 !

21. Supposons $f(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} a_n x^n$, de rayon de convergence $R > 0$, solution de (E). On a alors, pour tout $x \in]-R, R[$,

$$f'(x) = \sum_{n=1}^{+\infty} n a_n x^{n-1} \text{ et } f''(x) = \sum_{n=2}^{+\infty} n(n-1) a_n x^{n-2}, \text{ d'où}$$

$$\sum_{\substack{n \geq 2 \\ n \neq 2}}^{+\infty} n(n-1) a_n x^n - \sum_{\substack{n \geq 2 \\ n \neq 1}}^{+\infty} n(n-1) a_n x^{n-1} + 3 \sum_{\substack{n \geq 1 \\ n \neq 1}}^{+\infty} n a_n x^n + \sum_{n=0}^{+\infty} a_n x^n = 0$$

$$\sum_{n=0}^{+\infty} n(n-1) a_n x^n - \sum_{n=0}^{+\infty} n(n+1) a_{n+1} x^n + 3 \sum_{n=0}^{+\infty} n a_n x^n + \sum_{n=0}^{+\infty} a_n x^n = 0$$

ce qui donne, pour tout $n \geq 0$, $[n(n-1) + 3n + 1]a_n - n(n+1)a_{n+1} = 0$, ou $(n+1)^2 a_n = n(n+1)a_{n+1}$, et, puisque $n+1 \neq 0$:

$$\forall n \in \mathbb{N}, (n+1)a_n = n a_{n+1}.$$

Cette relation implique en particulier, pour $n = 0$: $a_0 = 0$, donc la réponse D. est inexacte.

Q21 : Réponse B

22. La relation de récurrence précédente donne, pour $n = 0$, $a_0 = 0$, et montre que, si $a_1 = 0$, f est la fonction nulle, et que, si $a_1 \neq 0$, les a_n sont non nuls pour $n \geq 1$.

On a *dans ce cas* : $\lim_{n \rightarrow +\infty} \left| \frac{a_{n+1}}{a_n} \right| = \lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{n+1}{n} = 1$, donc le rayon de convergence de la série entière est égal à 1 (d'après la règle de d'Alembert). C'est la réponse C.

Cependant : ce qui précède ne vaut que pour une solution *non nulle* ! Or l'énoncé ne précise pas que l'on considère une solution non nulle... S'agit-il d'un piège ou d'un oubli ? (compte tenu de la précipitation avec laquelle ces énoncés sont rédigés, je pencherais pour cette dernière hypothèse).

Q22 : Réponse C (ou E ?)

23. C'est du cours :

Q23 : Réponses B,D

24. La relation de récurrence obtenue à la question 16 donne $a_0 = 0$ et s'écrit $a_{n+1} = \frac{n+1}{n} a_n$ pour $n \geq 1$, d'où, pour tout $n \geq 1$: $a_n = \frac{n}{n-1} \cdot \frac{n-1}{n-2} \cdots \frac{3}{2} \cdot \frac{2}{1} a_1 = n a_1$.

Q24 : Réponse A

25. On a donc, pour $|x| < 1$, $f(x) = a_1 \sum_{n=1}^{+\infty} n x^n = a_1 x \frac{d}{dx} \left(\sum_{n=0}^{+\infty} x^n \right) = a_1 x \frac{d}{dx} \left(\frac{1}{1-x} \right) = a_1 \frac{x}{(1-x)^2}$.

Q25 : Réponse D

26. La fonction $y_0 : x \mapsto \frac{x}{(x-1)^2}$ vérifie, d'après les calculs précédents, la relation $x(x-1)y_0''(x) + 3xy_0'(x) + y_0(x) = 0$ pour tout $x \in]-1, 1[$. Le calcul formel de la dérivée étant le même sur tous les intervalles, elle vérifiera également cette relation sur chacun des intervalles I_k .

Q26 : Réponse B

27. C'est la méthode de variation de la constante. Il suffit de calculer :

$$y' = z'y_0 + zy_0', \quad y'' = z''y_0 + 2z'y_0' + zy_0'', \text{ donc}$$

$$y \text{ vérifie (E)} \iff x(x-1)[z''y_0 + 2z'y_0' + zy_0''] + 3x[z'y_0 + zy_0'] + zy_0 = 0 \iff x(x-1)z''y_0 + [2x(x-1)y_0' + 3xy_0]z' = 0$$

compte tenu de la relation $x(x-1)y_0'' + 3xy_0' + y_0 = 0$.

En divisant par $x(x-1)y_0$, on obtient la relation $z'' + \left[2\frac{y_0'}{y_0} + \frac{3}{x-1} \right] z' = 0$, ce qui est la réponse A, et c'est bien une équation linéaire différentielle du premier ordre vérifiée par z' .

Q27 : Réponses A,C

28. Un peu de calcul donne $\frac{y_0'(x)}{y_0(x)} = -\frac{x+1}{x(x-1)}$, donc la relation précédente devient $z'' + \frac{x-2}{x(x-1)} z' = 0$.

Les résultats du cours sur la résolution des équations différentielles linéaire du premier ordre permettent d'écrire :

$$z' = \lambda \exp\left(-\int \frac{x-2}{x(x-1)} dx\right). \text{ Or : } -\int \frac{x-2}{x(x-1)} dx = \int \left(-\frac{2}{x} + \frac{1}{x-1}\right) dx = -\ln x^2 + \ln|x-1|, \text{ d'où finalement}$$

$$z'(x) = \lambda \frac{x-1}{x^2} \quad \text{avec } \lambda \text{ constante dépendant de l'intervalle } I_k \text{ choisi}$$

De cette relation, on tire

$$z(x) = \lambda \left(\ln|x| + \frac{1}{x} \right) + \mu = \lambda \frac{x \ln|x| + 1}{x} + \mu$$

Finalement :

Q28 : Réponse E (pas de bonne réponse)

29. Puisque $y = zy_0$, on déduit du calcul précédent :

$$y(x) = \left[\lambda \frac{x \ln|x| + 1}{x} + \mu \right] \frac{x}{(x-1)^2} = \lambda \frac{x \ln|x| + 1}{(x-1)^2} + \mu \frac{x}{(x-1)^2}$$

C'est la réponse B ; dans la réponse D, il manque une valeur absolue.

Q29 : Réponse B

30. Par définition, une solution d'une équation différentielle du second ordre doit être au moins deux fois dérivable. Elle est donc nécessairement classe $\mathcal{C}^1$, et ses restrictions aux intervalles I_k sont des solutions sur I_k , donc appartiennent à $\mathcal{S}_k$. La réponse C est donc exacte, et les réponses B et D fausses.

Une telle solution est donc définie par :

$$g(x) = \begin{cases} \lambda_1 \frac{x \ln|x| + 1}{(x-1)^2} + \mu_1 \frac{x}{(x-1)^2} & \text{si } x \in]-\infty, 0[\\ \lambda_2 \frac{x \ln|x| + 1}{(x-1)^2} + \mu_2 \frac{x}{(x-1)^2} & \text{si } x \in]0, 1[\end{cases}$$

On aura alors $\lim_{x \rightarrow 0^-} g(x) = \lambda_1$ et $\lim_{x \rightarrow 0^+} g(x) = \lambda_2$. La continuité de g en 0 équivaut donc à $\lambda_1 = \lambda_2 = \lambda$.

Les fonctions $x \mapsto \frac{x}{(x-1)^2}$ et $x \mapsto \frac{1}{(x-1)^2}$ étant dérivables en 0, la fonction g sera dérivable à droite et à gauche en 0 si et seulement si la fonction $x \mapsto \lambda \frac{x \ln|x|}{(x-1)^2}$ est dérivable en 0, i.e si la fonction $x \mapsto \lambda x \ln|x|$ l'est, ce qui n'est possible que si $\lambda = 0$ (puisque $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{x \ln|x|}{x} = -\infty$).

On a donc

$$g(x) = \mu_1 \frac{x}{(x-1)^2} \text{ pour } x < 0 \quad \text{et} \quad g(x) = \mu_2 \frac{x}{(x-1)^2} \text{ si } x \in]0, 1[$$

et il est facile de vérifier que les dérivées à droite et à gauche de g en 0 coïncident si et seulement si $\mu_1 = \mu_2$.

En conclusion, les solutions de l'équation (E) sur l'intervalle $] -\infty, 0[$ sont les fonctions de la forme : $x \mapsto \mu \frac{x}{(x-1)^2}$, ce qui montre que la réponse A est fausse (on pouvait d'ailleurs répondre directement à cette question sans aucun calcul, puisque, d'après la question 26, la fonction $y_0 : x \mapsto \frac{x}{(x-1)^2}$ convient !)

Q30 : Réponse C

31. On notera ici l'amusante erreur d'énoncé : celui-ci fait référence à la fonction g de la question 25, alors qu'il s'agit de la fonction g de la question 30 ; cette erreur provient du fait que les questions ont été bêtement recopiées depuis l'énoncé de l'épreuve de 2007, mais la numérotation des questions a changé...

Les calculs faits à la question 30 permettent de répondre à cette question ; la réponse A est fausse puisque, après calcul, on a trouvé justement $a = 0$; la réponse B est fausse puisque, après calcul, on a trouvé justement $b = c$ (mais $\lambda = g(0)$ est exact). Enfin, dans la réponse D, il y a $(x+1)^2$ au lieu de $(x-1)^2$...

Q31 : Réponse C

32. Cette question a elle aussi été traitée lors de la réponse à la question 30 : l'ensemble des solutions de l'équation (E) sur l'intervalle $] -\infty, 0[$ est l'ensemble des fonctions de la forme : $x \mapsto \mu \frac{x}{(x-1)^2}$ lorsque μ décrit $\mathbb{R}$. C'est la réponse A. Notez que la réponse C est fausse, le théorème de Cauchy-Lipschitz ne s'appliquant pas ici (le coefficient de y'' pouvant s'annuler).

Q32 : Réponse A

33. Pour les mêmes raisons que celles exposées dans la question 30 (c'est un peu répétitif...), une solution h sur $]0, +\infty[$ doit être de classe $\mathcal{C}^1$ sur tout cet intervalle, ce qui permet d'éliminer les réponses B, C et D. Malheureusement, on ne peut pas répondre à la question A sans faire quelques calculs...
Pour $x > 0$, $|x| = x$ donc une solution h sur $]0, +\infty[$ doit être de la forme :

$$h(x) = \begin{cases} \lambda_1 \frac{x \ln x + 1}{(x-1)^2} + \mu_1 \frac{x}{(x-1)^2} & \text{si } x \in]0, 1[\\ \lambda_2 \frac{x \ln x + 1}{(x-1)^2} + \mu_2 \frac{x}{(x-1)^2} & \text{si } x \in]1, +\infty[\end{cases}$$

Puisque $\frac{x \ln |x| + 1}{(x-1)^2} \underset{x \rightarrow 1}{\sim} \frac{1}{(x-1)^2}$ et que $\frac{x}{(x-1)^2} \underset{x \rightarrow 1}{\sim} \frac{1}{(x-1)^2}$, l'existence de limites à droite et à gauche en 0 exige $\mu_1 = -\lambda_1$ et $\mu_2 = -\lambda_2$. Ainsi, h est nécessairement de la forme

$$h(x) = \begin{cases} \lambda_1 \frac{x \ln x + 1 - x}{(x-1)^2} & \text{si } x \in]0, 1[\\ \lambda_2 \frac{x \ln x + 1 - x}{(x-1)^2} & \text{si } x \in]1, +\infty[\end{cases}$$

Le DL de $x \mapsto x \ln x + 1 - x$ au voisinage de 1 s'écrit

$$x \ln x + 1 - x = x \left[(x-1) - \frac{(x-1)^2}{2} + o((x-1)^2) \right] + 1 - x = (2-x) \frac{(x-1)^2}{2} + o((x-1)^2) = \frac{(x-1)^2}{2} + o((x-1)^2)$$

(on écrit $2-x = (1-x) + 1$) donc $\lim_{x \rightarrow 1^-} h(x) = \frac{\lambda_1}{2}$ et $\lim_{x \rightarrow 1^+} h(x) = \frac{\lambda_2}{2}$, et h sera continue en 1 si et seulement si $\lambda_1 = \lambda_2$.

Finalement, h doit être de la forme : $h(x) = \lambda \frac{x \ln x + 1 - x}{(x-1)^2}$. Il reste à étudier la dérivabilité de cette fonction en 1.

Si on poursuivait le DL précédent, on obtiendrait facilement que h possède un développement limité d'ordre 1 en $x = 1$, et y est donc dérivable. Le fait qu'elle est effectivement deux fois dérivable, donc sera solution de (E) sera démontré dans la question 37, donc je ne détaille pas plus ici.

En admettant provisoirement ce résultat, on peut en déduire qu'il existe d'autres solutions que la solution nulle, et la réponse A est inexacte.

Q33 : Réponse E (pas de bonne réponse)

34. • ℓ est effectivement de classe $\mathcal{C}^\infty$ sur $\mathbb{R}_+^*$ d'après les théorèmes usuels.
• Le développement limité de ℓ au voisinage de 1 s'écrit, en reprenant les calculs faits ci-dessus :

$$\ell(x) = a \left(\frac{(x-1)^2}{2} + o((x-1)^2) \right) + a + b + (a+b)(x-1)$$

La réponse B est donc exacte.

- On a ensuite :

$$\frac{\ell(x)}{(x-1)^2} = \frac{a+b}{(x-1)^2} + \frac{a+b}{x-1} + \frac{a}{2} + o(1)$$

et il est donc exact que cette fonction possède une limite finie en 1 si et seulement si $a+b=0$; cette limite vaut alors $\frac{a}{2}$.

Et donc (???) :

Q34 : Réponses A,B,D

35. Les calculs ont été faits aux questions 33 et 34.

Q35 : Réponse A

36. On connaît le développement en série entière :

$$\forall x \in]-1, 1[, \ln(1+x) = \sum_{n=0}^{+\infty} (-1)^n \frac{x^{n+1}}{n+1}$$

donc

$$\forall x \in]0, 2[, \ln x = \sum_{n=0}^{+\infty} (-1)^n \frac{(x-1)^{n+1}}{n+1}$$

puis

$$\begin{aligned} \forall x \in]0, 2[, x \ln x + 1 - x &= (x-1) \ln x + \ln x - (x-1) \\ &= \sum_{n=0}^{+\infty} (-1)^n \frac{(x-1)^{n+2}}{n+1} + \sum_{n=0}^{+\infty} (-1)^n \frac{(x-1)^{n+1}}{n+1} - (x-1) \\ &= \sum_{n=0}^{+\infty} (-1)^n \frac{(x-1)^{n+2}}{n+1} + \sum_{n=1}^{+\infty} (-1)^n \frac{(x-1)^{n+1}}{n+1} \\ &= \sum_{n=0}^{+\infty} (-1)^n \frac{(x-1)^{n+2}}{n+1} + \sum_{n=0}^{+\infty} (-1)^{n+1} \frac{(x-1)^{n+2}}{n+2} \\ &= \sum_{n=0}^{+\infty} (-1)^{n+1} \left[\frac{1}{n+2} - \frac{1}{n+1} \right] (x-1)^{n+2} \end{aligned}$$

ce qui, en divisant par $(x-1)^2$, prouve que h est développable en série entière au voisinage de 1, avec un rayon de convergence égal à 1, et est la formule de la réponse C.

Q36 : Réponses B,C

37. On sait qu'une fonction développable en série entière est de classe $\mathcal{C}^\infty$ sur l'intervalle ouvert de convergence, donc le résultat de la question précédente prouve que h est de classe $\mathcal{C}^\infty$ sur $]0, 2[$. Comme elle est de classe $\mathcal{C}^\infty$ sur $]1, +\infty[$ par les théorèmes usuels, on conclut :

Q37 : Réponse D

38. Les calculs précédents montrent que l'ensemble des solutions de l'équation (E) sur $\mathbb{R}_+^*$ est l'ensemble des fonctions de la forme $h = ah_0$, où h_0 est la fonction de l'énoncé. La réponse B est donc exacte, et la réponse A est fausse.

Une solution sur $\mathbb{R}$ doit nécessairement être aussi une solution sur $]-\infty, 1[$ et sur $]0, +\infty[$, donc être de la forme :

$$f(x) = \lambda \frac{x}{(x-1)^2} \text{ pour } x \in]-\infty, 1[\quad \text{et} \quad f(x) = a \frac{x \ln x + 1 - x}{(x-1)^2} \text{ si } x > 0$$

La seule solution possible est la fonction nulle.

Q38 : Réponses B,D

PARTIE III

39. D'après les théorèmes usuels, g est de classe $\mathcal{C}^\infty$ sur $]1, 1[$ (faites attention au terme $\sqrt{1-x^2}$ au dénominateur !)

Q39 : Réponses C,D

40. La « justification » de la réponse A est évidemment fantaisiste : il n'est pas bien difficile de trouver des fonctions continues sur un intervalle ouvert et non intégrables, cf. cours.

Pour la suite, l'énoncé fournit des explications très détaillées ainsi que les théorèmes utilisés (comparaison à l'intégrale d'une fonction de Riemann), pas besoin d'en dire beaucoup plus...

Mais il y a un PIÈGE ; en effet, la fonction $x \mapsto \frac{1}{\sqrt{2(1-x)}}$ citée dans la réponse B est intégrable *au voisinage de 1*, mais pas sur $] -\infty, 1[$ (car équivalente, en $-\infty$, à $\frac{1}{\sqrt{|x|}}$) !

Q40 : Réponse D

