

CORRIGÉ ICNA 2006 (Épreuve obligatoire)

Question 1

$\mathbb{R}_n[x]$ est clairement un s.e.v. de $\mathbb{R}[x]$, de dimension $n+1$ (base: $1, x, x^2, \dots, x^n$)
Ce n'en est pas un sous-anneau (sauf si $n=0$, ce qui est exclu) : en effet, $\mathbb{R}_n[x]$ n'est pas stable par le produit.

Conclusion a) b) d) fausses c) vraie.

Question 2

f_2 est trivialement linéaire et, en examinant les degrés, si $d \leq k$, $d \leq f_2(k) \leq k$
C'est donc bien une application linéaire de $\mathbb{R}_n[x] \rightarrow \mathbb{R}_n[x]$ (i.e. endomorphisme)
"a" de $\mathbb{R}_n[x] \rightarrow \mathbb{R}[x] \dots$

Conclusion : c) d) vraies (admettons le "peut-être" dans c)....)
a) b) fausses.

Questions 3 et 4

$$\mathcal{M}_{\mathcal{B}_c}(f_x) = \mathcal{M}_{(1, x, x^2, x^3)}(f_x) = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 2(x+1) & -3 \\ 0 & 0 & 0 & 3(x+2) \end{pmatrix} \begin{matrix} 1 \\ x \\ x^2 \\ x^3 \end{matrix}$$

donc les réponses de la question 3 sont toutes fausses
et 4.a) est vraie.

Question 5 réponse d), directement d'après la matrice

Question 6 réponses b) et d), directement d'après le cours

Questions 7 et 8

D'après le cours, si les v.p. de f_x sont distinctes, on est certain que f_x est diagonalisable. Ce sera donc le cas si $\alpha \notin \{-4, -3, -2, -1, 0\}$ (seuls ces α peuvent avoir une v.p. multiple)

- Pour $\alpha = 0$, 0 est valeur propre double et $\mathcal{M}_x = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & -3 \\ 0 & 0 & 0 & 6 \end{pmatrix}$; et $\mathcal{M}_x = 3$, donc

$\dim \ker f_x = 1$: la dimension du s.e.p. associé à 0 n'est donc pas égale à l'ordre de multiplicité de la v.p., et f_x n'est pas diagonalisable.

- Pour $\alpha = -1$, 0 est valeur propre double, et $\mathcal{M}_x = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -3 \\ 0 & 0 & 0 & 3 \end{pmatrix}$

Ici, $\dim \ker f_x = 2$, donc f_x est diagonalisable

- Pour $\lambda = -2$, -2 est v.p. double et $M_\lambda = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & -2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -2 & -3 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$; $\text{rg } f_\lambda = 2$, donc

(2)

$\dim \text{Ker } f_\lambda = 2$; $M_\lambda + 2I_4 = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -3 \\ 0 & 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}$ donc $\text{rg}(f_\lambda + 2\text{id}) = 2$, d'où $\dim \text{Ker}(f_\lambda + 2\text{id}) = 2$

La dim. des deux sous-espaces propres est donc égale à leur ordre de multiplicité; et f_λ est diagonalisable.

- Pour $\lambda = -3$, -3 est v.p. double et $M_\lambda = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & -3 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -4 & -3 \\ 0 & 0 & 0 & -3 \end{pmatrix}$; $M_\lambda + 3I_4 = \begin{pmatrix} 3 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & -3 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$

donc $\text{rg}(f_\lambda + 3\text{id}) = 2$, $\dim \text{Ker}(f_\lambda + 3\text{id}) = 2 = \text{ordre de multiplicité de } -3$
donc f_λ est diagonalisable.

- Enfin, pour $\lambda = -4$, -4 est v.p. double, $M_\lambda = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & -4 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -6 & -3 \\ 0 & 0 & 0 & -6 \end{pmatrix}$; $M_\lambda + 4I_4 = \begin{pmatrix} 4 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -2 & -3 \\ 0 & 0 & 0 & -2 \end{pmatrix}$

$\text{rg}(f_\lambda + 4\text{id}) = 3$, d'où $\dim(\text{Ker } f_\lambda + 4\text{id}) = 1$, alors que -4 est d'ordre 2; donc f_λ n'est pas diagonalisable.

→ Conclusion: f_λ est diagonalisable si et seulement si $\lambda \neq 0$ et $\lambda \neq -4$.

Donc aucune réponse à la question 7 n'est exacte;

Question 8: réponse c).

Question 9. Si d'où $P \leq n$, d'où $\deg f_\lambda(P) \leq n$, donc f_λ laisse stable les sous-espaces vectoriels $\text{Vect}(\{1, x, \dots, x^k\})$. La matrice dans la base canonique de $\mathbb{R}_n[x]$ est donc triangulaire supérieure, d'ordre $n+1$.

$$\begin{aligned} \bullet \text{ Pour } 1 \leq i \leq n+1, \quad f_\lambda(x^{i-1}) &= (i-1)(i-2)x(x-1)x^{i-3} + (i-1)(1+2x)x^{i-2} \\ &= (i-1)(2+i-2)x^{i-2} + (i-1)(3-i)x^{i-2} \end{aligned}$$

Le coeff. d'indice (i, i) correspond à la coordonnée sur x^{i-1} (i -ème vecteur de base) de l'image de x^{i-1} : il vaut donc $(i-1)(2+i-2)$.

Le coeff. d'indice $(i, i+1)$ (pour $1 \leq i \leq n$) correspond à la coordonnée sur x^i de l'image de x^i : il vaut donc $i(2-i)$.

Les autres coeff. sont nuls.

→ Conclusion: réponse d)

Question 10. La matrice étant triang. sup., les valeurs propres sont les éléments

de la diagonale donc les $(i-1)(\alpha+i-2)$ pour $1 \leq i \leq n+1$, c'est-à-dire les

(3)

$\lambda_k = k(\alpha+k-1)$ pour $0 \leq k \leq n$. : réponse a)

• Il existe (au moins) une v.p. double s'il existe $k, k' \in \llbracket 0, n \rrbracket$, $k \neq k'$, tq $k(\alpha+k-1) = k'(\alpha+k'-1)$

soit $k(\alpha+k-1) - k'(\alpha+k'-1) = (k-k')(\alpha+k+k'-1) = 0$

soit $\alpha = 1 - (k+k')$: α est donc un entier compris entre 1 strictement (le cas $k=k'=0$ étant exclu) et $1-2n$ strictement (le cas $k=k'=n$ étant exclu)

i.e. α entier compris entre $-2n+2$ et 0 : réponse c)

Question 11

• on reprend les calculs précédents : $k+k' = 1-\alpha$ soit $k+k' = 2q+2$: a) b) sont fausses.

• si $2q+2 \leq n$, on a $\lambda_0 = \lambda_{2q+2}$ d'après le calcul ci-dessus, donc inutile de tout lire : d) est fausse !

• si $2q+2 > n$, il faut trouver les couples (k, k') tq $k < k'$, $k, k' \in \llbracket 0, n \rrbracket$ et $k+k' = 2q+2$

On doit avoir $k = 2q+2 - k' \geq 2q+2 - n$, donc on obtient les couples $(q, q+2), (q-1, q+3), \dots$
et $k < q+1$ ($2q+2-n, n$)

soit $n - q - 1$ couples donnant lieu à $n - q - 1$ valeurs propres doubles.

Les autres valeurs propres seront simples ; on en trouve bien : $n+1 - 2(n-q-1) = 2q-n+3$.

Donc la réponse c) est vraie.

Question 12

• On ne peut avoir $\lambda_k = k(\alpha+k-1) = 0$ que pour $k=0$ ou $k=1-\alpha$; or, cette dernière égalité n'est possible que si $1-\alpha$ est un entier compris entre 0 et n , i.e. si α est un entier de $\llbracket 1-n, 1 \rrbracket$; cette v.p. sera alors double si $1-\alpha \neq 0$, soit $\alpha \neq 1$.

Ainsi, si α n'est PAS un entier de l'intervalle $\llbracket 1-n, 0 \rrbracket$, 0 est valeur propre simple, donc le s.e.p. associé, i.e. $\text{Ker } f_\alpha$ est de dimension 1 $\rightarrow$ a) est vraie

• Si α est un entier de $\llbracket 1-n, 0 \rrbracket$, 0 est effectivement valeur propre double

Mais, comme il a été vu dans l'exemple précédent (questions 7 et 8), $\text{Ker } f_\alpha$ peut être alors de dim. 1 ou 2 donc b) est fausse ; de même c) est fausse

• Enfin, si α n'est pas un entier de $\llbracket 1-n, 0 \rrbracket$, $\text{Ker } f_\alpha$ est de dimension 1 ;

or $f_\alpha(1) = 0$, donc $1 \in \text{Ker } f_\alpha$ et $\text{Ker } f_\alpha = \text{Vect}\{1\} = \mathbb{R}_0[X]$: d) est vraie

Question 13

(4)

Pour $\alpha = 0$, on a : $M_\alpha = \begin{pmatrix} 0 & 1 & \dots & 0 \\ \vdots & 0 & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & 0 \end{pmatrix}$ avec $\lambda_2, \dots, \lambda_n$ différents de 0.

Donc $\text{rg } M_\alpha = n$, et $\text{Ker } f_\alpha = \text{Vect}\{1\} = \mathbb{R}_0[X]$.

$\dim \text{Ker } f_\alpha = 1$ et 0 est v.p. d'ordre 2, donc f_α n'est pas diagonalisable (mais la raison invoquée dans la question d) est fautive).

→ Conclusion : réponse b)

Question 14

Pour $\alpha = -1$, les v.p. sont les $\lambda_k = k(k-2)$ pour $k \in \llbracket 0, n \rrbracket$. 0 est donc valeur propre double ($\lambda_0 = \lambda_2$) et les autres sont simples.

De plus, on a $f_\alpha(1) = f_\alpha(X^2) = 0$, donc les 2 colonnes (n°s 1 et 3) de M_α sont nulles, d'où

$\dim \text{Ker } f_\alpha = 2$ et $\text{rg } M_\alpha = n-1$. (et f_α diagonalisable)

→ et $\text{Ker } f_\alpha = \text{Vect}\{1, X^2\}$

→ Conclusion : réponses a) et d) vraies.

Question 15

Avec les notations de l'énoncé, on a ici $\lambda_0 = \lambda_p = 0$: 0 est valeur propre double ;

On sait déjà que $\mathbb{R}_0[X] \subset \text{Ker } f_\alpha$ (car $f_\alpha(1) = 0$) ; de plus, un "petit" calcul

montre que $f_\alpha \left[\frac{(X-1)^p}{p} + \frac{(X-1)^{p-1}}{p-1} \right] = 0$ (cette valeur s'obtient facilement en

résolvant l'éq. différentielle $x(x-1)y'' + [2 + (1-p)x]y' = 0$!).

Ainsi, $\text{Ker } f_\alpha = \text{Vect} \left\{ 1, \frac{(X-1)^p}{p} + \frac{(X-1)^{p-1}}{p-1} \right\}$ → réponse c)

Question 16 j'ai déjà écrit la matrice correspondant à ce cas $\alpha = -4$, $n = 3$.

On vérifie facilement que les seules réponses justes sont : a) et b)

Question 17

• $\lambda_p = (p-1)(\alpha + p - 2)$ a déjà été écrit, et, comme l'énoncé dit qu'il s'agit d'une valeur propre simple, $\lambda_k \neq \lambda_p$ pour $k \neq p$ → donc a) vraie

• b) n'a pas de sens : ce sont les espaces $\mathbb{R}_p[X]$ qui sont stables par f_α , les espaces $\mathbb{R}^p$ n'ont rien à faire ici !

(5)

• Telle qu'elle est posée, la réponse à c) est fausse : en effet, il n'est pas dit de quelle valeur propre il s'agit et pire, l'indice i devrait commencer à 0... (et non 1).

• Cependant la formule est "presque" juste ; en effet, la matrice M_α est de la forme $\begin{pmatrix} \lambda_0 & 1 & 0 & \dots \\ & \lambda_1 & 0 & \dots \\ & & \lambda_2 & -3 \\ & & & \lambda_3 & -8 \\ & & & & \ddots \end{pmatrix}$ avec, au dessus de la diagonale, des termes égaux à $1-i^2$ ($i \geq 0$)

On cherche donc un vecteur normalisé de $\mathbb{R}_p[x]$ qui soit un vecteur propre pour f_α ; en notant $\begin{pmatrix} a_0 \\ \vdots \\ a_{p-1} \\ 1 \end{pmatrix}$ ses coordonnées dans la base canonique de $\mathbb{R}_p[x]$, et en écrivant $M_\alpha \cdot \begin{pmatrix} a_0 \\ \vdots \\ a_{p-1} \\ 1 \end{pmatrix} = \lambda_p \begin{pmatrix} a_0 \\ \vdots \\ a_{p-1} \\ 1 \end{pmatrix}$, on obtient le système $\lambda_i a_i - (i^2 - 1) a_{i+1} = \lambda_p a_i$ pour $0 \leq i \leq p-1$ (en posant $a_p = 1$)

$$\text{On aura donc } (\lambda_{p-1} - \lambda_p) a_{p-1} = (p-1)^2 - 1 a_p = (p-1)^2 - 1$$

$$\text{d'où } a_{p-1} = \frac{(p-1)^2 - 1}{\lambda_{p-1} - \lambda_p}$$

puis les formules suivantes par récurrence : donc d) vraie

Question 18

• Il existe bien des solutions de (1) développables en série entière, par ex. l'application nulle (rayon de convergence infini). D'où a) fausse.

• Si S est solution, on aura :

$$x(x-1) \sum_{k=0}^{+\infty} k(k-1) a_k x^{k-2} + (1+x) \sum_{k=0}^{+\infty} k a_k x^{k-1} - p \sum_{k=0}^{+\infty} a_k x^k = 0$$

$$\text{d'où } \sum_{k=0}^{+\infty} k(k-1) a_k x^k - \sum_{k=0}^{+\infty} k(k-1) a_k x^{k-1} + \sum_{k=0}^{+\infty} k a_k x^{k-1} + x \sum_{k=0}^{+\infty} k a_k x^{k-1} - p \sum_{k=0}^{+\infty} a_k x^k = 0$$

$$\sum_{k=0}^{+\infty} (k(k-1) a_k + x k a_k - p a_k) x^k + \sum_{k=0}^{+\infty} [k - k(k-1)] a_k x^{k-1} = 0$$

$$= \sum_{k=1}^{+\infty} k(2-k) a_k x^{k-1}$$

$$= \sum_{k=0}^{+\infty} (k+1)(1-k) a_{k+1} x^k$$

$$\text{On a donc : } [k(2+k-1) - p] a_k + (1-k^2) a_{k+1} = 0 \text{ pour tout } k.$$

Aucune réponse ne convient donc (même si elles sont approchantes!)

6

Question 19

Le rayon de convergence de la série vaut $+\infty$ (cas de la solution nulle) ou 1, dans le cas où les a_k sont non nuls et en appliquant la règle de d'Alembert.

Conclusion: la seule bonne réponse est: d)

Question 20

On réécrit les calculs précédents: $[k(k+1)-p]a_k = (k^2-1)a_{k+1}$, pour tout $k \geq 0$.

Cela donne:

- pour $k=0$, $pa_0 = a_1$
- pour $k=1$, $(1-p)a_1 = 0$

d'où $a_1 = 0$ (car $1 \neq p$) puis $a_0 = 0$ (car $p \neq 0$)

On a alors a_2 quelconque, puis les a_k s'expriment facilement en f des précédents pour $k \geq 3$. Réponse: a)

Question 21

L'é.v. des solutions ainsi trouvé est donc de dimension 1 (toutes proportionnelles à celle obtenue pour $a_2 = 1$). Il existera une solution polynomiale dans Tous les cas: c'est la solution nulle! (donc b) et c) sont fausses...)

Par contre, il existe une solution polynomiale non nulle (de degré exactement p) si et seulement si $p(p+1) = p$ (puisque alors $a_{p+1} = 0$ puis $a_k = 0$ pour tout $k \geq p+1$)
Il semble donc y avoir un piège de la question c)....

Question 22 Dans le cas $p = \alpha$, on obtient: $\alpha a_0 = a_1$ et $[k(k+1)-p]a_k = (k^2-1)a_{k+1}$
pour tout $k \geq 2$

La bonne formule est donc celle de la question b), et on obtient un e.v. de dimension 2.

Conclusion: réponses b) et c)

Question 23

• Il existe de toute façon des solutions polynomiales "évidentes": celles pour lesquelles $a_2 = 0$, donc, puisque $a_1 = pa_0$, de la forme $a_0(1 + px)$.

- Il y en aura d'autres si il existe $k \geq 2$ tq $a_{k+1} = 0$ (et $a_2 \neq 0$), donc
 s'il existe $k \geq 2$ tq $k(k+\alpha-1) = p$ soit $k(k+p-1) = p$ soit $(k-1)(k+p) = 0$
 i.e. si il existe $k \geq 2$ tq $p = -k$

(7)

Ainsi, aucune bonne réponse (je ne vois pas ce que le cas $\alpha = p = -1$ a ici de particulier!)

Question 24 On reprend toujours les mêmes calculs (cela devient lassant!)

ICI, on a donc: $[k(k+\alpha-1) - p]a_k = (k^2-1)a_{k+1}$ pour $\forall k \geq 0$

$$\text{soit } k(\alpha+k-1)a_k = (k^2-1)a_{k+1} \quad "$$

d'où: • pour $k=0$: $a_1 = 0$

• pour $k=1$: $2a_1 = 0$

et ensuite, on obtient les a_k en fonction de a_2 .

Ainsi, aucune bonne réponse (de la réponse b), "presque" juste, il manque le
 coeff. a_2 : $a_k = a_2 \underline{\underline{!}}$)

Question 25

- Il ens. des sol. développables en série entière, de RCV non nul, est donc un e.v. de dimension 2 ...
 - Une solution polynomiale "évidente" est celle obtenue pour $a_0 = 1, a_2 = 0$ qui donne le s.e.v. des fonctions constantes (ce qui se vérifie facilement directement sur l'éq. diff.)
 - Il y en aura d'autres si il existe $k \geq 2$ tq $a_{k+1} = 0$, donc s'il existe $k \geq 2$ tq $k(k+\alpha-1) = p = 0$ soit $k = 1 - \alpha$. Cela est donc possible si et seulement si $\alpha - 1$ est un entier ≤ -2 , i.e. α un entier ≤ -1 .
- Ainsi, la seule bonne réponse est b).

Question 26

- si P est un polynôme $f_x(P) = \lambda P \Rightarrow F_x(P) = \lambda P$ (en effet P polynôme $\Rightarrow P \in E_\lambda$)
- donc la réponse b) est exacte
- les autres sont fausses (d) serait "presque" juste s'il était écrit $\mathbb{R}_n[x]$ au lieu de $\mathbb{R}_{n+1}[x]$)

Question 27 Je ne vois guère que la réponse a) — les autres sont toutes fantaisistes (cf. les études faites au début, en part. ds le cas $n=3$).

Question 28

8

Il s'agit ici d'une eq. différentielle linéaire d'ordre 1, sur un intervalle où le coefficient de z' ne s'annule pas; l'ens. des solutions est donc un e.v. de dimension 1. Il s'agit de l'ens. des appl. de la forme $z(x) = K e^{\int \frac{1+\alpha x}{x(1-x)} dx}$

$$\text{or } \frac{1+\alpha x}{x(1-x)} = \frac{1}{x} + \frac{1+\alpha}{1-x} ; \int \frac{1+\alpha x}{x(1-x)} dx = \ln x + (1+\alpha) \ln(1-x)$$

d'où : réponse c)

Question 29 Le noyau de L_α est l'ens. des solutions d'une eq. diff. linéaire d'ordre 2 sur un intervalle où le coeff. de h'' ne s'annule pas; l'ens. des solutions est donc un e.v. de dimension 2.

Si $h \in L_\alpha(h)$, h' vérifie l'eq. diff (2) d'où $h'(x) = K x (1-x)^{-(1+\alpha)}$ avec K réel
puis $h'(x) = K [x^{-1} + 1] (1-x)^{-(1+\alpha)} = K [(1-x)^{-(1+\alpha)} - (1-x)^{-\alpha}]$

En intégrant, on obtient la réponse b), sauf ds le cas $\alpha = 1$!! (seul le cas $\alpha = 0$ est exclu par l'énoncé) → aucune réponse satisfaisante

Question 30 Pour $\alpha = 1$, la résolution ci-dessus donne : $h(x) = K_1 \left[\frac{-1}{1-x} + \ln(1-x) \right] + K_2$
d'où b) fausse.

On suppose maintenant $\alpha \neq 0$ et $\alpha \neq 1$, alors $\text{Ker } L_\alpha$ est un e.v. de dimension 2 qui ne sera formé de polynômes que si : $\frac{(1-x)^{-\alpha}}{\alpha} + \frac{(1-x)^{1-\alpha}}{\alpha-1}$ est un polynôme.

d'où les réponses c) et d).

Question 31

- La réponse a) est exacte : on a bien $L_\alpha(I) = \lambda_k I$, de par le choix de λ_k et I !
- Poser $v = Iu$, c'est tout simplement la méthode de variation de la constante!

On calcule : si v solution de (3) alors :

$$x(x-1) [P''u + 2P'u' + Pu''] + (1+\alpha x) [P'u + Pu'] = \lambda_k I u$$

$$\text{or } [x(x-1)P'' + (1+\alpha x)P']u = \lambda_k I \cdot u, \text{ il reste donc :}$$

$$x(x-1) [2P'(x)u'(x) + P(x)u''(x)] + (1+\alpha x) I(x)u'(x) = 0$$

et, en multipliant par $I(x)$, on obtient le résultat de la réponse d).

Ainsi, les bonnes réponses sont a) et d).

(9)

Remarquons que l'équation obtenue dans d) est l'équation (2) appliquée à $P^2 u'$: donc $P^2 u'$ vérifie (2).

Question 32 La réponse exacte est donc : b) (copie tenue de la question 28 et de la question précédente).

Question 33 On suppose $\lambda_k = \alpha = 2$. On rappelle que $\lambda_k = k(\alpha + k - 1)$, ce qui donne $k(1+k) = 2$ d'où $k = 1$. Ici, $M(f_2) = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \ddots \end{pmatrix}$. Un $\vec{v}_p$ associé à la

valeur propre 2 est donc de degré 1, et il est facile de vérifier que le polynôme de coordonnées $\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$ convient, i.e. $P = 1 + 2x$

On a donc $(1+2x)^2 u'(x) = Kx(1-x)^{-3}$ avec K réel. : la réponse b) est exacte

Enfin, si on prend $v = \frac{K_1}{(1-x)^2} + K_2(1+2x)$, on aura $u = \frac{K_1}{(1-x)^2(1+2x)} + K_2$

d'où $u' = K_1 \frac{2x}{(1-x)^3(1+2x)^2}$ après calcul, donc u' vérifie la relation précédente

donc u est solution de (3) : la réponse d) est exacte

Question 34 Toutes les réponses sont fausses !

f est bien continue positive sur $[x, +\infty[$; elle y sera intégrable car $\lim_{t \rightarrow +\infty} t^2 f(t) = 0$, d'où $f(t) \underset{t \rightarrow +\infty}{\sim} \frac{1}{t^2}$ et $t \mapsto \frac{1}{t^2}$ est intégrable sur $[x, +\infty[$ (x > 0)

Question 35 Beaucoup d'affirmations fantaisistes. Facilement, la seule réponse exacte est d).

Question 36 Beaucoup d'affirmations fantaisistes, là encore ! Les seules réponses exactes sont a) et c)

Question 37

• F est définie sur $\mathbb{R}_+^*$ comme au bout de la rue ;

• si A est > 0, on a : $F(x) = \int_x^A f + \int_A^{+\infty} f = \int_A^{+\infty} f - \int_A^x f = - \int_A^x f + K_A$

donc F est de classe C^1 sur $\mathbb{R}_+^*$, et $F'(x) = -f(x)$.

→ Conclusion : réponses b) et d)

Question 38

(10)

- Déjà, $\int_0^{+\infty} g(t) dt$ n'existe pas (car $g(t) \sim_{0^+} \frac{1}{t^2}$ et $\int_0^1 \frac{dt}{t^2}$ diverge !)

donc inutile de lire les 2 premières questions !

- Par contre, en intégrant par parties, on a, pour $x > 0$:

$$F(x) = \int_x^{+\infty} \frac{e^{-t}}{t} dt = \left[-\frac{e^{-t}}{t} \right]_x^{+\infty} - \int_x^{+\infty} g(t) dt = \frac{e^{-x}}{x} - \int_x^{+\infty} g(t) dt \quad (*)$$

$v' = e^{-t}$
 $u = 1/t$

Posez alors $\varphi(x) = g(x) - \int_x^{+\infty} g(t) dt$ pour $x > 0$; φ est C^1 et $\varphi'(x) = g'(x) + g(x) = -\frac{2e^{-x}}{x^2}$

d'où $\varphi' \leq 0$, φ est et $\lim_{x \rightarrow +\infty} \varphi(x) = 0$: donc $\varphi(x) \geq 0$

et l'on a bien l'inégalité : $0 < \int_x^{+\infty} g(t) dt \leq g(x)$; $g(x)$ est bien négligeable devant $\frac{e^{-x}}{x}$ qd $x \rightarrow +\infty$ donc, d'après (*): $F(x) \sim_{+\infty} \frac{e^{-x}}{x}$

et la réponse d) est seule exacte.

Question 39

- $t \mapsto \frac{e^{-t}}{t+n}$ n'est PAS intégrable sur $\mathbb{R}^+$ ds le cas $n=0$! donc a) faux.
- le chgt. de variable $u=t+n$ donne directement : b) vraie
- Ainsi, $I_n = e^n F(n)$; $F(n) \sim_{+\infty} \frac{e^{-n}}{n}$ d'où $I_n \sim_{+\infty} \frac{1}{n}$: c) vraie, d) faux.

Question 40

- a) est faux ! En effet, h est bien intégrable sur $]0,1]$, mais la raison exacte est: $\lim_{t \rightarrow 0} h(t) = +1$ (et non $-1 \dots$)

- b) est faux aussi, bien sûr.

• Pour $x > 0$, on a: $F(x) = \int_x^{+\infty} f(t) dt$, d'où $G(x) = \int_1^{+\infty} f - \int_1^x f - \ln(x) = \int_1^x f - \ln x$

$$\text{sur: } G(x) = \int_1^x \frac{e^{-t}}{t} dt - \int_1^x \frac{dt}{t} = \int_1^x \frac{e^{-t}-1}{t} dt = \int_x^1 h(t) dt$$

Mais la réponse c) est faux ! (la rel. n'est vraie que pour $x > 0$)

- La réponse d) est exacte, encore faudrait-il écrire " x tend vers 0^+ "...

~FIN~