

CORRIGÉ ICNA Épreuve commune 2011

PARTIE I

1. Nous répondrons à cette question dans le cas général et pas seulement pour $r = 2$.

A. C. La matrice Identité I_r appartient à $\mathcal{S}_r$, mais $2I_r = I_r + I_r$ n'appartient pas à $\mathcal{S}_r$. Donc $\mathcal{S}_r$ n'est pas stable ni pour l'addition, ni pour la multiplication externe.

B. D. Soient $A = (a_{ij})$ et $B = (b_{ij})$ deux matrices stochastiques d'ordre r et $C = AB = (c_{ij})$ leur produit.
Pour tout $(i, j) \in \llbracket 1, r \rrbracket^2$ on a

$$c_{ij} = \sum_{k=1}^r a_{ik} b_{kj}$$

- Puisque les coefficients de A et de B sont tous positifs, il en est de même de ceux de C.
- La somme des coefficients de la ligne i de la matrice C vaut :

$$\sum_{j=1}^r c_{ij} = \sum_{j=1}^r \sum_{k=1}^r a_{ik} b_{kj} = \sum_{k=1}^r \underbrace{\left(\sum_{j=1}^r b_{kj} \right)}_{=1 \text{ car } B \in \mathcal{S}_r} a_{ik} = \sum_{k=1}^r a_{ik} \underbrace{= 1}_{\text{car } A \in \mathcal{S}_r}$$

- et puisque la somme des c_{ij} , tous positifs, est égale à 1, les coefficients sont forcément compris entre 0 et 1.

Ainsi, la matrice C est aussi stochastique.

Conclusion :

Q1 : Réponse B

2. A. B. C'est évidemment la réponse A qui convient.

C. D. Le polynôme caractéristique d'une matrice 2×2 est égal à $X^2 - \text{tr}(A)X + \det A$. D'après le théorème de Cayley-Hamilton, c'est un polynôme annulateur de A, donc $A^2 = \text{tr}(A)A + (\det A)I_2$, ce qui donne la formule de la réponse C.

Q2 : Réponses A,C

3. On montre par récurrence l'existence de suites de réels (a_n) et (b_n) telles que $A^n = a_n A + b_n I_2$ pour $n \in \mathbb{N}^*$:

- C'est évidemment vrai pour $n = 1$ (avec $a_1 = 1$ et $b_1 = 0$) et pour $n = 2$ d'après la question précédente (avec $a_2 = \frac{5}{6}$ et $b_2 = \frac{1}{6}$) (ce serait aussi vrai pour $n = 0$, mais l'énoncé l'exclut).

- Supposons l'égalité réalisée à l'ordre n . Alors

$$A^{n+1} = A^n \cdot A = (a_n A + b_n I_2)A = a_n A^2 + b_n A = a_n \left(\frac{5}{6}A + \frac{1}{6}I_2 \right) + b_n A = \left(\frac{5}{6}a_n + b_n \right) A + \frac{a_n}{6}$$

ce qui donne le résultat à l'ordre $n + 1$ avec $a_{n+1} = \frac{5}{6}a_n + b_n$ et $b_{n+1} = \frac{a_n}{6}$.

On trouve donc les égalités de la réponse D ; cependant, cette réponse est inexacte puisque, la famille $\{A, I_2\}$ étant libre, il y a unicité de l'écriture.

En conclusion :

Q3 : Réponse E (pas de réponse exacte)

4. En reprenant les calculs précédents, on obtient $a_{n+1} + b_{n+1} = a_n + b_n$, donc la suite $(a_n + b_n)$ est constante. Elle est égale à $a_1 + b_1 = 1$. C'est la réponse A.

On a alors $a_{n+1} = \frac{5}{6}a_n + b_n = \frac{5}{6}a_n + (1 - a_n) = 1 - \frac{a_n}{6}$ et $b_{n+1} = \frac{a_n}{6} = \frac{1 - a_n}{6}$.

Q4 : Réponses A,D

5. (a_n) est ainsi une suite arithmético-géométrique, dont l'étude a été faite en cours. On en rappelle brièvement le principe :

- On cherche le réel ℓ tel que $\ell = 1 - \frac{\ell}{6}$; on obtient $\ell = \frac{6}{7}$.
- puis la relation $a_{n+1} = 1 - \frac{a_n}{6}$, à laquelle on soustrait la relation $\ell = 1 - \frac{\ell}{6}$, donne $a_{n+1} - \ell = -\frac{1}{6}(a_n - \ell)$, i.e. que $(a_n - \ell)$ est une suite géométrique de raison $-\frac{1}{6}$.

Cela permet d'obtenir $a_n - \ell = \left(-\frac{1}{6}\right)^{n-1} (a_1 - \ell)$ soit $a_n - \frac{6}{7} = \frac{1}{7} \left(-\frac{1}{6}\right)^{n-1}$ d'où $a_n = \frac{1}{7} \left(-\frac{1}{6}\right)^{n-1} + \frac{6}{7}$.

Enfin, puisque $b_n = 1 - a_n$ on obtient $b_n = \frac{1}{7} - \frac{1}{7} \left(-\frac{1}{6}\right)^{n-1}$.

Q5 : Réponse D

6. $\lim_{n \rightarrow +\infty} a_n = \frac{6}{7}$ et $\lim_{n \rightarrow +\infty} b_n = \frac{1}{7}$, donc la relation $A^n = a_n A + b_n I_2$ permet de conclure que la suite (A^n) converge vers la matrice $A^\infty = \frac{6}{7}A + \frac{1}{7}I_2 = \frac{1}{7} \begin{pmatrix} 3 & 4 \\ 3 & 4 \end{pmatrix}$. C'est une matrice de $\mathcal{S}_2^*$, et c'est celle de la réponse D. En conclusion :

Q6 : Réponses C,D

7. A. La matrice B n'est pas triangulaire supérieure !
 B. L'équivalence proposée est *fausse* ; en effet, une matrice est diagonalisable si et seulement si elle annule un polynôme scindé à racines simples, qui n'est pas forcément le polynôme caractéristique.
 C. On calcule :

$$\begin{aligned} \chi_B(\lambda) &= \begin{vmatrix} \frac{2}{3} - \lambda & \frac{1}{3} & 0 \\ \frac{3}{7} & \frac{4}{7} - \lambda & 0 \\ \frac{2}{9} & \frac{1}{3} & \frac{4}{9} - \lambda \end{vmatrix} \stackrel{C_1 \leftarrow C_1 + C_2 + C_3}{=} \begin{vmatrix} 1 - \lambda & \frac{1}{3} & 0 \\ 1 - \lambda & \frac{4}{7} - \lambda & 0 \\ 1 - \lambda & \frac{1}{3} & \frac{4}{9} - \lambda \end{vmatrix} \\ &= (1 - \lambda) \begin{vmatrix} 1 & \frac{1}{3} & 0 \\ 1 & \frac{4}{7} - \lambda & 0 \\ 1 & \frac{1}{3} & \frac{4}{9} - \lambda \end{vmatrix} \stackrel{C_2 \leftarrow C_2 - C_1, C_3 \leftarrow C_3 - C_1}{=} (1 - \lambda) \begin{vmatrix} 1 & \frac{1}{3} & 0 \\ 0 & \frac{5}{21} - \lambda & 0 \\ 0 & 0 & \frac{4}{9} - \lambda \end{vmatrix} \\ &= (1 - \lambda) \left(\frac{5}{21} - \lambda \right) \left(\frac{4}{9} - \lambda \right) \end{aligned}$$

- D. Ce polynôme caractéristique de B est scindé à racines simples ; d'après le théorème de Cayley-Hamilton, il est aussi annulateur de B. Donc :

Q7 : Réponses C,D

8. Soit $X = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$. On résout le système $BX = \lambda X$ pour les trois valeurs propres de B :

- Pour $\lambda = \frac{5}{21} = \lambda_1$:

$$BX = \frac{5}{21}X \iff \begin{cases} \frac{9}{21}x + \frac{1}{3}y = 0 \\ \frac{3}{7}x + \frac{7}{21}y = 0 \\ \frac{2}{9}x + \frac{1}{3}y + \frac{13}{63}z = 0 \end{cases} \iff \begin{cases} 9x + 7y = 0 \\ 9x + 7y = 0 \\ 14x + 21y + 13z = 0 \end{cases}$$

Ainsi $E_{\lambda_1}(B)$ est la droite vectorielle de base $\begin{pmatrix} 7 \\ -9 \\ 7 \end{pmatrix}$.

– Pour $\lambda = \frac{4}{9} = \lambda_2$:

$$BX = \frac{4}{9}X \iff \begin{cases} \frac{2}{9}x + \frac{1}{3}y = 0 \\ \frac{3}{7}x + \frac{8}{63}y = 0 \\ \frac{2}{9}x + \frac{1}{3}y = 0 \end{cases} \iff \begin{cases} 2x + 3y = 0 \\ 27x + 8y = 0 \\ 2x + 3y = 0 \end{cases} \iff x = y = 0$$

Ainsi $E_{\lambda_2}(B)$ est la droite vectorielle de base $\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$ (ce qui se voyait directement compte tenu de la forme de la troisième colonne de B !).

– Pour $\lambda = 1 = \lambda_3$, puisque la matrice est stochastique on a $B \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$, donc $E_{\lambda_3}(B)$ est la droite vectorielle de base $\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$.

Finalement, et en lisant bien l'énoncé :

Q8 : Réponse E (pas de réponse exacte)

9. A. D. On peut répondre à ces deux questions sans calculs ! En effet, si on se donne P^{-1} la matrice P est forcément unique donc la réponse A est fausse, et il existe évidemment une infinité de matrices de passage (le choix des vecteurs de base des sous-espaces propres n'est pas unique) donc la réponse D est fausse.

B. C. D'après ce qui précède, en posant $P = \begin{pmatrix} 7 & 0 & 1 \\ -9 & 0 & 1 \\ 7 & 1 & 1 \end{pmatrix}$, on a $B = PDP^{-1}$. Si on calcule, on trouve alors pour P^{-1} la matrice donnée dans l'énoncé aux réponses B et C.

Q9 : Réponse B

10. On aura $B^n = PD^nP^{-1}$, donc il « suffit » de faire le calcul... et on trouve la matrice de la réponse A (notons que la formule est encore vraie pour $n = 0$).

La matrice B étant dans $\mathcal{S}_3$, il en est de même des matrices B^n puisque $\mathcal{S}_3$ est stable par multiplication. Le calcul précédent donne aussi la limite :

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} B^n = B^\infty = \frac{1}{16} \begin{pmatrix} 9 & 7 & 0 \\ 9 & 7 & 0 \\ 9 & 7 & 0 \end{pmatrix}$$

qui est une matrice de $\mathcal{S}_3$ mais pas de $\mathcal{S}_3^*$.

Q10 : Réponses A,D

11. A. C n'est pas triangulaire inférieure !

B. C est triangulaire supérieure donc ses valeurs propres sont ses éléments diagonaux. Cependant, le fait qu'il y ait une valeur propre double n'empêche pas *a priori* C d'être diagonalisable ! (la condition de l'énoncé est suffisante mais pas nécessaire).

C. fantaisiste !

D. Si on résoud l'équation $CX = \frac{1}{2}X$ on obtient le système
$$\begin{cases} \frac{1}{2}y = 0 \\ \frac{1}{2}z = 0 \\ \frac{1}{2}z = 0 \end{cases}$$

valeur propre double $\frac{1}{2}$ est la droite de base $\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$, donc C n'est pas diagonalisable (on pouvait aussi vérifier en calculant que le polynôme donné par l'énoncé n'est pas annulateur de C).

Q11 : Réponse E (pas de réponse exacte)

12. A. B. On calcule et on trouve $J^2 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$ puis $J^3 = J^2$. On a donc $J^n = J^2$ pour tout entier $n \geq 2$.

J n'est donc pas nilpotente, la suite (J^n) est bien stationnaire mais à partir de $n = 2$ (et non $n = 1$ comme le dit l'énoncé de la réponse B).

C. D. $C = \frac{1}{2}(I_3 + J)$. Puisque les matrices I_3 et J commutent, on peut appliquer la formule du binôme :

$$J^n = \left(\frac{1}{2}\right)^n \left(\sum_{k=0}^n \binom{n}{k} J^k\right) = \left(\frac{1}{2}\right)^n \left(I_3 + nJ + \left(\sum_{k=2}^n \binom{n}{k}\right) J^2\right) \quad (1)$$

Or $\sum_{k=2}^n \binom{n}{k} = \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} - 1 - n = 2^n - 1 - n$, et en remplaçant dans (1) on obtient la formule de la réponse C.

Q12 : Réponse C

13. La matrice C étant dans $\mathcal{S}_3$, il en est de même des matrices C^n puisque $\mathcal{S}_3$ est stable par multiplication.

D'après le résultat précédent, puisque $\lim_{n \rightarrow +\infty} \left(\frac{1}{2}\right)^n = \lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{n}{2^n} = 0$, on obtient $\lim_{n \rightarrow +\infty} C^n = J^2$.

La formule de la réponse C est exacte, et s'obtient directement d'après la question précédente.

Q13 : Réponses B,C

14. Nous avons déjà répondu à ces questions dans la question 1.

Q14 : Réponses B,D

15. A. B. Soit V le vecteur de $\mathbb{M}_{r,1}(\mathbb{R})$ dont toutes les composantes sont égales à 1. Quand on effectue le produit AV , on obtient une matrice colonne dont la i -ième composante est la somme des termes de la i -ème ligne de A . Si A est stochastique, on aura donc $AV = V$, ce qui est la réponse A.

C. D. $\mathcal{S}_r$ étant stable par multiplication interne, la matrice A^n appartient encore à $\mathcal{S}_r$, mais pas forcément à $\mathcal{S}_r^*$.

Q15 : Réponse A

16. A. B. Pour tout $(i, j) \in \llbracket 1, r \rrbracket^2$, l'application p_{ij} qui à toute matrice M de $\mathbb{M}_r(\mathbb{R})$ associe le coefficient m_{ij} est continue de $\mathbb{M}_r(\mathbb{R})$ dans $\mathbb{R}$ (il s'agit d'une forme linéaire sur un espace vectoriel de dimension finie),

et, pour tout $i \in \llbracket 1, r \rrbracket$, l'application s_i qui à M associe $\sum_{j=1}^r m_{ij}$ est aussi continue comme somme de telles applications. Avec ces notations :

$$\mathcal{S}_r = \left(\bigcap_{1 \leq i, j \leq r} p_{ij}^{-1}([0, 1]) \right) \cap \left(\bigcap_{1 \leq i \leq r} s_i^{-1}(\{1\}) \right)$$

L'image réciproque d'une partie fermée par une application continue étant un fermé, et l'intersection de fermés étant un fermé, il en résulte que $\mathcal{S}_r$ est une partie fermée de $\mathbb{M}_r(\mathbb{R})$.

D'après la caractérisation séquentielle des fermés, la limite de toute suite convergente d'éléments de $\mathcal{S}_r$ appartient encore à $\mathcal{S}_r$. Puisque A appartient à $\mathcal{S}_r$, il en est de même des matrices A^n puisque $\mathcal{S}_r$ est stable par multiplication., donc $A^\infty = \lim_{n \rightarrow +\infty} A^n$ appartient à $\mathcal{S}_r$.

C. D. Les applications linéaires $M \mapsto MA$ et $M \mapsto AM$ étant continues sur l'espace de dimension finie $\mathbb{M}_r(\mathbb{R})$, on peut « passer à la limite » dans l'égalité $A^{n+1} = A.A^n = A^n.A$ et on obtient $A^\infty = A.A^\infty = A^\infty.A$.

Q16 : Réponses B,C

17. Soit M une matrice à diagonale strictement dominante. Si M n'était pas inversible, l'endomorphisme qui lui est canoniquement associé ne serait pas bijectif donc pas injectif, et il existerait un vecteur colonne non nul X tel que $MX = 0$.

Notons $X = {}^t(x_1 \quad \dots \quad x_r)$, et soit i_0 un indice tel que $|x_{i_0}| = \max_{1 \leq i \leq r} |x_i|$. La i_0 -ème ligne du système $MX = 0$ s'écrit

$$\sum_{k=1}^r m_{i_0 k} x_k = 0 \quad \text{soit} \quad m_{i_0, i_0} x_{i_0} = - \sum_{k \neq i_0} m_{i_0 k} x_k \quad \text{d'où} \quad |m_{i_0, i_0}| |x_{i_0}| \leq \sum_{k \neq i_0} |m_{i_0 k}| |x_k|$$

Puisque $X \neq 0$, on a $|x_{i_0}| \neq 0$ et on obtient

$$|m_{i_0, i_0}| \leq \sum_{k \neq i_0} |m_{i_0 k}| \frac{|x_k|}{|x_{i_0}|} \leq \sum_{k \neq i_0} |m_{i_0 k}|$$

puisque $|x_k| \leq |x_{i_0}|$ pour tout k . Cela contredit l'hypothèse que M est à diagonale strictement dominante.

Cela prouve, par l'absurde, que M est inversible (il s'agit d'un résultat bien connu, c'est le *théorème d'Hadamard*).

Cependant, si M est à diagonale strictement dominante, il n'y a aucune raison qu'elle soit diagonalisable : exemple : $M = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}$.

Q17 : Réponse A

18. A. B. La matrice C_1 est une matrice de $\mathbb{M}_{r-1}(\mathbb{R})$, donc la réponse A est fausse.

On a alors, pour tout $i \in \llbracket 1, r-1 \rrbracket$:

$$\sum_{\substack{1 \leq j \leq r-1 \\ j \neq i}} |c_{ij}| = \sum_{\substack{1 \leq j \leq r-1 \\ j \neq i}} a_{ij} = \underbrace{\sum_{j=1}^r a_{ij}}_{=1 \text{ car } A \in \mathcal{S}_r} - a_{ii} - a_{ir} \underset{\text{car } a_{ir} > 0}{<} 1 - a_{ii} = -c_{ii} = |c_{ii}|$$

ce qui montre que C_1 est à diagonale strictement dominante : la réponse B est inexacte.

C. D. C_1 , matrice d'ordre $r-1$ extraite de B étant inversible d'après le théorème d'Hadamard, on a $\text{rg } B \geq r-1$, soit $\dim \text{Ker}(A - I_r) \leq 1$. Puisqu'on sait déjà que 1 est valeur propre de A , on aura $\dim \text{Ker}(A - I_r) = 1$, d'où $\text{rg } B = r-1$.

Q18 : Réponse C

19. Puisque λ est une valeur propre de A , la matrice $A - \lambda I_r$ n'est pas inversible, donc a fortiori n'est pas à diagonale strictement dominante. Cela s'écrit, en faisant la négation de la définition :

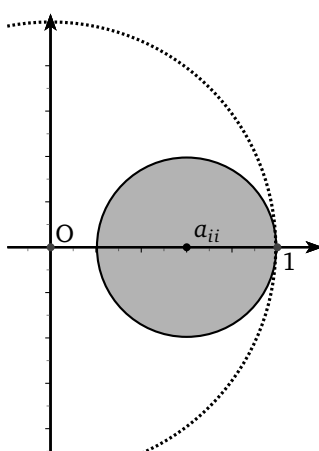
$$\exists i \in \llbracket 1, r \rrbracket \text{ tq } |a_{ii} - \lambda| \leq \sum_{j \neq i} |a_{ij}|$$

ou encore, compte tenu du fait que A appartient à $\mathcal{S}_r^*$:

$$\exists i \in \llbracket 1, r \rrbracket \text{ tq } |a_{ii} - \lambda| \leq 1 - a_{ii}$$

La réponse D est donc fausse. On obtient aussi le résultat de la réponse A bien que celle-ci soit mal formulée (il manque « il existe i tel que... »). On notera aussi que l'énoncé semble supposer λ complexe, il faut donc adapter les résultats précédents et en particulier la définition d'une matrice à diagonale strictement dominante lorsqu'elle est à coefficients complexes (en remplaçant la valeur absolue par le module, ce qui n'est pas gênant dans les démonstrations précédentes).

Bref, tout ceci étant ajouté à l'énoncé, on pourra considérer que la réponse A est exacte. Il en résulte que les valeurs propres (complexes) de A sont de module inférieur ou égal à 1, comme le montre la figure ci-dessous (la valeur propre λ a son image dans le plan complexe située dans le disque grisé) :



Q19 : Réponse A

20. On vient de voir ci-dessus que les valeurs propres de A sont toutes de module inférieur ou égal à 1, et que 1 est valeur propre. Donc les réponses A et B sont fausses.

Le déterminant de A est le produit de ses valeurs propres complexes $\lambda_1, \dots, \lambda_n$ donc $|\det A| = \prod_{i=1}^n |\lambda_i| \leq 1$.

Et puisque $\det A \leq |\det A|$, la réponse C est exacte.

Q20 : Réponse C

21. On raisonne comme il est indiqué, par récurrence sur r :

- L'énoncé imposant $r \geq 2$, on ne peut donc pas commencer la récurrence avec $r = 1$ (bien que cela soit parfaitement possible !).

Pour $r = 2$, une matrice M vérifiant les conditions de l'énoncé est de la forme $M = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$ avec $a, b, c, d \in]0, 1[$, $a + b \leq 1$ et $c + d \leq 1$. On a alors $|\det M| = |ad - bc| \leq ad + bc < a + b \leq 1$.

La propriété de la réponse B est donc vérifiée pour $r = 2$.

- Supposons-là vérifiée au rang $r - 1$, et soit M une matrice carrée d'ordre r vérifiant les propriétés de l'énoncé.

En développant le déterminant de M selon la 1^{ère} ligne, on a :

$$\det M = \sum_{j=1}^r m_{1,j} \det M_j$$

où M_j est la matrice d'ordre $r - 1$ obtenue en supprimant la 1^{ère} ligne et la j -ième colonne de M . Clairement, les matrices M_j vérifient la propriété de l'énoncé à l'ordre $r - 1$, et on a donc d'après l'hypothèse de récurrence, $|\det M_j| < 1$. On aura donc, les coefficients $m_{1,j}$ étant strictement positifs :

$$|\det M| \leq \sum_{j=1}^r m_{1,j} |\det M_j| < \sum_{j=1}^r m_{1,j} \leq 1$$

ce qui établit la propriété à l'ordre r .

La réponse B est donc exacte ; toute matrice stochastique stricte vérifiant aussi les conditions de l'énoncé, la réponse C est également vraie.

Q21 : Réponses B,C

PARTIE II

22. A. Réponse exacte : la justification est dans l'énoncé !

B. Pour tout $x \in \mathbb{R}$, la fonction $t \mapsto g(x, t)$ est positive et continue sur $\mathbb{R}$ et on a, pour tout $(x, t) \in \mathbb{R}^2$, $0 \leq g(x, t) \leq \frac{1}{1+t^2}$. La fonction $t \mapsto \frac{1}{1+t^2}$ étant intégrable sur $\mathbb{R}$, il en est de même de $t \mapsto g(x, t)$.

C.D Réponses évidemment fausses, comme le montre l'exemple de la fonction $t \mapsto \frac{1}{t+1}$ sur $[0, +\infty[$ ou sur $] -1, +\infty[$.

En conclusion :

Q22 : Réponse A

23. A.B. On vérifie les hypothèses du théorème sur la dérivabilité d'une intégrale à paramètre :

- Pour tout $x \in \mathbb{R}$, $t \mapsto g(x, t)$ est continue sur $[0, 1]$, et y est donc intégrable.
- Pour tout $(x, t) \in \mathbb{R} \times [0, 1]$, $\frac{\partial g}{\partial x}(x, t) = -2xe^{-x^2(1+t^2)}$ existe, et est continue par rapport à x et à t .
- Soit $[-a, a]$ un segment de $\mathbb{R}$ ($a > 0$). Pour tout $x \in [-a, a]$, $\left| \frac{\partial g}{\partial x}(x, t) \right| \leq 2a$, et la fonction constante $\varphi : t \mapsto 2a$ est continue et intégrable sur $[0, 1]$.

Le théorème du cours permet donc d'affirmer que G est de classe $\mathcal{C}^1$ sur $\mathbb{R}$, et que, pour tout $x \in \mathbb{R}$,

$$G'(x) = -2x \int_0^1 e^{-x^2(1+t^2)} dt = -2xe^{-x^2} \int_0^1 e^{-x^2 t^2} dt.$$

La formule de la réponse B est donc inexacte.

C.D. La fonction $x \mapsto \int_0^x h(t) dt$ est la primitive s'annulant en 0 de la fonction continue h ; elle est donc de classe $\mathcal{C}^1$ sur $\mathbb{R}$, et il en est de même de H .

Et l'on a, pour tout $x \in \mathbb{R}$: $H'(x) = 2h(x) \int_0^x h(t) dt$.

Q23 : Réponse E (pas de réponse exacte)

24. On continue le calcul ci-dessus : pour tout x réel non nul :

$$G'(x) = -2xe^{-x^2} \int_0^1 e^{-x^2 t^2} dt = -2xe^{-x^2} \int_0^x e^{-u^2} \frac{du}{x} = -2h(x) \int_0^x h(u) du$$

en posant $u = tx$, le résultat final restant vrai pour $x = 0$ par continuité.

Ainsi, $H'(x) = -G'(x)$, donc $H + G$ est constante. Et on a donc

$$\forall x \in \mathbb{R}, H(x) + G(x) = H(0) + G(0) = G(0) = \int_0^1 \frac{dt}{1+t^2} = \text{Arc tan } 1 = \frac{\pi}{4}$$

Q24 : Réponses B,C

25. A.B. Pour tout $(x, t) \in \mathbb{R} \times [0, 1]$, $0 \leq \frac{e^{-x^2(1+t^2)}}{1+t^2} \leq e^{-x^2}$ d'où $0 \leq G(x) \leq e^{-x^2}$.

Il résulte alors du théorème d'encadrement que $\lim_{x \rightarrow +\infty} G(x) = 0$ (Rem : la raison donnée dans la réponse B de l'énoncé est incomplète, mais pas vraiment inexacte).

C.D. Compte tenu de la relation trouvée à la question précédente, on en déduit $\lim_{x \rightarrow +\infty} H(x) = \frac{\pi}{4}$,

soit $\lim_{x \rightarrow +\infty} \left(\int_0^x h(t) dt \right)^2 = \frac{\pi}{4}$. L'intégrale $\int_0^x h(t) dt$ étant positive pour $x \geq 0$, il en résulte que $\lim_{x \rightarrow +\infty} \int_0^x h(t) dt$ existe et vaut $\frac{\sqrt{\pi}}{2}$ (intégrale de Gauss).

Q25 : Réponses B,D

26. A. Réponse fausse : prendre par exemple $t = 0$ et $f : t \mapsto \frac{1}{1+t^2} : l(x, 0) = 1$, fonction constante non nulle donc non intégrable sur $\mathbb{R}$.

B.C.D. Pour tout x réel, on a $|l(x, t)| \leq |f(t)|$. Puisque l'intégrale $\int_{\mathbb{R}} |f(t)| dt$ existe et que la fonction $t \mapsto l(x, t)$ est continue, il en résulte que cette fonction est bien intégrable sur $\mathbb{R}$.

Cependant :

- la raison donnée par l'énoncé dans la réponse B est inexacte : il existe en effet des fonctions f continues et intégrables sur $\mathbb{R}$ et qui ne sont pas bornées... De plus, le fait pour une fonction d'être de module borné ne suffit pas à dire qu'elle est intégrable !
 - la raison donnée dans la réponse C est doublement inexacte : il se peut que le produit de deux fonctions intégrables ne soit pas intégrable (par exemple, le produit de la fonction $t \mapsto \frac{1}{\sqrt{t}}$ par elle-même sur l'intervalle $]0, 1[$...).
- D'autre part, ici, la fonction $t \mapsto e^{-2i\pi xt}$ n'est pas intégrable sur $\mathbb{R}$!

Q26 : Réponse E (pas de réponse exacte)

27. On vient de voir que, pour tout x réel, la fonction $t \mapsto l(x, t)$ est intégrable sur $\mathbb{R}$, donc F est définie sur $\mathbb{R}$.

Elle y est de plus continue d'après le théorème sur la continuité d'une intégrale à paramètre ; en effet :

- Pour tout x réel, $t \mapsto l(x, t)$ est continue (par morceaux) sur $\mathbb{R}$.
- Pour tout t réel, $x \mapsto l(x, t)$ est continue sur $\mathbb{R}$.
- $\forall (x, t) \in \mathbb{R}^2$, $|l(x, t)| = |f(t)|$ avec $|f|$ continue (par morceaux) et intégrable sur $\mathbb{R}$ (hypothèse de domination).

Enfin, on a, pour tout x réel : $|F(x)| = \left| \int_{\mathbb{R}} l(x, t) dt \right| \leq \int_{\mathbb{R}} |l(x, t)| dt = \int_{\mathbb{R}} |f(t)| dt$, donc F est bornée sur $\mathbb{R}$. La « raison » invoquée à la fin de la réponse D est, quant à elle, complètement farfelue.

Q27 : Réponse B

28. A.B. On fait une intégration par parties (les détails sont justifiés à la fin du calcul) :

$$\begin{aligned} -2i\pi x F(x) &= \int_{\mathbb{R}} \underbrace{(-2i\pi x e^{-2i\pi xt})}_{u'(t)} \cdot \underbrace{\frac{1}{1+t^2}}_{v(t)} dt \\ &= \left[e^{-2i\pi xt} \cdot \frac{1}{1+t^2} \right]_{t \rightarrow -\infty}^{t \rightarrow +\infty} - \int_{\mathbb{R}} e^{-2i\pi xt} \cdot \frac{(-2t)}{(1+t^2)^2} dt \\ &= 2 \int_{\mathbb{R}} e^{-2i\pi xt} \cdot \frac{t}{(1+t^2)^2} dt \end{aligned}$$

puisque $\left| e^{-2i\pi xt} \cdot \frac{1}{1+t^2} \right| = \frac{1}{1+t^2} \xrightarrow{t \rightarrow +\infty} 0$. D'où :

$$\pi x F(x) = -\frac{1}{i} \int_{\mathbb{R}} e^{-2i\pi xt} \cdot \frac{t}{(1+t^2)^2} dt = i \int_{\mathbb{R}} e^{-2i\pi xt} \cdot \frac{t}{(1+t^2)^2} dt$$

C.D. On en déduit, pour tout x réel

$$|\pi x F(x)| \leq \int_{\mathbb{R}} |e^{-2i\pi xt}| \cdot \left| \frac{t}{(1+t^2)^2} \right| dt = \int_{\mathbb{R}} \frac{|t| dt}{(1+t^2)^2} = 2 \int_0^{+\infty} \frac{t dt}{(1+t^2)^2} = \left[-\frac{2}{2(1+t^2)} \right]_0^{+\infty} = 1$$

ce qui donne l'inégalité de la réponse C, *mais seulement pour $x \neq 0$!* Cela permet néanmoins de prouver que la réponse D est exacte. En conclusion :

Q28 : Réponses A,D

29. Puisque l'énoncé suppose toujours ici (comme il a été dit au début de la question 28) que $f(t) = \frac{1}{1+t^2}$, on a directement $F_1(x) = \frac{1}{i} \pi x F(x)$. F étant continue sur $\mathbb{R}$ (question 27), il en est de même de F_1 .

L'inégalité obtenue à la question précédente donne également directement $|F_1(x)| \leq 1$, d'où la réponse C (la justification donnée dans cette réponse est exacte et servirait éventuellement à appliquer de nouveau le théorème sur la continuité d'une intégrale à paramètre, ce qui a déjà été fait). Finalement :

Q29 : Réponse C

30. Il s'agit ici d'appliquer le théorème sur la dérivation d'une intégrale à paramètres. Pour tout $(x, t) \in \mathbb{R}^2$ on a

$$\left| \frac{\partial}{\partial x} \left(t e^{-2i\pi xt} (f(t))^2 \right) \right| = \left| -2i\pi e^{-2i\pi xt} \frac{t^2}{(1+t^2)^2} \right| \leq \frac{2\pi}{1+t^2} = \varphi(t)$$

avec φ continue et intégrable sur $\mathbb{R}$, ce qui est l'hypothèse de domination. Les autres hypothèses du théorème sont immédiates, ce qui permet de conclure que F_1 est de classe $\mathcal{C}^1$ sur $\mathbb{R}$ et que :

$$\forall x \in \mathbb{R}, F_1'(x) = -2i\pi \int_{\mathbb{R}} e^{-2i\pi xt} \frac{t^2}{(1+t^2)^2} dt = -2i\pi \int_{\mathbb{R}} e^{-2i\pi xt} \frac{(t^2+1)-1}{(1+t^2)^2} dt = -2i\pi \left(F(x) - \int_{\mathbb{R}} e^{-2i\pi xt} \frac{dt}{(1+t^2)^2} \right)$$

Puisque $F_1(x) = -i\pi x F(x)$, on en déduit déjà que F est de classe $\mathcal{C}^1$ sur $\mathbb{R}^*$ (ainsi les réponses A et B sont fausses) et que

$$\forall x \in \mathbb{R}^*, -i\pi(xF'(x) + F(x)) = -2i\pi F(x) + 2i\pi \int_{\mathbb{R}} e^{-2i\pi xt} \frac{dt}{(1+t^2)^2}$$

ce qui conduit à :

$$\forall x \in \mathbb{R}^*, F(x) - xF'(x) = 2 \int_{\mathbb{R}} e^{-2i\pi xt} \frac{dt}{(1+t^2)^2}$$

Il s'agit de l'expression de la réponse C, mais seulement sur $\mathbb{R}^*$: on ne peut pas dire pour l'instant si F est de classe $\mathcal{C}^1$ sur $\mathbb{R}$! Comme on le verra à la question 32 seulement, F n'est en fait pas dérivable en 0, de sorte que la réponse C est inexacte !

Q30 : Réponse E (pas de réponse exacte)

31. En posant, pour $x \in \mathbb{R}$, $G(x) = \int_{\mathbb{R}} e^{-2i\pi xt} \frac{dt}{(1+t^2)^2}$, il est facile de vérifier, encore à l'aide du théorème de dérivation d'une intégrale à paramètre, que G est de classe $\mathcal{C}^1$ sur $\mathbb{R}$ et que, pour tout x réel, $G'(x) = -2i\pi \int_{\mathbb{R}} e^{-2i\pi xt} \frac{t dt}{(1+t^2)^2} = -2i\pi F_1(x)$.

La relation $F(x) - xF'(x) = 2G(x)$ (valable pour $x \neq 0$) obtenue à la question précédente permet donc de montrer que F est de classe $\mathcal{C}^2$ sur $\mathbb{R}^*$ (là encore, il est impossible de répondre pour l'instant à la question A, qui s'avèrera inexacte dans la question 32), et que

$$\forall x \in \mathbb{R}^*, -xF''(x) = 2G'(x) = -4i\pi F_1(x) = -4i\pi(-i\pi xF(x)) = -4\pi^2 xF(x)$$

c'est-à-dire $F''(x) = 4\pi^2 F(x)$ pour $x \neq 0$.

Q31 : Réponses B,C

32. La solution générale de l'équation différentielle précédente est

$$F(x) = \begin{cases} A_1 e^{-2\pi x} + B_1 e^{2\pi x} & \text{si } x < 0 \\ A_2 e^{-2\pi x} + B_2 e^{2\pi x} & \text{si } x > 0 \end{cases}$$

De plus, $\lim_{x \rightarrow -\infty} F(x) = \lim_{x \rightarrow +\infty} F(x) = 0$, ce qui exige $A_1 = B_2 = 0$, et F est continue en 0 avec

$$F(0) = \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{dt}{1+t^2} = \pi, \text{ ce qui donne ensuite } B_1 = A_2 = \pi.$$

La bonne réponse est donc la réponse D, et elle montre, *a posteriori*, que F n'est pas dérivable en 0 puisque $F'_g(0) = 2\pi^2$ et $F'_d(0) = -2\pi^2$.

Q32 : Réponse D

PARTIE III

33. A.B. Calcul élémentaire :

$$\begin{aligned} u_{n+1} - u_n &= \frac{1}{n+1} - \ln\left(\frac{n+1}{n}\right) \\ &= \frac{1}{n} \frac{1}{1 + \frac{1}{n}} - \ln\left(1 + \frac{1}{n}\right) = \frac{1}{n} \left(1 - \frac{1}{n} + o\left(\frac{1}{n}\right)\right) - \left(\frac{1}{n} - \frac{1}{2n^2} + o\left(\frac{1}{n^2}\right)\right) \\ &= -\frac{1}{2n^2} + o\left(\frac{1}{n^2}\right) \end{aligned}$$

C.D La réponse C, avec ses explications détaillées, serait presque juste, mais d'après le développement limité précédent, $u_{n+1} - u_n$ est *négligeable* à partir d'un certain rang...

Q33 : Réponse B

34. Encore un calcul élémentaire : pour $t > 0$, $g_x(t) = (\ln t)e^{-x \ln t}$ donc g_x est dérivable sur $\mathbb{R}_+^*$ comme produit de telles fonctions et $g'_x(t) = \left(\frac{1}{t} - x \frac{\ln t}{t}\right) e^{-x \ln t} = (1 - x \ln t)t^{-x-1}$. Ses variations en découlent...

Q34 : Réponses B,D

35. A.B. On remarque que pour $n \in \mathbb{N}^*$, $r_n = g_1(n)$. D'après la question précédente, g_1 est décroissante sur $[e, +\infty[$, donc sur $[3, +\infty[$, donc pour $n \geq 4$, $\int_{n-1}^n g_1(t) dt \geq \int_{n-1}^n g_1(n) dt = g_1(n) = r_n$ et on démontre de la même façon l'inégalité $r_n \geq \int_n^{n+1} g_1(t) dt$ pour $n \geq 3$. (comparaison classique série-intégrale...)

C.D. Il ne reste plus qu'à calculer l'intégrale :

$$\int_{n-1}^n g_1(t) dt = \int_{n-1}^n \frac{\ln t}{t} dt = \left[\frac{1}{2} (\ln t)^2 \right]_{n-1}^n = \frac{(\ln n)^2 - (\ln(n-1))^2}{2}$$

etc... Conclusion :

Q35 : Réponses A,C

36. B.D. La bonne réponse est la réponse D, toutes les explications sont fournies !

A.C. Pour $n \geq 3$ on a, d'après la question précédente :

$$r_{n+1} \leq \frac{(\ln(n+1))^2 - (\ln n)^2}{2} \leq r_n$$

donc la suite (r_n) est décroissante à partir du rang 3. Elle est alternée et de limite nulle, donc on peut appliquer le critère spécial sur les séries alternées.

Q36 : Réponses C,D

37. Encore une question où un calcul élémentaire suffit : $v_n(x) = e^{-x \ln n} - e^{-x \ln(n+1)}$ donc $v'_n(x) = -g_x(n) + g_x(n+1)$.

D'après la question 34, pour $n \geq e^{1/x}$, $g_x(n) \geq g_x(n+1)$ donc $v'_n(x) \leq 0$. Or $n \geq e^{1/x} \iff x \geq \frac{1}{\ln n}$. Puisque $n \geq 3$, $\frac{1}{\ln n} < 1$ donc cette propriété est vraie pour tout $x \in J$, c'est-à-dire que v'_n est négative sur J et v_n est décroissante.

Q37 : Réponse A

38. La réponse est donnée dans l'énoncé...(compte tenu aussi du résultat de la question précédente).

Q38 : Réponse C

39. A.B. Il suffit de calculer $w_n(x) = \frac{1}{n^x} - \int_n^{n+1} t^{-x} dt$ pour $x \geq 1$; en intégrant :

$$w_n(x) = \begin{cases} \frac{1}{n^x} - \frac{(n+1)^{-x+1} - n^{-x+1}}{-x+1} & \text{si } x \neq 1 \\ \frac{1}{n} - (\ln(n+1) - \ln n) & \text{si } x = 1 \end{cases}$$

Sous cette forme, on voit que w_n est continue sur $]1, +\infty[$; de plus, l'argument donné dans la réponse B montre que $\lim_{x \rightarrow 1} w_n(x) = w_n(1)$, donc w_n est aussi continue en 1.

Justification de l'affirmation de l'énoncé :

$$\frac{(n+1)^u - n^u}{u} = \frac{e^{u \ln(n+1)} - e^{u \ln n}}{u} = \frac{1 + u \ln(n+1) - (1 + u \ln n) + o(u)}{u} = \ln(n+1) - \ln n + o(1) \dots$$

C.D. Pour $x \geq 1$, la fonction $t \mapsto \frac{1}{t^x}$ décroît sur l'intervalle $[n, n+1]$ donc, si $n \leq t \leq n+1$,

$\frac{1}{(n+1)^x} \leq \frac{1}{t^x} \leq \frac{1}{n^x}$ et, en intégrant cette inégalité entre n et $n+1$, on obtient

$$\frac{1}{(n+1)^x} \leq \int_n^{n+1} \frac{dt}{t^x} \leq \frac{1}{n^x}$$

ce qui donne $0 \leq w_n(x) \leq v_n(x)$.

Q39 : Réponses B,D

40. D'après les questions 38 et 39, on a :

$$\forall n \geq 3, \forall x \in J, 0 \leq w_n(x) \leq \frac{1}{n(n+1)}$$

donc $\|w_n\|_\infty^J \leq \frac{1}{n(n+1)}$. La série de terme général $\frac{1}{n(n+1)}$ étant convergente, il en résulte que la série de fonctions $\sum w_n$ est normalement convergente sur J.

Elle est donc aussi uniformément convergente sur J, et les fonctions w_n étant continues, il en est de même de sa somme.

En conclusion :

Q40 : Réponse C

