ICNA 2004 (Épreuve commune obligatoire)

PARTIE I

① $$M_{a,b} = \begin{pmatrix} a^2 & ab & ab & b^2 \\ ab & a^2 & b^2 & ab \\ ab & b^2 & a^2 & ab \\ b^2 & ab & ab & a^2 \end{pmatrix}$$

Réponses b)

[Je ne sais pas quoi répondre à d) : $M_{a,b}$ est bien diagonalisable, mais puisque symétrique réelle ($\mathcal{E}$ euclidien)] Disons plutôt : d) fausse.

---

② $$\chi_A(\lambda) = \begin{vmatrix} a^2-\lambda & ab & ab & b^2 \\ ab & a^2-\lambda & b^2 & ab \\ ab & b^2 & a^2-\lambda & ab \\ b^2 & ab & ab & a^2-\lambda \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} (a+b)^2-\lambda & ab & ab & b^2 \\ (a+b)^2-\lambda & a^2-\lambda & b^2 & ab \\ (a+b)^2-\lambda & b^2 & a^2-\lambda & ab \\ (a+b)^2-\lambda & ab & ab & a^2-\lambda \end{vmatrix}$$ (en ajoutant les 3 dernières colonnes à la première)

$$= \left((a+b)^2-\lambda\right) \times \begin{vmatrix} 1 & ab & ab & b^2 \\ 1 & a^2-\lambda & b^2 & ab \\ 1 & b^2 & a^2-\lambda & ab \\ 1 & ab & ab & a^2-\lambda \end{vmatrix} \underset{\substack{L_4 \leftarrow L_4 - L_1 \\ L_3 \leftarrow L_3 - L_2}}{=} \left[(a+b)^2-\lambda\right] \begin{vmatrix} 1 & ab & ab & b^2 \\ 1 & a^2-\lambda & b^2 & ab \\ 0 & b^2-a^2+\lambda & a^2-b^2-\lambda & 0 \\ 0 & 0 & 0 & a^2-b^2-\lambda \end{vmatrix}$$

$$= \left[(a+b)^2-\lambda\right]\left[b^2-a^2+\lambda\right] \begin{vmatrix} 1 & ab & ab & b^2 \\ 1 & a^2-\lambda & b^2 & ab \\ 0 & 1 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & a^2-b^2-\lambda \end{vmatrix}$$

$$= \left[\lambda-(a+b)^2\right]\left[\lambda+b^2-a^2\right]^2 \begin{vmatrix} 1 & ab & ab \\ 1 & a^2-\lambda & b^2 \\ 0 & 1 & -1 \end{vmatrix}$$

Réponses : a) est vraie ; c) et d) sont visiblement fausses (elles donnent un polynôme de degré 3 en λ !) ; enfin b) est fausse, car la matrice écrite est la transposée de celle du a), mais le signe devant le déterminant est changé !!

---

③ La fin du calcul ci-dessus donne déjà 3 valeurs propres :

$\lambda = (a+b)^2$ et $\lambda = a^2-b^2$ (double)

Puisque la somme des valeurs propres est égale à $\mathrm{tr}(M_{a,b}) = 4a^2$, la quatrième valeur propre est : $\lambda = 4a^2 - (a+b)^2 - 2(a^2-b^2) = a^2-2ab+b^2 = (a-b)^2$

Réponse : aucune des réponses proposées n'est vraie !

(4) Seule réponse exacte : b)

(la phrase a) n'a pas de sens : "valeurs propres orthogonales" ?
c) est fausse : $A \in \mathcal{S}_4(\mathbb{R}) \Rightarrow A$ diagonalisable
d) est fausse : 0 peut très bien être valeur propre, par ex. si $a=b$)

---

(5) Problème ! l'énoncé dit : "a ou b nul", sans préciser s'il s'agit ou non d'un ou exclusif... Mais, d'après la réponse c), il semble que a et b peuvent être nuls en même temps...

La seule réponse vraie est alors : c)

---

(6) Si $a^2=b^2\neq 0$, les v.p. sont, d'après le calcul précédent : $(a+b)^2$, 0 (double) et $(a-b)^2$.

Or, puisque $a=\pm b\neq 0$, 0 est en fait valeur propre triple et l'autre v.p. est non nulle. Réponse : a)

[c'est d'ailleurs facile à vérifier : par exemple, si $b=a\neq 0$, $M_{a,a}$ est de rang 1 !]

---

(7) On calcule : $M_{a,b}\begin{pmatrix}1\\0\\0\\0\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}a^2\\ab\\ab\\b^2\end{pmatrix}$ donc e_1 ne peut être vecteur propre que si $b=0$. Ds ce cas, $M_{a,0} = \begin{pmatrix}a^2&&&0\\&a^2&&\\&&a^2&\\0&&&a^2\end{pmatrix}$ et les e_i sont bien des $\vec{vp}$.

Réponse : d)

---

(8) [Un peu d'astuce ici, pour éviter les calculs inutiles : lire d'abord la question 9 !] De plus, on voit facilement que $\begin{pmatrix}1\\1\\1\\1\end{pmatrix}$ est $\vec{vp}$ pour la valeur propre $(a+b)^2$ (truc classique : additionner ttes les colonnes...), donc b) est nécessᵗ fausse (sans calcul) ; a) est visiblement fausse aussi, sans calcul, puisque les vecteurs ne sont pas normés !

Enfin, les vecteurs proposés en c) et d) sont les mêmes (à l'ordre et au signe près) ; comme il n'y a aucune raison qu'il y ait des conditions sur a et b, seule la réponse c) est possible. On vérifie alors facilement.

$$f_{a,b}(\varepsilon_1)=(a+b)^2\varepsilon_1 \;;\; f_{a,b}(\varepsilon_2)=(a^2-b^2)\varepsilon_2 \;;\; f_{a,b}(\varepsilon_3)=(a-b)^2\varepsilon_3$$

et $f_{a,b}(\varepsilon_4)=(a^2-b^2)\varepsilon_4$.

$(\varepsilon_1,\varepsilon_2,\varepsilon_3,\varepsilon_4)$ forment bien une b.o.n de $\vec{vp}$. Réponse : (b)

(9) P est donc la matrice de passage de $\mathcal{D}$ à $(\varepsilon_1, \varepsilon_2, \varepsilon_3, \varepsilon_4)$ orthonormée.

<u>Réponse</u> : a) (⚠ : la réponse c) est fausse, interversion de 2 colonnes)

---

(10) <u>Rem</u> : la phrase n'a pas de sens ! Que veut dire "vecteurs de l'endomorphisme" ?

- Je suppose qu'il s'agit de vecteurs propres... Mézalor, les deux premières colonnes conviennent (avec $c = \frac{1}{2}$, il s'agit de ε_1 et ε_3), mais jamais les dernières ! (il faudrait des vecteurs colinéaires à ε_2 et ε_4 ...)
- Cela dit, pour $\alpha = 1$, $\beta = \gamma = -1$ et $c = \frac{1}{2}$, il est vrai que φ est bien orthogonale ...

<u>Réponse</u> : aucune...

---

(11)
- $|a| \neq |b|$ assure que 0 n'est pas v.p. de $M_{a,b}$, donc que $M_{a,b}$ est inversible.
- La formule du cours est : $A^{-1} = \frac{1}{\det} \tilde{A}$, où $\tilde{A}$ est la <u>transposée</u> de la comatrice

donc <u>c) est vraie</u> <u>ici</u>, car M est symétrique donc $\mathrm{com}(M)$ aussi ! [PIÈGE !]

- b) est <u>fausse</u> (on vérifie rapidement que $f_{a,b}(X) \neq V$, rien que pour la $1^{\text{ère}}$ coord.)
- Le cofacteur d'indice $(1,1)$ de $M_{a,b}$ est : $\begin{vmatrix} a^2 & b^2 & ab \\ b^2 & a^2 & ab \\ ab & ab & a^2 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a^2-b^2 & b^2 & ab \\ b^2-a^2 & a^2 & ab \\ 0 & ab & a^2 \end{vmatrix}$ $(C_1 \leftarrow C_1 - C_2)$

$$= (a^2-b^2) \begin{vmatrix} 1 & b^2 & ab \\ -1 & a^2 & ab \\ 0 & ab & a^2 \end{vmatrix} = (a^2-b^2) \begin{vmatrix} 1 & b^2 & ab \\ 0 & a^2+b^2 & 2ab \\ 0 & ab & a^2 \end{vmatrix} = a^2(a^2-b^2)^2$$

Celui d'indice $(1,2)$ est $- \begin{vmatrix} ab & b^2 & ab \\ ab & a^2 & ab \\ b^2 & ab & a^2 \end{vmatrix} = - \begin{vmatrix} ab & b^2 & ab \\ 0 & a^2-b^2 & 0 \\ b^2 & ab & a^2 \end{vmatrix} = (a^2-b^2)^2(-ab)$

donc (inutile de faire les autres calculs, symétrie) <u>d) est vraie</u>

et, par conséquent (<u>rem</u> : $\det M$ = produit des vp $= (a+b)^2(a^2-b^2)^2(a-b)^2 = (a^2-b^2)^4$)

a) est <u>fausse</u> (il aurait fallu $-ab$ au lieu de ab)

---

(12) a) est évidemment <u>fausse</u>.

Le calcul donne $M_{a,b} M_{a',b'} = M_{A,B}$ avec $A = aa' + bb'$, $B = ab' + ba'$ (inutile de faire tous les calculs, 2 suffisent par symétrie)

Donc la seule réponse vraie est <u>c)</u>

13 • $[P_{a,b}(x)]^n = (x^2-1)Q + R_n$, où $d^\circ R_n \leq 1$

En faisant $x=1$ on trouve $R_n(1) = [P_{a,b}(1)]^n = (a+b)^n$

et $x=-1$ " $R_n(-1) = [P_{a,b}(-1)]^n = (a-b)^n$

Donc $R_n(x) = \frac{1}{2}\left[(a+b)^n + (a-b)^n\right] + \frac{1}{2}\left[(a+b)^n - (a-b)^n\right]x$: a) et b) sont <u>fausses</u>

• De toutes façons, c) et d) sont <u>fausses</u> : il suffit d'essayer pour $n=1$!!

<u>Mais on peut se demander, si on a le temps, le lien entre les 2 parties de la question !</u>

Posons : $(M_{a,b})^n = M_{a_n,b_n}$. On a : $a_0 = 1$, $b_0 = 0$; $a_1 = a$, $b_1 = b$ et, d'après le calcul précédent, la rel. de récurrence : $\begin{cases} a_{n+1} = a\,a_n + b\,b_n \\ b_{n+1} = b\,a_n + a\,b_n \end{cases}$ soit, en posant $V_n = \begin{pmatrix} a_n \\ b_n \end{pmatrix}$

$V_{n+1} = A.V_n$ avec $A = \begin{pmatrix} a & b \\ b & a \end{pmatrix} = aI + bJ$ avec $I = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$, $J = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$

Donc $A^n = (aI+bJ)^n = (J^2 - I)Q(J) + R_n(J) = R_n(J)$ car $J^2 = I$!

$= \frac{1}{2}\left[(a+b)^n + (a-b)^n\right] I + \frac{1}{2}\left[(a+b)^n - (a-b)^n\right] J$

Puisque $V_n = A^n V_0 = \begin{pmatrix} a_n \\ b_n \end{pmatrix}$, on trouve facilement : $\begin{cases} a_n = \frac{1}{2}\left[(a+b)^n + (a-b)^n\right] \\ b_n = \frac{1}{2}\left[(a+b)^n - (a-b)^n\right] \end{cases}$

(ce qui est "presque" le d), à un signe près !)

---

14 • On a vu : $\det M_{a,b} = (a^2-b^2)^4$. $f_{a,b}$ inversible $\iff |a| \neq |b|$; si on suppose $f_{a,b}$ <u>non</u> inversible, on a donc $a = \pm b$.

• Il suffit d'écrire $M_{a,\pm a}$ .. le rang de $M_{a,\pm a}$ est 1 si $a \neq 0$, 0 si $a = 0$.

Les réponses sont donc <u>toutes</u> fausses ! ($a \neq 0$ n'est pas précisé, ou alors j'ai mal lu...)

---

15 • ~~Je pense que l'on suppose toujours $|a| = |b|$ (ce qui n'est pas clair, car l'énoncé dit maintenant : (a,b), (a',b') deux couples de réels...)~~ ! <u>Non</u> ! d'après la suite...

• $M_{a,b} \times M_{a',b'} = 0 \iff \begin{cases} aa' + bb' = 0 \\ a'b + b'a = 0 \end{cases}$. Si $(a',b') \neq (0,0)$, cela implique $M_{a,b}$ non inversible !

Dans le cas $a = b$, on obtient $a(a'+b') = 0$

" " $a = -b$, " $a(a'-b') = 0$

<u>Réponse</u> : <u>d)</u>

---

(16) Réponse : <u>c)</u> cf cours.

PARTIE II

(17) $\forall t>0$, $g'(t) = \dfrac{t\cos t - \sin t}{t^2}$. $\lim\limits_{t\to 0^+} g'(t) = \lim\limits_{t\to 0^+} \dfrac{t(1-\frac{t^2}{2}+o(t^2)) - (t - t^3/6 + o(t^3))}{t^2} = 0$

et, de plus, si $\ell = 1$, $\lim\limits_{t\to 0^+} g(t) = 1 = g(0)$. Donc g est alors continue sur $[0,\pi/2]$ et le th. de prolg^t des f^{s} de classe C^1 assure <u>g de classe C^1 sur $[0,\pi/2]$</u>

Par contre, l'expression de la dérivée donnée en <u>c</u> pose problème pour $t=\pi/2$, même si elle est vraie pour $t\in[0,\pi/2[$ ... Je dirai donc : <u>aucune réponse correcte</u>.

(18) Puisque $t<\tan t$ pour $t\in]0,\pi/2[$ (ineg. de convexité), on a $g'(t)<0$ sur $]0,\frac{\pi}{2}[$

g est donc décroissante sur $]0,\pi/2]$. Pour qu'elle soit décroissante sur $[0,\pi/2]$, il faut et il suffit que $g(0)\geqslant 1$ soit la réponse <u>d)</u>

(19) Evidemment : réponse <u>c)</u> (car il est marqué au début : "pour $\forall$ réel ℓ"...)

(20) Réponses : <u>b)</u> mais (et aussi car $t\mapsto \frac{2}{t^2}\sin^2\frac{t}{2}$ est positive !)

c) est <u>fausse</u> (il y a bien égalité, la valeur de g en 0 important peu)

<u>d)</u> est <u>vraie</u> (poser $u=t/2$ dans l'intégrale précédente)

(22) Réponse immédiate : seule <u>b)</u> est vraie

(23) • On sait que $\displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{\sin t}{t}\,dt$ est convergente, et vaut $\frac{\pi}{2}$, mais pas absolument convergente (fait en classe) Donc a), b), d) sont fausses.

Une intégration par parties donne (en prenant $1-\cos t$ comme primitive de $\sin t$!)

$$\int_0^{+\infty} \frac{\sin t}{t}\,dt = \underbrace{\left[\frac{1-\cos t}{t}\right]_0^{+\infty}}_{=0} + \int_0^{+\infty} \frac{1-\cos t}{t^2}\,dt = \int_0^{+\infty} \frac{2}{t^2}\sin^2\frac{t}{2}\,dt.$$

Donc d) est <u>vraie</u>

(24) • $f(t) \underset{t\to 0^+}{\sim} \frac{1}{t} - \frac{2}{t} = -\frac{1}{t}$ (on a <u>ici</u> le droit d'additionner ces équivalents !) donc $\lim\limits_{t\to 0^+} f(t) = -\infty$, et a) est <u>fausse</u>

• Je n'ai pas sur mon énoncé la fin de la question b) !!

• Enfin, c) et d) sont fausses.

[Rem : ~~Question~~ bizarre : en effet en posant $\dfrac{1}{2\sin\frac{t}{2}} - \dfrac{1}{t}$ pour $t \in]0,\pi]$, cela marchait beaucoup mieux !]

---

(25) • $\varphi_1(x) - 1 = -\dfrac{\sin^2 x}{2} = \dfrac{\cos 2x - 1}{4} = \dfrac{1}{4}\displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty} \dfrac{(-1)^n (2x)^{2n}}{(2n)!}$ donc a) et b) sont fausses

(bien que la "fin" de b) soit juste) le terme en x^6 est : $-\dfrac{x^6}{45}$!

• $\dfrac{\sin^3 x}{x^3} = \dfrac{3\sin x - \sin 3x}{4x^3} = \dfrac{1}{4x^3}\displaystyle\sum_{n=0}^{+\infty} (-1)^n \left[\dfrac{3x^{2n+1}}{(2n+1)!} - \dfrac{(3x)^{2n+1}}{(2n+1)!}\right]$

$$= \frac{1}{4x^3}\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(-1)^n}{(2n+1)!}\, 3.(1-9^n)\, x^{2n+1}$$

$$= \frac{1}{4x^3}\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{(-1)^n}{(2n+1)!}\, 3.(1-9^n)\, x^{2n+1}$$ (car pour $n=0$, le terme de la somme préc. est nul)

$$= \frac{1}{4}\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{(-1)^n}{(2n+1)!}\, 3.(1-9^n)\, x^{2n-2}$$

donc, après avoir laborieusement calculé les termes pour $n = 1, 2, 3, 4$ (passionnant !)

on trouve $\varphi_2(x) = 1 - \dfrac{x^2}{2} + \dfrac{13}{120}x^4 - \dfrac{41}{3024} + \dfrac{3}{4}\displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty} \dfrac{(-1)^n}{(2n+1)!}(1-9^n)x^{2n-2}$.

ce qui est une série entière de RCV $+\infty$, donc ~~a~~ c) est fausse (et d) aussi)

[C'était évident, d'ailleurs : $R_2 = +\infty$ est clair, et $\varphi_2(0) = 1$ impliquaient directement c) d) fausses !] Je n'ai fait ce calcul que pour vous montrer comment on fait le D.S.E.

---

(26) Calcul passionnant...

On trouve : $\psi(x) = \dfrac{7}{30}x^4 - \dfrac{131}{3780}x^6 + \displaystyle\sum_{n=4}^{+\infty} \dfrac{(-1)^n (2x)^{2n}}{(2n)!} - 3.\underbrace{\sum_{p=5}^{+\infty} (-1)^p \dfrac{1-9^p}{(2p+1)!}\, x^{2p-2}}_{\text{on pose ici } n = p-1}$

$$= \quad " \quad " \quad " \quad + 3\sum_{n=4}^{+\infty} (-1)^n \frac{1-9^{n+1}}{(2n+3)!}x^{2n}$$

$$= \frac{7}{30}x^4 - \frac{131}{3780}x^6 + \sum_{n=4}^{+\infty} (-1)^n \left[\frac{4^n}{(2n)!} + 3.\frac{1-9^{n+1}}{(2n+3)!}\right] x^{2n}$$ (calcul vérifié par Maple !!)

d'où d) est ~~fausse~~ ! (il y a un '4' en trop !, et la somme devrait commencer à $p = 2$! et il y a 12 à la place de 3)

c) est fausse (il y aurait dû y avoir 4^p et non 4 ...)

---

(27) • Les arguments sur les séries alternées ne sont même pas à prendre en considération. Il faut, pour conclure, savoir si elle vérifie ou non le C.S.S.A !! ($|u_n| \searrow$)

donc a) b) sont fausses [difficile de toute façon, c'est loin d'être facile ici]

• Cependant, j'ai vérifié que la série (la bonne, la mienne) donnant $\psi(x)$ vérifie bien le critère sur les séries alternées (au moins à partir de $n=4$) donc on aura

$$\psi(x) \geqslant \frac{7}{30}x^4 - \frac{131}{3780}x^6 = \left(21 - \frac{131x^2}{42}\right)\frac{x^4}{90} \geqslant (21 - 8x^2)\frac{x^4}{90} \;!$$

donc l'inégalité du a) est cqd vraie (!), et d) est vraie (pour $x \in [0, \frac{\pi}{2}]$).

• $\psi(x) \leq 0$ est FAUX car $\lim\limits_{x \to 0} \frac{\psi(x)}{x^4} = +\frac{7}{30}$!

---

(28) Je vais considérer que ~~mon~~ énoncé est FAUX, et que dans la question 24, il fallait prendre : $f(t) = \begin{cases} \frac{1}{2\sin\frac{t}{2}} - \frac{1}{t} & \text{si } t \in]0, \pi] \\ 0 & \text{si } t = 0 \end{cases}$

* Reprenons alors la question 24. $f'(t) = \dfrac{-\frac{1}{2}\cos\frac{t}{2}}{2\left(\sin^2\frac{t}{2}\right)} + \dfrac{1}{t^2}$ si $t \in]0, \pi]$ (f est C^1 sur $]0, \pi]$)

$$= \frac{-t^2\cos\frac{t}{2} + 4\sin^2\frac{t}{2}}{4t^2\sin^2\frac{t}{2}}$$

$$= \frac{-t^2\left(1 - \frac{t^2}{8} + o(t^2)\right) + 4\left(\frac{t}{2} - \frac{t^3}{48} + o(t^4)\right)^2}{4t^2\sin^2 t/2}$$

$$= \frac{-t^2 + \frac{t^4}{8} + 4\cdot\frac{t^2}{4} - \frac{8t^4}{96} + o(t^4)}{t^4 + o(t^4)} = \frac{\frac{1}{24}t^4 + o(t^4)}{t^4 + o(t^4)}$$

De plus, f est continue en 0 car :

$$f(t) = \frac{1}{2\sin\frac{t}{2}} - \frac{1}{t} = \frac{t - 2\sin\frac{t}{2}}{2t\sin\frac{t}{2}} = \frac{O(t^3)}{O(t^2)} \xrightarrow[t \to 0]{} 0 = f(0)$$

Donc le th de prolg^t des fonctions de classe C^1 s'applique, et $f'(0) = \frac{1}{24}$: réponse a exacte

• De plus, on peut aussi écrire : $f'(t) = \dfrac{-t^2\cos t/2 + 4\left(\frac{1-\cos t}{2}\right)}{4t^2\sin^2\frac{t}{2}}$, donc c) est exacte

aussi ($f'(0) = \lim\limits_{t \to 0} \frac{f(t) - f(0)}{t - 0} = \lim\limits_{0} \frac{f(t)}{t}$!)

→ [Cela ne conforte dans ma "interprétation" de l'énoncé ; mais, si il y avait cette erreur le jour du concours, toutes les réponses devraient être considérées comme fausses, ainsi que celles des questions qui en dépendent !]

* Revenons à la question 28 : Pour $t \in]0, \pi]$:

$$f''(t) = \frac{\frac{1}{4}\sin\frac{t}{2}\left(2\sin^2\frac{t}{2}\right) + \frac{1}{2}\cos\frac{t}{2}\left(2\sin\frac{t}{2}\cos\frac{t}{2}\right)}{4\sin^4\frac{t}{2}} - \frac{2}{t^3}$$

$$f''(t) = \frac{1/2 \sin^3 t/2 + \sin\frac{t}{2}\cos^2\frac{t}{2}}{4\sin^4\frac{t}{2}} - \frac{2}{t^3} = \frac{\frac{1}{2}\sin^2\frac{t}{2} + 1 - \sin^2\frac{t}{2}}{4\sin^3\frac{t}{2}} - \frac{2}{t^3}$$

$$= \frac{2-\sin^2 t/2}{8\sin^3\frac{t}{2}} - \frac{2}{t^3}$$ d'où réponse a) (b) fausse)

• Pour obtenir un équivalent de $f''(t)$ au vois. de 0, on pourrait faire un D.L de f'', mais c'est HORRIBLE ! Revenons à f :

$$f(t) = \frac{1}{2\sin\frac{t}{2}} - \frac{1}{t} = \frac{1}{t}\left[\frac{1}{\frac{2\sin\frac{t}{2}}{t}} - 1\right] = \frac{1}{t}\left[\frac{1}{\frac{2}{t}\left(\frac{t}{2} - \frac{t^3}{48} + \frac{t^5}{120\times 32} + o(t^6)\right)} - 1\right]$$

$$= \frac{1}{t}\left[\frac{1}{1 - \frac{t^2}{24} + \frac{t^4}{120\times 16} + o(t^5)} - 1\right]$$

$$= \frac{1}{t}\left[1 + \left(\frac{t^2}{24} - \frac{t^4}{120\times 16} + o(t^5)\right) + \left(\frac{t^2}{24} - \frac{t^4}{120\times 16} + o(t^5)\right)^2 + o(t^5) - 1\right]$$

$$= \frac{1}{t}\left[\frac{t^2}{24} - \frac{t^4}{120\times 16} + \frac{t^4}{4\times 12\times 12} + o(t^5)\right]$$

$$= \frac{t}{24} + \frac{7}{5760}t^3 + o(t^4)$$

D'après la formule de Taylor-Young on a : $f(t) = f(0) + tf'(0) + \frac{t^2}{2}f''(0) + \frac{t^3}{6}f'''(0) + o(t^3)$

d'où $f''(0) = 0$ et $f'''(0) = \frac{7}{960}$.

Donc $f'''(0) = \lim\limits_{t\to 0} \frac{f''(t) - f''(0)}{t-0} = \lim\limits_{t\to 0}\frac{f''(t)}{t} = \frac{7}{960}$ soit $f''(t) \underset{t\to 0}{\sim} \frac{7t}{960}$

donc c) d) fausses !

---

29 On a par déf : $f''(t) = \frac{1}{8\sin^3\frac{t}{2}}\left[2\varphi_1\left(\frac{t}{2}\right) - 2\varphi_2\left(\frac{t}{2}\right)\right] = \frac{1}{\sin^3\frac{t}{2}} \times \psi\left(\frac{t}{2}\right)$

En reprenant 27 a) (l'inégalité était vraie, je le rappelle), on a : $\psi\left(\frac{t}{2}\right) \geq (21 - 2t^2)\frac{t^4}{1440}$

d'où $\psi\left(\frac{t}{2}\right) \geq (21 - 2\pi^2)\frac{t^4}{1440} > 0$ d'où b) vraie. Les autres réponses sont fausses.

---

30 • En faisant une i.p.p. $I_n = \int_0^\pi f(t)\sin\left(n+\frac{1}{2}\right)t\,dt = \underbrace{\left[\frac{-1}{n+\frac{1}{2}} f(t)\cos\left(n+\frac{1}{2}\right)t\right]_0^\pi}_{=0 \text{ car } \cos\left(n\pi+\frac{\pi}{2}\right)=0 \text{ et } f(0)=0} + \frac{1}{n+\frac{1}{2}}\int_0^\pi f'(t)\cos\left(n+\frac{1}{2}\right)t\,dt$

(suite)

$\operatorname{Int}: I_n = \dfrac{1}{n+\frac{1}{2}} \displaystyle\int_0^\pi f'(t)\cos\left(n+\tfrac{1}{2}\right)t\,dt$

d'où $|I_n| \leq \dfrac{1}{n+\frac{1}{2}} \displaystyle\int_0^\pi |f'(t)|\,dt = \dfrac{1}{n+\frac{1}{2}} \displaystyle\int_0^\pi f'(t)\,dt$ $\left(f' \geq 0 \text{ car } f' \nearrow \text{ et } f'(0) = \frac{1}{24}\right)$

$\leq \displaystyle\int_0^\pi f'(t)\,dt$ pour $n \geq 1$. Donc a) est vraie

- En reprenant le calcul ci-dessus, puisque $\displaystyle\int_0^\pi f'(t)\,dt = f(\pi) - f(0) = \frac{1}{2} - \frac{1}{\pi}$

on a : $|I_n| \leq \dfrac{1}{n+\frac{1}{2}}\left(\dfrac{1}{2} - \dfrac{1}{\pi}\right) = \dfrac{1}{2n+1}\left(1 - \dfrac{2}{\pi}\right)$ or $1 - \frac{2}{\pi} \sim 0,36\ldots$ $\frac{\pi}{12} \sim 0,26\ldots$

Je ne peux donc pas conclure ...! ZUT! Je me demande d'où sort ce $\pi/12$ ...

- Refaisons une i.p.p.

$I_n = \dfrac{1}{n+\frac{1}{2}} \displaystyle\int_0^\pi \underbrace{f'(t)}_{u} \underbrace{\cos\left(n+\tfrac{1}{2}\right)t}_{v'}\,dt = \dfrac{1}{\left(n+\frac{1}{2}\right)^2}\left\{\left[f'(t)\sin\left(n+\tfrac{1}{2}\right)t\right]_0^\pi - \displaystyle\int_0^\pi f''(t)\sin\left(n+\tfrac{1}{2}\right)t\,dt\right\}$

$= \dfrac{1}{\left(n+\frac{1}{2}\right)^2}\left[\dfrac{1}{\pi^2}(-1)^n - \displaystyle\int_0^\pi f''(t)\sin\left(n+\tfrac{1}{2}\right)t\,dt\right]$ $\left(f'(\pi) = \frac{1}{\pi^2}\right)$

d'où $|I_n| \leq \dfrac{1}{\left(n+\frac{1}{2}\right)^2}\left[\dfrac{1}{\pi^2} + \displaystyle\int_0^\pi f''(t)\,dt\right]$ (car $f'' \geq 0$)

$\leq \dfrac{1}{\left(n+\frac{1}{2}\right)^2}\left[\dfrac{1}{\pi^2} + f'(\pi) - f'(0)\right] = \dfrac{1}{\left(n+\frac{1}{2}\right)^2}\left[\dfrac{2}{\pi^2} - \dfrac{1}{24}\right]$

Je trouve donc $|I_n| \leq \dfrac{4}{(2n+1)^2}\left[\dfrac{2}{\pi^2} - \dfrac{1}{24}\right]$

Pour obtenir l'inégalité de b), il suffit que $\dfrac{4}{2n+1}\left(\dfrac{2}{\pi^2} - \dfrac{1}{24}\right) \leq \dfrac{\pi}{12}$ ce qui est vrai à partir de $n = 1$. Enfin, pour $n=0$, Maple donne $I_0 \sim 0,20\ldots < \frac{\pi}{2}$ donc l'inég. est vraie pour $n=0$. Finalt b) est vraie ! (OUF ! Y-a-t-il + simple ?)

- (I_n) n'est pas croissante donc c) est fausse. Par contre, l'inégalité précédente montre que $\lim\limits_{n\to\infty} I_n = 0$ (Rem : on s'en doutait, cf. lemme de Lebesgue !)

d) est donc évident fausse

---

(31) $I_n = \displaystyle\int_0^\pi \left(\frac{1}{2\sin\frac{t}{2}} - \frac{1}{t}\right)\sin\left(n+\tfrac{1}{2}\right)t\,dt = \underbrace{\displaystyle\int_0^\pi \frac{\sin\left(n+\frac{1}{2}\right)t}{2\sin\frac{t}{2}}\,dt}_{J_n} - \displaystyle\int_0^\pi \frac{\sin\left(n+\frac{1}{2}\right)t}{t}\,dt$

On pose $J_n = \int_0^{\pi} \frac{\sin(n+\frac{1}{2})t}{\sin\frac{t}{2}}dt$. $J_n - J_{n-1} = \int_0^{\pi} \frac{\sin(n+\frac{1}{2})t - \sin(n-\frac{1}{2})t}{\sin\frac{t}{2}}dt$ $(n\geq 1)$ (10)

$= \int_0^{\pi} \frac{2\sin\frac{t}{2}\cos nt}{\sin\frac{t}{2}}dt = 2\int_0^{\pi}\cos nt\,dt = 0$ par $n\geq 1$

Donc $J_n = J_0$ pour $\forall n$, soit : $\forall n\in\mathbb{N}$, $J_n = \frac{\pi}{2}$.

On a donc bien : $I_n = \frac{\pi}{2} - \int_0^{\pi}\frac{\sin(n+\frac{1}{2})t}{t}dt$ i.e. a) est vraie.

- Puisque $\lim_{n\to\infty} I_n = 0$, on a : $\lim_{n\to\infty}\int_0^{\pi}\frac{\sin(n+\frac{1}{2})t}{t}dt = \frac{\pi}{2}$ (donc b) fausse)
- d'où en posant $u = (n+\frac{1}{2})t$: $\lim_{n\to\infty}\int_0^{(n+\frac{1}{2})\pi}\frac{\sin u}{u}du = \frac{\pi}{2}$. Et, comme l'on sait que $\int_0^{\infty}\frac{\sin u}{u}du$ converge (elle est CV, mais pas ACV, cf cours), on obtient : $\underline{\int_0^{+\infty}\frac{\sin u}{u}du = \frac{\pi}{2}}$,
- En ~~posant~~ intégrant par parties : ($\triangle$: prendre $1-\cos u$ comme primitive de $\sin u$, sinon cela n'a pas de sens)

$$\frac{\pi}{2} = \int_0^{+\infty}\frac{\sin u}{u}du = \underbrace{\left[\frac{1-\cos u}{u}\right]_0^{+\infty}}_{\substack{=0 \\ \text{car } 1-\cos u \underset{0}{\sim} \frac{u^2}{2}}} + \int_0^{+\infty}\frac{1-\cos u}{u^2}du$$

$$\text{Or : } \int_0^{+\infty}\frac{1-\cos u}{u^2}du = \int_0^{+\infty}\frac{2\sin^2 u/2}{u^2/2}du = \int_0^{+\infty}\frac{\sin^2 v}{v^2}dv \quad (\text{en posant } v = \tfrac{u}{2})$$

Finalement : c) est vraie

---

(32) Évident, a) b) sont fausses et c) est vraie.

Pour $t\geq\frac{2x}{\pi}$ $\frac{x}{t}\leq\frac{\pi}{2}$ et $\sin^2$ est croissante sur $[0,\frac{\pi}{2}]$ donc $t\mapsto\sin^2\frac{x}{t}$ ↘ donc d) est vraie (comparaison série-intégrale)

---

(33) Si $n\geq E(x)+1$, alors $\forall t\in[n,n+1]$, $t\geq E(x+1)$, d'où $\frac{x}{t}\leq\frac{x}{E(x)+1}<1$

Puisque ~~[illegible]~~ $u\mapsto\sin^2 u$ est croissante sur $[0,1]$, $t\mapsto\sin^2\frac{x}{t}$ est décroissante sur $[n,n+1]$

d'où $\forall t\in[n,n+1]$ $\sin^2\frac{x}{t}\geq\sin^2\frac{x}{n+1}$. Donc réponse vraie : b)

---

(34) Pour $n\geq E(x)+1$ on a : $\sin^2\frac{x}{n}\geq\sin^2\frac{x}{t}\geq\sin^2\frac{x}{n+1}$ pour $\forall t\in[n,n+1]$

$$\text{d'où } \sin^2\frac{x}{n}\geq\int_n^{n+1}\sin^2\frac{x}{t}dt\geq\sin^2\frac{x}{n+1}$$

En sommant ces inégalités pour n variant de $E(x)+1$ à $+\infty$ (possible car $\sum$ convergentes) on obtient : $\displaystyle\sum_{n=E(x)+1}^{+\infty} \sin^2\frac{x}{n} \geqslant \int_{E(x)+1}^{+\infty} \sin^2\frac{x}{t}\,dt = \int_{E(x)+1}^{2x/\pi} \sim + \int_{2x/\pi}^{+\infty} \sim$

•

soit : $\displaystyle\sum_{n=E(x)+1}^{+\infty} \sin^2\frac{x}{n} - \int_{2x/\pi}^{+\infty} \sin^2\frac{x}{t}\,dt \geqslant -\int_{2x/\pi}^{E(x)+1} \sin^2\frac{x}{t}\,dt$ (1)

• et par le même de droite :

$$\sum_{n=E(x)+1}^{+\infty} \frac{\sin^2 x}{n+1} \leqslant \int_{E(x)+1}^{+\infty} \sin^2\frac{x}{t}\,dt$$

$$\sum_{n=E(x)+1}^{+\infty} \sin^2\frac{x}{n} - \sin^2\left(\frac{x}{E(x)+1}\right) \leqslant \int_{E(x)+1}^{+\infty} \sin^2\frac{x}{t}\,dt$$

soit : $\displaystyle\sum_{n=E(x)+1}^{+\infty} \sin^2\frac{x}{n} \leqslant \int_{E(x)+1}^{+\infty} \sin^2\frac{x}{t} + \sin^2\left(\frac{x}{E(x)+1}\right)$ (1) : c) est vraie

b) fausse

On en déduit $\displaystyle\sum_{n=E(x)+1}^{+\infty} \sin^2\frac{x}{n} - \int_{\frac{2x}{\pi}} \sin^2\frac{x}{t} \leqslant \int_{E(x)+1}^{2x/\pi} \sin^2\frac{x}{t} + \sin^2\left(\frac{x}{E(x)+1}\right)$

$$\leqslant -\int_{2x/\pi}^{E(x)+1} \sim + \sin^2\left(\frac{x}{E(x)+1}\right) \leqslant \sin^2\frac{x}{E(x)+1} \leqslant 1$$

donc d) est fausse

Enfin, on sait que, sur $u \in [0, \frac{\pi}{2}]$, $\sin u \geqslant \frac{2}{\pi} u$ (inég. de convexité : la courbe est au-dessus de sa corde..)

d'où $\displaystyle\int_{\frac{2x}{\pi}}^{E(x)+1} \sin^2\frac{x}{t}\,dt \geqslant \int_{\frac{2x}{\pi}}^{E(x)+1} \frac{4}{\pi^2}\cdot\frac{x^2}{t^2}\,dt = \frac{4x^2}{\pi^2}\left[-\frac{1}{t}\right]_{\frac{2x}{\pi}}^{E(x)+1}$

$$= \frac{4x^2}{\pi^2}\left[\frac{\pi}{2x} - \frac{1}{E(x)+1}\right] \geqslant \frac{4x^2}{\pi^2}\left[\frac{\pi}{2x} - \frac{1}{x}\right]$$

(car $x < E(x)+1$)

$$\geqslant \frac{4x}{\pi}\left[\frac{\pi}{2} - 1\right] > 1 \text{ pour } x \text{ assez grand}$$

donc la partie gauche de l'inég. du a) est fausse (la partie droite étant exacte)

---

(35) • $\left|\frac{1}{n}\sin\frac{x}{n}\right| \leqslant \frac{|x|}{n^2}$ donc $\sum_{n\geqslant 1} \frac{1}{n}\sin\frac{x}{n}$ est A.CV. réponse b) (a) fausse)

• Puisque $t \mapsto \frac{|x|}{t^2}$ est ↘, on a : $\forall t \in [n, n+1]$ $\frac{|x|}{(n+1)^2} \leqslant \frac{|x|}{t^2}$ d'où $\left|\frac{1}{n}\sin\frac{x}{n}\right| \leqslant \frac{|x|}{t^2}$.

d'où $\displaystyle |R_N| \leqslant \sum_{n=N+1}^{+\infty} \left|\frac{1}{n}\sin\frac{x}{n}\right| \leqslant \sum_{n=N+1}^{+\infty} \frac{|x|}{n^2} \leqslant \int_N^{+\infty} \frac{|x|}{t^2} = \frac{|x|}{N}$: réponse d)

(36) . φ est définie sur $\mathbb{R}$ (cf. question préc) donc a) b) fausses (12)

- $\varphi(x)-\varphi(x_0) = \left|\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n}\left(\sin\frac{x}{n} - \sin\frac{x_0}{n}\right)\right| \leq \left|\sum_{n=1}^{N} \frac{1}{n}\left(\sin\frac{x}{n} - \sin\frac{x_0}{n}\right)\right| + \left|\sum_{n=N+1}^{+\infty} \cdots\right|$

$\leq \quad '' \quad + \left|\sum_{n=N+1}^{+\infty} \frac{1}{n}\sin\frac{x}{n}\right| + \left|\sum_{n=N+1}^{+\infty} \frac{1}{n}\sin\frac{x_0}{n}\right|$

$\leq \left|\sum_{n=1}^{+\infty}\left(\frac{1}{n}\sin\frac{x}{n} - \sin\frac{x_0}{n}\right)\right| + \frac{|x|+|x_0|}{N}$ d'après la question préc.

d'où réponse d) exacte

---

(37) $\cdot \left|\frac{1}{n^2}\cos\frac{u}{n}\right| \leq \frac{1}{n^2}$ t.g. d'une série CV donc a) vraie, b) fausse ainsi que c) et d)

---

(38) . Déjà, directement : a) fausse (argument stupide), c) vraie (car série CV) et d) fausse !

- Encore une comparaison série intégrale : $|R'_N(u)| \leq \sum_{n=N+1}^{+\infty} \frac{1}{n^2}$ et, puisque $t \mapsto \frac{1}{t^2}$ ↘,

on a : $|R'_N(u)| \leq \int_N^{+\infty} \frac{1}{t^2}\,dt = \frac{1}{N}$ donc b) vraie [Rem : cela prouve que la série $\sum \frac{1}{n^2}\cos\frac{u}{n}$ converge unif^t sur $\mathbb{R}$, donc à partir du th. de dérivation terme à terme par $\sum \frac{1}{n}\sin\frac{u}{n}$, ce qui a été admis ensuite]

---

(39) . En faisant le chg^t de variable $t = \frac{x}{u}$ (C^1 diffé. de $]0,\frac{\pi}{2}]$ sur $[\frac{2x}{\pi},+\infty[$) on a :

$\int_{\frac{2x}{\pi}}^{+\infty} \sin^2\left(\frac{x}{t}\right)dt = -x\int_{\pi/2}^{0} \frac{\sin^2 u}{u^2}\,du = x\int_0^{\pi/2} \frac{\sin^2 u}{u^2}\,du$ d'où a) vraie (et b) fausse)

- On a vu que (question 34) $-\int_{\frac{2x}{\pi}}^{E(x)+1} \sin^2\frac{x}{t}\,dt \leq \sum_{n=E(x)+1}^{+\infty} \sin^2\frac{x}{n} - \int_{\frac{2x}{\pi}}^{+\infty} \sin^2\frac{x}{t}\,dt \leq -\int_{\frac{2x}{\pi}}^{E(x)+1} \sin^2\left(\frac{x}{t}\right)dt + \sin^2\left(\frac{x}{E(x)+1}\right)$

Or $\lim_{x\to\infty} \frac{1}{x}\left(\sin^2\left(\frac{x}{E(x)+1}\right)\right) = 0$ (car $\sin^2 \leq 1$)

et $\int_{\frac{2x}{\pi}}^{E(x)+1} \sin^2\frac{x}{t}\,dt \underset{u=\frac{x}{t}}{=} x\int_{\pi/2}^{\frac{x}{E(x)+1}} -\frac{\sin^2 u}{u}\,du$ soit $\frac{1}{x}\int_{\frac{2x}{\pi}}^{E(x)+1} \sin^2\frac{x}{t}\,dt = \int_{\frac{x}{E(x)+1}}^{\pi/2} \frac{\sin^2 u}{u}\,du$

- Puisque $\lim_{x\to\infty} \frac{x}{E(x)+1} = 1$ on a $\lim \frac{1}{x}\int_{\frac{2x}{\pi}}^{E(x)+1} \sin^2\frac{x}{t}\,dt = \int_1^{\pi/2} \frac{\sin^2 u}{u^2}\,du$

et par encadrement : $\lim_{x\to\infty} \frac{1}{x}\left(\sum_{n=E(x)+1}^{+\infty} \sin^2\frac{x}{n} - \int_{\frac{2x}{\pi}}^{+\infty} \sin^2\frac{x}{t}\,dt\right) = -\int_1^{\pi/2} \frac{\sin^2}{u^2}\,du$ d'où

Lorsque $\lim \frac{1}{x}\int_{2x/\pi}^{+\infty} \sin^2\frac{x}{t}\,dt = \int_0^{\pi/2} \frac{\sin^2 u}{u^2}\,du$, on a : $\lim_{x\to\infty} \frac{1}{x}\left(\sum_{n=E(x)+1}^{+\infty} \sin^2\frac{x}{n}\right) = \int_0^1 \frac{\sin^2 u}{u^2}\,du$

d'où c) d) fausses.

(40) On s'amuse de + en + : ce qui est admis par l'énoncé est FAUX !

On a en fait : $\lim\limits_{x\to+\infty} \frac{1}{x}\sum_{n=1}^{E(x)} \sin^2\frac{x}{n} = \int_0^1 \sin^2\frac{1}{t}\,dt$! [Rem : cette intégrale existe car $t\mapsto\sin^2\frac{1}{t}$ continue sur]0,1] et bornée)

Ce qui donne avec le résultat précédent : $I = \int_0^1 \frac{\sin^2 u}{u^2}\,du + \underbrace{\int_0^1 \sin^2\left(\frac{1}{t}\right)dt}_{u=1/t}$

$$= \int_0^1 \frac{\sin^2 u}{u^2}\,du + \int_1^{+\infty} \frac{\sin^2 u}{u^2}\,du$$

$$= \int_0^{+\infty} \frac{\sin^2 u}{u^2}\,du = \frac{\pi}{2}.$$

d'où la réponse b)

(réponse exacte et indication fausse ....)

Démo : En effet, en utilisant des sommes de Riemann (en partageant]0,1] en les intervalles $\left[\frac{k}{n}, \frac{k+1}{n}\right]$ $(k\geq 1)$

on a : $\int_0^1 \sin^2\frac{1}{t}\,dt = \lim\limits_{n\to\infty} \frac{1}{n}\left(\sum_{k=1}^{n} \sin^2\frac{n}{k}\right)$ ce qui démontre le résultat voulu pour x entier

Ensuite, pour x quelconque, on a $\left|\sin^2\frac{x}{n} - \sin^2\frac{E(x)}{n}\right| \leq 2\,\frac{x-E(x)}{n}$ (d'après l'inégalité des accroissements finis)

$$\leq \frac{2}{n}$$

d'où $\lim\limits_{x\to\infty}\left[\frac{1}{x}\sum_{n=1}^{E(x)}\left(\sin^2\frac{x}{n} - \sin^2\frac{E(x)}{n}\right)\right] = 0$ (car le terme est $\leq \frac{2}{n}$ et $\sum_{n=1}^{E(x)} \frac{2}{n} \sim 2\ln(E(x)) \sim 2\ln x$)

Soit $\lim\limits_{x\to\infty} \frac{1}{x}\sum_{n=1}^{E(x)} \sin^2\frac{x}{n} = \lim\limits_{x\to\infty} \frac{1}{x}\sum_{n=1}^{E(x)} \frac{\sin^2 E(x)}{n}$

$= \lim\limits_{x\to\infty} \frac{1}{E(x)}\sum_{n=1}^{E(x)} \frac{\sin^2 E(x)}{n}$ (car $x \underset{+\infty}{\sim} E(x)$) : cqfd