

CORRIGÉ ICNA Épreuve commune 2014

PARTIE I

1. C'est une question de cours : lorsque E est de dimension finie, son dual E^* a même dimension que E .

Q1 : Réponse A

2. Toujours d'après le cours, on sait que la trace est une forme linéaire sur $M_n(\mathbb{R})$; on sait aussi que toute forme linéaire non nulle est surjective (car son image, non réduite à $\{0\}$, est de dimension 1 donc forcément égale à $\mathbb{R}$).

Q2 : Réponses B,D

3. $\text{tr}(AB) = \text{tr}(BA)$ est une propriété du cours. On en déduit, si A, B, C sont trois matrices carrées :

$$\text{tr}(ABC) = \text{tr}((AB)C) = \text{tr}(C(AB)) = \text{tr}(CAB).$$

Par contre la propriété $\text{tr}(ABC) = \text{tr}(BAC)$ est fausse, je vous laisse le soin de chercher un contre-exemple (de toutes façons, il y avait déjà deux réponses exactes).

Q3 : Réponses A,C

4. On sait que l'application $(A, B) \mapsto \text{tr}({}^tAB)$ est le produit scalaire canonique sur $M_n(\mathbb{R})$, pour lequel la base $(E_{i,j})_{1 \leq i,j \leq n}$ est orthonormale, et qu'il est donné par

$$\text{tr}({}^tAB) = \sum_{i,j} a_{ij} b_{ij}.$$

C'est la réponse C, et en changeant A en tA on obtient la réponse B.

Q4 : Réponses B,C

5. L'application T_U est la composée de l'application T et de l'application $M \mapsto UM$ qui sont linéaires, donc est linéaire. Étant à valeurs dans $\mathbb{R}$, c'est un élément de E^* .

$T_U(AB) = \text{tr}(UAB)$ et $T_U(BA) = \text{tr}(UBA)$ ne sont pas égaux en général.

Enfin, H_U est le noyau d'une forme linéaire, c'est donc un sous-espace vectoriel de E .

Q5 : Réponses B,D

6. $E_{i,j}$ est une matrice ayant $n-1$ colonnes nulles et la dernière non nulle, elle est donc de rang 1. En particulier, elle n'est pas inversible.

Les matrices $E_{i,i}$ sont diagonales, donc diagonalisables. Mais les matrices $E_{i,j}$ avec $i \neq j$ sont triangulaires avec une diagonale de zéros, donc admettent 0 pour seule valeur propre ; si elles étaient diagonalisables, elles seraient semblables à la matrice nulle, donc égales à la matrice nulle : absurde.

Enfin, la trace de $E_{i,j}$ est nulle si et seulement si $i \neq j$. En conclusion :

Q6 : Réponse C

7. A. Réponse exacte : il s'agit de la base canonique.

B. C. D. Si $M = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$ on calcule $UM = \begin{pmatrix} a+c & b+d \\ a+c & b+d \end{pmatrix}$ d'où $T_U(M) = a + b + c + d$. On en déduit immédiatement que les réponses B et C sont fausses, et que la réponse D est exacte.

Q7 : Réponses A,D

8. H_U est le noyau d'une forme linéaire non nulle, c'est donc un hyperplan de $E = \mathbb{M}_2(\mathbb{R})$, espace vectoriel de dimension 4 ; donc $\dim(H_U) = 3$.

Enfin, la matrice $\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$ est inversible et appartient à H_U donc la réponse D est exacte.

Q8 : Réponses C,D

9. A. B. Raisonnons par l'absurde, et supposons que la réponse A soit exacte. Alors T_U serait nulle sur la base canonique de $\mathbb{M}_n(\mathbb{R})$, donc serait l'application nulle par linéarité. On aurait donc $\text{tr}(UM) = 0$ pour toute matrice $M \in \mathbb{M}_n(\mathbb{R})$ et, en particulier, $\text{tr}({}^tUU) = 0$. Mais $\text{tr}({}^tUU) = \|U\|_2^2 = \sum_{i,j} u_{ij}^2$, donc cela impliquerait $U = 0$, ce que l'énoncé exclut.

En conclusion, la réponse A est fausse et, par suite, la réponse B est exacte.

C. D. H_U est le noyau d'une forme linéaire, qui est non nulle d'après la question B, c'est donc un hyperplan de $E = \mathbb{M}_n(\mathbb{R})$, espace vectoriel de dimension n^2 ; donc $\dim(H_U) = n^2 - 1$.

Q9 : Réponses B,D

10. Encore une question de cours : un hyperplan H de E a pour dimension $\dim E - 1 = n^2 - 1$, et toute droite qui n'est pas incluse dans H en est un supplémentaire. Donc :

Q10 : Réponses B,C

11. La matrice R_r de l'énoncé est celle qui est traditionnellement notée J_r (comme dans le programme

officiel). Par blocs, elle s'écrit : $R_r = \begin{bmatrix} I_r & 0_{r,n-r} \\ 0_{n-r,r} & 0_{n-r} \end{bmatrix}$.

Elle est donc de rang r ; elle n'est inversible que dans le cas $r = n$, et sa trace est égale à r . Enfin, puisque cette matrice n'est pas nulle, le sous-espace vectoriel H_{R_r} est un hyperplan de E donc n'est pas réduit à $\{0\}$. Finalement :

Q11 : Réponse E (aucune réponse exacte)

12. A. B. Si l'on note $\mathcal{B} = (e_1, \dots, e_n)$ une base de $\mathbb{R}^n$, P est la matrice dans $\mathcal{B}$ de la famille de vecteurs $(e_2, \dots, e_n, e_1)$, qui est encore une base, donc P est inversible.

C. D. Soit $M \in \mathbb{M}_n(\mathbb{R})$ écrite par blocs sous la forme $M = \begin{bmatrix} A & B \\ C & D \end{bmatrix}$ avec A carrée d'ordre r et D carrée

d'ordre $n - r$. Alors $R_r.M = \begin{bmatrix} A & B \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$ donc $\text{tr}(R_r.M) = \text{tr}(A)$.

On aura donc ici, pour tout $r \in \llbracket 1, n \rrbracket$, $\text{tr}(R_r.P) = 0$ c'est-à-dire $P \in H_{R_r}$.

Q12 : Réponses A,C

- 13.** Deux matrices peuvent avoir même rang sans être semblables (considérer par exemple une matrice non nulle A et la matrice $2A$!), donc les réponses A et B sont fausses.
 La réponse C est fantaisiste, il est aisé de trouver un contre-exemple.
 La réponse D est exacte, c'est un résultat du cours de 1ère année : toute matrice de rang r est équivalente à la matrice J_r , la réciproque étant facile (invariance du rang par multiplication par une matrice inversible).

Q13 : Réponse D

Le résultat admis par l'énoncé est facile à démontrer : en effet, si H est un hyperplan de E , en munissant $\mathbb{M}_n(\mathbb{R})$ du produit scalaire canonique, on peut considérer un vecteur A non nul orthogonal à H . Ainsi,

$$H = \{A\}^\perp = \{M \in \mathbb{M}_n(\mathbb{R}) \mid \langle A|M \rangle = 0\} = \{M \in \mathbb{M}_n(\mathbb{R}) \mid \text{tr}({}^tAM) = 0\} = H_{tA}.$$

- 14.** Puisque S_1 , S_2 et P sont inversibles, il en est de même de S_2PS_1 : la réponse A est exacte.
 On a alors

$$T_U(S_2PS_1) = \text{tr}(US_2PS_1) = \text{tr}(S_1^{-1}R_rPS_1) = \text{tr}(R_rP) = 0$$

c'est-à-dire $S_2PS_1 \in H_U = H$. La réponse B est donc exacte ; par suite, H contient une matrice inversible (c'est d'ailleurs un résultat classique !) et la réponse D est fausse.

Comme il y a déjà 2 réponses exactes, la réponse C est automatiquement fausse, ce que l'on pourrait vérifier directement.

Q14 : Réponses A,B

PARTIE II

- 15.** $\|u_n\|_\infty^{\mathbb{R}} = \frac{1}{2^n}$, terme général d'une série géométrique de raison $\frac{1}{2}$ donc convergente. La série $\sum_{n \in \mathbb{N}^*} u_n$ est donc normalement convergente sur $\mathbb{R}$: la réponse C est exacte et par suite les autres sont fausses.

Q15 : Réponse C

- 16.** En utilisant les formules du cours sur la somme d'une série géométrique (attention au premier terme !) on obtient

$$U(0) = \sum_{n=1}^{+\infty} \left(\frac{1}{2}\right)^n = \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{1 - \frac{1}{2}} = 1$$

et, puisque $\cos n\pi = (-1)^n$:

$$U(\pi) = \sum_{n=1}^{+\infty} \left(\frac{-1}{2}\right)^n = \frac{-1}{2} \cdot \frac{1}{1 + \frac{1}{2}} = -\frac{1}{3}$$

donc :

Q16 : Réponse E (aucune réponse exacte)

- 17.** C'est du cours de Terminale...

Q17 : Réponse A

- 18.** Pour tout x réel :

$$U(x) = \text{Re} \left(\sum_{n=1}^{+\infty} \left(\frac{e^{ix}}{2}\right)^n \right) = \text{Re} \left(\frac{e^{ix}}{2} \cdot \frac{1}{1 - \frac{e^{ix}}{2}} \right) = \text{Re} \left(\frac{e^{ix}}{2 - e^{ix}} \right) = \text{Re} \left(\frac{e^{ix}(2 - e^{-ix})}{|2 - e^{ix}|^2} \right) = \frac{2 \cos x - 1}{(2 - \cos x)^2 + \sin^2 x}$$

ce qui donne la réponse C.

Q18 : Réponse C

19. Il suffit de connaître les développements en série entière usuels...

Q19 : Réponse B

20. La série $\sum_{n \geq 1} \frac{|\alpha|^n}{n}$ est convergente pour tout $\alpha \in]-1, 1[$ d'après les règles de comparaison des séries positives, puisque pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, $\frac{|\alpha|^n}{n} \leq |\alpha|^n$, terme général d'une série géométrique convergente. Bien sûr, dans le cas où α est non nul, on peut aussi utiliser la règle de d'Alembert puisque le quotient $\frac{\frac{|\alpha|^{n+1}}{n+1}}{\frac{|\alpha|^n}{n}}$ tend vers $|\alpha| < 1$ quand $n \rightarrow +\infty$.
La réponse C est donc exacte (et la réponse A est fausse, la réponse B étant fantaisiste). Puisque $\|w_n\|_{\infty}^{\mathbb{R}} = \frac{|\alpha|^n}{n}$, il en résulte que la série $\sum w_n$ est normalement convergente sur $\mathbb{R}$: c'est la réponse D.

Q20 : Réponses C,D

21. Je rappelle le théorème du cours concernant la dérivation d'une série de fonctions (version PSI) :

Soit $\sum_{n \in \mathbb{N}} w_n$ une série de fonctions définies sur un intervalle I, à valeurs dans $\mathbb{K}$.

On suppose que :

- a) les w_n sont de classe $\mathcal{C}^1$ sur I ;
- b) la série de fonctions $\sum_{n \in \mathbb{N}} w_n$ converge simplement sur I ; on notera S sa somme ;
- c) la série de fonctions $\sum_{n \in \mathbb{N}} w'_n$ converge simplement sur I, la convergence étant uniforme sur tout segment inclus dans I.

Alors :

- a) La fonction S est de classe $\mathcal{C}^1$ sur I ;
- b) la série de fonctions $\sum_{n \in \mathbb{N}} w_n$ converge uniformément sur tout segment inclus dans I ;
- c) pour tout $x \in I$, on a : $S'(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} w'_n(x)$.

Ici, les hypothèses a) et b) sont vérifiées (question précédente). Il ne reste plus qu'à étudier la série $\sum w'_n$. Or pour tout x réel, $w'_n(x) = -\alpha^n \sin nx$ donc $\|w'_n\|_{\infty}^{\mathbb{R}} = |\alpha|^n$ qui est le terme général d'une série convergente. Ainsi, la série $\sum w'_n$ converge normalement sur $\mathbb{R}$ (c'est la réponse D), donc uniformément, et les hypothèses du théorèmes sont vérifiées.

Les réponses A, B et C contiennent des phrases exactes mais, seules, ne permettent pas de conclure.

Q21 : Réponse D

22. D'après les formules du cours sur les séries géométriques, puisque $|\alpha e^{ix}| < 1$ on a

$$\sum_{n=1}^{+\infty} \alpha^n e^{inx} = \sum_{n=1}^{+\infty} (\alpha e^{ix})^n = \alpha e^{ix} \cdot \frac{1}{1 - \alpha e^{ix}}.$$

C'est la réponse A. Et, d'après le résultat du théorème cité ci-dessus, pour tout $x \in \mathbb{R}$:

$$W'(x) = \sum_{n=1}^{+\infty} w'_n(x) = \sum_{n=1}^{+\infty} (-\alpha^n \sin nx) = -\mathcal{I}m \left(\sum_{n=1}^{+\infty} \alpha^n e^{inx} \right).$$

Q22 : Réponses A,C

23. On poursuit les calculs ; pour tout $x \in \mathbb{R}$:

$$W'(x) = -\mathcal{F}m\left(\sum_{n=1}^{+\infty} \alpha^n e^{inx}\right) = -\mathcal{F}m\left(\frac{\alpha e^{ix}}{1 - \alpha e^{ix}}\right) = -\mathcal{F}m\left(\frac{\alpha e^{ix}(1 - \alpha e^{-ix})}{|1 - \alpha e^{ix}|^2}\right) = \frac{-\alpha \sin x}{(1 - \alpha \cos x)^2 + (\alpha \sin x)^2}.$$

Finalement :

Q23 : Réponse B

24. On en déduit, pour tout $x \in \mathbb{R}$:

$$W(x) = \int \frac{-\alpha \sin x}{1 - 2\alpha \cos x + \alpha^2} dx = -\frac{1}{2} \ln(1 - 2\alpha \cos x + \alpha^2) + cste.$$

Cela suffisait pour répondre à la question (car l'énoncé ne demande pas la valeur de la constante) mais on peut préciser ; puisque $W(0) = -\ln(1 - \alpha)$ (question 19), on aura

$$W(x) = -\frac{1}{2} \ln(1 - 2\alpha \cos x + \alpha^2) + \frac{1}{2} \ln(1 - 2\alpha + \alpha^2) - \ln(1 - \alpha) = -\frac{1}{2} \ln(1 - 2\alpha \cos x + \alpha^2).$$

La série $\sum w_n$ étant normalement donc uniformément convergente, on peut intégrer terme à terme sur le segment $[-\pi, \pi]$ et l'on obtient

$$\int_{-\pi}^{\pi} W(x) dx = \sum_{n=1}^{+\infty} \left(\int_{-\pi}^{\pi} \frac{\alpha^n}{n} \cos nx dx \right) = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{\alpha^n}{n} [\sin nx]_{-\pi}^{\pi} = 0.$$

Ainsi la réponse exacte est D ; les arguments des réponses A, B et C ne permettent pas, à eux seuls, de calculer l'intégrale.

On a aussi obtenu la réponse B de la question suivante.

Q24 : Réponse D

25.

Q25 : Réponse B

L'intégrale précédente est célèbre et porte le nom d'*intégrale de Poisson*. On pourrait aussi calculer sa valeur lorsque $|\alpha| > 1$; pour cela il suffit d'appliquer le résultat précédent en remplaçant α par $\frac{1}{\alpha}$...

PARTIE III

26. On pourrait calculer directement $\chi_A(X) = \det(A - XI_3)$ (c'est assez facile par des combinaisons linéaires astucieuses) mais il y a plus rapide.

En effet, puisque la somme de chaque ligne de A est égale à 3, on a $A \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} = 3 \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$ donc $3 \in \text{Sp}(A)$.

Ensuite, $\text{tr}(A) = 7$ et $\det(A) = 12$ implique que les deux autres valeurs propres λ et μ vérifient $\lambda + \mu = 4$ et $\lambda\mu = 4$ donc $\lambda = \mu = 2$.

Les valeurs propres de A sont donc 3 (simple) et 2 (double). Puisque le terme dominant de χ_A est $-X^3$, la bonne réponse est B.

Q26 : Réponse B

- 27.** Déjà, la matrice A est inversible puisque 0 n'en est pas valeur propre.

Il est facile de voir que $\text{rg}(A - 2I_3) = 2$ donc $\dim \text{Ker}(A - 2I_3) = 1$. Ainsi 2 est valeur propre double mais le sous-espace propre associé est de dimension 1 , donc A n'est pas diagonalisable.

Q27 : Réponses C,D

- 28.** $\det(\varepsilon_1, \varepsilon_2, \varepsilon_3) = \begin{vmatrix} 1 & 4 & -2 \\ 1 & 3 & 0 \\ 1 & 4 & -1 \end{vmatrix} \neq 0$ donc $(\varepsilon_1, \varepsilon_2, \varepsilon_3)$ est une base de $\mathbb{R}^3$.

On vérifie facilement que ε_1 est un vecteur propre de A pour la valeur propre 3 et ε_2 en est un pour la valeur propre 2 . ε_3 ne peut être un autre vecteur propre car A n'est pas diagonalisable ; enfin, un calcul rapide montre que la réponse C est exacte :

$$A \cdot \varepsilon_3 = \begin{pmatrix} 1 & 4 & -2 \\ 0 & 6 & -3 \\ -1 & 4 & 0 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} -2 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 3 \\ 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4 \\ 3 \\ 4 \end{pmatrix} + 2 \cdot \begin{pmatrix} -2 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix}.$$

Q28 : Réponses A,C

- 29.** Les matrices A et T sont effectivement semblables (voir question suivante), mais aucun des arguments invoqué n'est exact (voir contre-exemples dans votre cours).

Q29 : Réponse E (aucune réponse exacte)

- 30.** D'après les calculs faits à la question 28, la matrice T est la matrice de u dans la base $(\varepsilon_1, \varepsilon_2, \varepsilon_3)$. P étant la matrice de passage de la base (e_1, e_2, e_3) à la base $(\varepsilon_1, \varepsilon_2, \varepsilon_3)$, les formules du cours permettent d'affirmer $T = P^{-1}AP$:

Q30 : Réponse B

- 31.** Soit $M = \begin{pmatrix} a & b & c \\ d & e & f \\ g & h & i \end{pmatrix}$. On écrit le système obtenu par $TM = MT$, et l'on trouve que cela équivaut à $b = c = d = g = h = 0$ et $e = i$.

Les matrices qui commutent avec T sont donc exactement celles de la forme $M = \begin{pmatrix} a & 0 & 0 \\ 0 & e & f \\ 0 & 0 & e \end{pmatrix}$, c'est-

à-dire les combinaisons linéaires des 3 matrices J, K et L . Ces trois matrices étant linéairement indépendantes (on vérifie facilement que $aJ + bK + cL = 0 \Rightarrow a = b = c = 0$), elles engendrent un sous-espace vectoriel de $\mathbb{M}_3(\mathbb{R})$ de dimension 3 .

Q31 : Réponse B

- 32.** La propriété admise n'est pas bien difficile à démontrer : en effet,

$$M \in \mathcal{C}(A) \iff MA = AM \iff MPTP^{-1} = PTP^{-1}M \iff P^{-1}MPT = TP^{-1}MP \iff P^{-1}MP \in \mathcal{C}(T)$$

et l'application $M \mapsto P^{-1}MP$ étant un automorphisme de $\mathbb{M}_3(\mathbb{R})$, les espaces vectoriels $\mathcal{C}(T)$ et $\mathcal{C}(A)$ sont isomorphes donc ont même dimension.

Puisque, clairement, I_3, A et A^2 commutent avec A , $\text{Vect}(\{I_3, A, A^2\}) \subset \mathcal{C}(A)$. De plus, ces 3 matrices sont linéairement indépendantes (vérification manuelle, ou bien remarquer que le polynôme minimal de A est nécessairement de degré 3 donc un polynôme de degré 2 ne peut être annulateur), donc $\text{Vect}(\{I_3, A, A^2\})$ est de dimension 3 , et l'égalité des dimensions implique $\text{Vect}(\{I_3, A, A^2\}) = \mathcal{C}(A)$.

C'est la réponse C. Les autres réponses sont fausses car on vérifie facilement que, par exemple, J ne commute pas avec A etc...

Q32 : Réponse C

PARTIE IV

33. C'est encore une question de cours.

Q33 : Réponse C

34. Toujours du cours. Toute série absolument convergente est convergente et remarquer, pour la question D, que la suite (u_n) est forcément à termes positifs puisque décroissante de limite nulle, donc la série est bien alternée et vérifie le CSSA.

Q34 : Réponses B,D

35. Séries de Bertrand : la série de terme général $\frac{1}{n^a(\ln n)^b}$ converge si et seulement si $a > 1$ ou $[a = 1 \text{ ou } b > 1]$. Pour le démontrer, par exemple dans le cas $a > 1$, on remarque que, si $\alpha \in]1, a[$ alors $\lim_{n \rightarrow +\infty} n^\alpha \cdot \frac{1}{n^a(\ln n)^b} = 0$ donc $\frac{1}{n^a(\ln n)^b} = o\left(\frac{1}{n^\alpha}\right)$, terme général d'une série convergente. Je ne détaille pas plus, car cela fait partie des exemples classiques !

Enfin, la règle de d'Alembert ne permet pas de conclure quant à la convergence de la série puisque $\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{|u_{n+1}|}{|u_n|} = 1$.

Q35 : Réponses B,C

36. PIÈGE : Par théorème de comparaison série-intégrale, les réponses C et D seraient exactes avec $\sum_{n \geq 2} u_n$ et non $\sum_{n \geq 0} u_n$, qui n'a pas de sens puisque u_0 et u_1 n'existent pas.

Q36 : Réponse E (aucune réponse exacte)

37. Si l'on suppose seulement a et b positifs, la série $\sum u_n$ n'est pas toujours absolument convergente (il faudrait $a > 1$ ou $[a = 1 \text{ et } b > 1]$) : l'écriture $\sum_{n=2}^{+\infty} |u_n|$ n'a donc pas de sens et les réponses A et B sont fausses.

La réponse C est exacte : majoration du reste d'une série qui vérifie le CSSA.

La réponse D est exacte puisque $\|u_n x^n\|_\infty^{[-1,1]} = |u_n|$ et la série $\sum |u_n|$ converge lorsque $a > 1$.

Q37 : Réponses C,D

38. Les réponses A et D comportent une « erreur » de signe ($-\ln 2$ dans A et $-\frac{\pi^2}{12}$ dans D). Les 2 autres réponses sont fantaisistes.

Q38 : Réponse E (aucune réponse exacte)

39. **A. B.** Pour $x \in [0, 1]$, $f'_n(x) = \frac{1}{\ln n} x^{n-1} (n - (n+1)x)$ et puisque $f_n(0) = f_n(1) = 0$ le maximum de f_n (qui est positive) sur $[0, 1]$ est atteint en $x = \frac{n}{n+1}$.

C. D. $\left(\frac{n+1}{n}\right)^n = e^{n \ln\left(1+\frac{1}{n}\right)} \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} \frac{1}{e}$ car $\ln\left(1+\frac{1}{n}\right) \underset{n \rightarrow +\infty}{\sim} \frac{1}{n}$, d'où la réponse D.

Q39 : Réponses A,D

40. D'après les résultats précédents, $\|f_n\|_\infty \underset{n \rightarrow +\infty}{\sim} \frac{1}{e} \cdot \frac{1}{n \ln n}$ et la série de terme général $\frac{1}{n \ln n}$ diverge.

Q40 : Réponses B,D

