CORRIGÉ ICNA Épreuve optionnelle 2012

PARTIE I (= ICNA Optionnelle 2006 !)

En fait, l'énoncé n'est pas intégralement recopié de celui de 2006 : il est PIRE ! En effet, là où les questions avaient quelque cohérence, les « concepteurs » du sujet de cette année ont voulu quand même marquer leur empreinte ; il ont changé par ci par là quelques tournures de phrase, remplacé des $\exists$ par des $\forall$ ou vice-versa etc... de sorte que certaines questions n'ont plus ni queue ni tête...

On peut aussi noter que toute une partie de l'épreuve obligatoire de 2009 était consacrée au même thème que la partie I : polynômes de Bernouilli, applications à la fonction ζ... Du réchauffé, donc !

1. Par définition du rayon de convergence, si $r \in]0, \mathrm{R}[$, la série $\sum_{n\in\mathbb{N}} a_n r^n$ est absolument convergente. Donc la réponse A est exacte, la réponse D est fausse.

Il en résulte que $\lim_{n\to+\infty} a_n r^n = 0$ donc la suite $(a_n r^n)$ est bornée : il existe $\mathrm{M} > 0$ tel que $\left|a_n r^n\right| \leqslant \mathrm{M}$ pour tout n. C'est la réponse B.

Enfin, la réponse C est inexacte : si la relation indiquée était vraie pour tout K, on obtient une absurdité en faisant tendre K vers $+\infty$.

Q1 : Réponses A,B

---

2. On a : $a_0 b_1 + a_1 b_0 = 0$ donc $b_1 = -a_1$ puis $\left|b_1\right| \leqslant \dfrac{\mathrm{M}}{r} \leqslant \dfrac{\mathrm{M}+1}{r}$.

Puis : $a_0 b_2 + a_1 b_1 + a_2 b_0 = 0$ donne $b_2 = -a_1 b_1 - a_2$ d'où $\left|b_2\right| \leqslant \left|a_1\right|\left|b_1\right| + \left|a_2\right| \leqslant \dfrac{\mathrm{M}^2}{r^2} + \dfrac{\mathrm{M}}{r^2} \leqslant \dfrac{(\mathrm{M}+1)^2}{r^2}$.

Supposons établi, jusqu'au rang $n-1$, les inégalités $\left|b_k\right| \leqslant \left(\dfrac{\mathrm{M}+1}{r}\right)^k$. Alors, à l'ordre n, puisque $b_n = -\sum_{k=0}^{n-1} b_k a_{n-k}$, on aura

$$\left|b_n\right| \leqslant \sum_{k=0}^{n-1} \left|b_k\right| . \left|a_{n-k}\right| \leqslant \sum_{k=0}^{n-1} \left(\frac{\mathrm{M}+1}{r}\right)^k . \frac{\mathrm{M}}{r^{n-k}} = \frac{\mathrm{M}}{r^n} \frac{(\mathrm{M}+1)^n - 1}{(\mathrm{M}+1)-1} = \frac{(\mathrm{M}+1)^n - 1}{r^n} \leqslant \left(\frac{\mathrm{M}+1}{r}\right)^n .$$

On vient donc de démontrer par récurrence que :

$$\forall n \in \mathbb{N},\ \left|b_n\right| \leqslant \left(\frac{\mathrm{M}+1}{r}\right)^n .$$

(M étant le réel de la question 1).

A.B. Ces deux réponses sont évidemment fausses, à cause de la formulation « pour tout M »...

C. D'après ce que j'ai montré plus haut, on aura bien, pour tout réel t positif, $\left|b_n\right| t^n \leqslant \left(\dfrac{t(\mathrm{M}+1)}{r}\right)^n$. Il n'y a pas besoin de conditions sur t. Cependant, l'énoncé écrit $0 < \left|b_n\right| t^n$; or il n'y a aucune raison que les b_n ne soient pas nuls ! Cette partie de l'inégalité est donc inexacte.

D. On a bien $b_n r^n \leqslant \left|b_n r^n\right| \leqslant r^n \left(\dfrac{\mathrm{M}+1}{r}\right)^n = (\mathrm{M}+1)^n$, donc la réponse est exacte, même si cela ne sert à rien de majorer sans les valeurs absolues !

Q2 : Réponse D

---

3. A.B.C D'après ce qui précède, on a $\lim_{n\to+\infty} \left|b_n\right| t^n = 0$ dès que $\dfrac{t(\mathrm{M}+1)}{r} < 1$ donc pour $t < \dfrac{r}{\mathrm{M}+1}$. Il en résulte que le rayon de convergence R' de la série entière $\sum_{n\in\mathbb{N}} b_n z^n$ est supérieur ou égal à $\dfrac{r}{\mathrm{M}+1}$.

Mais cela n'est pas vrai pour *tout* M. Les 3 réponses sont donc fausses.

D. Soit R' le rayon de convergence (>0) de la série entière $\sum_{n\in\mathbb{N}} b_n z^n$. Pour tout z tel que $|z| \leqslant \min(R,R')$, le produit de Cauchy des deux séries entières $\sum_{n=0}^{+\infty} a_n z^n$ par $\sum_{n=0}^{+\infty} b_n z^n$ donne la série entière $\sum_{n=0}^{+\infty} c_n z^n$, avec, pour tout $n\in\mathbb{N}$, $c_n = \sum_{k=10}^{n} a_k b_{n-k}$. Par construction, on aura donc $c_0 = 1$ et $c_n = 0$ si $n \in \mathbb{N}^*$ donc :

$$\forall z \in D(0,\min(R,R')),\ f(z) \times \sum_{n=0}^{+\infty} b_n z^n = 1\,.$$

Ce qu'affirme la réponse D est donc tout à fait possible ! (*la formulation est vraiment curieuse ! Pourquoi être négatif, alors que l'on vient justement de montrer un résultat pas si évident, à savoir que, si, f est développable en série entière au voisinage de* 0 *et si* $f(0)\neq 0$*, alors* $\frac{1}{f}$ *est aussi développable en série entière au voisinage de* 0...).

Q3 : Réponse E : aucune réponse exacte.

---

4. Pour tout $z\in\mathbb{C}$ on a $e^z = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{z^n}{n!}$ donc pour $z\in\mathbb{C}^*$ on aura : $\frac{e^z-1}{z} = \sum_{n=1}^{+\infty}\frac{z^{n-1}}{n!}$ d'où $\varphi(z) = \sum_{n=1}^{+\infty}\frac{z^{n-1}}{n!}$ pour tout $z\in\mathbb{C}$, l'égalité étant vérifiée aussi pour $z=0$.Par conséquent :

Q4 : Réponse D

---

5. L'existence du réel $\alpha > 0$ mentionné par l'énoncé est en fait une conséquence du résultat démontré à la question 3, appliqué au cas particulier de la fonction φ.

A.B. Par définition, une série entière est définie sur son disque ouvert de convergence. La fonction $\psi : z \mapsto \frac{z}{e^z-1}$ doit donc être définie pour tout z tel que $|z| < \alpha$. Or ψ n'est pas définie lorsque $z = 2i\pi$! Donc α est nécessairement inférieur ou égal à $|2i\pi| = 2\pi$. C'est la réponse A.

C.D. On effectue ici le produit de Cauchy des deux séries entières $e^{Zx} = \sum_{n=0}^{+\infty}\frac{(Zx)^n}{n!}$, de rayon de convergence $+\infty$, et $\psi(Z) = \sum_{n=0}^{+\infty} u_n Z^n$, de rayon de convergence α.

On obtient une série entière de rayon de convergence $\geqslant \alpha$, dont la somme est le produit $e^{Zx}\psi(z) = \Psi(z)$. Les formules du cours sur le produit de Cauchy donnent la réponse D.

Q5 : Réponses A,D

---

6. On a simplement, pour tout $z\in\mathbb{C}$ et tout x réel, $\Phi(z,x) = \Psi(z)$ (je ne comprends pas bien pourquoi toutes ces notations différentes...).

D'après la question précédente, Ψ est D.S.E sur $D(0,\alpha)$; le coefficient constant sera égal à $\Psi(0) = \psi(0) = 1$; le coefficient de z^n pour $n \geqslant 1$ est, d'après la formule précédente, égal à : $\sum_{p+q=n}\frac{x^q u_p}{q!} = \sum_{k=0}^{n}\frac{u_{n-k}x^k}{k!}$.

On peut donc écrire, pour $|z| < \alpha$ et tout x réel,

$$\Phi(z,x) = 1 + \sum_{n=1}^{\infty} B_n(x)\frac{z^n}{n!} \quad \text{avec } B_n(x) = n!\sum_{k=0}^{n}\frac{u_{n-k}x^k}{k!}\,.$$

De plus, on avait : $\psi(z) = \sum_{n=0}^{+\infty} u_n z^n$, et $\psi(z)\varphi(z) = 1$ avec $\varphi(z) = \sum_{n=1}^{+\infty}\frac{z^{n-1}}{n!} = \sum_{n=0}^{+\infty}\frac{z^n}{(n+1)!}$. La formule du produit de Cauchy donne alors : $u_0 = 1$ et, pour $n\geqslant 1$: $0 = \sum_{k=0}^{n}\frac{u_k}{(n-k+1)!}$.

Il est absolument impossible de savoir si cette formule est bien celle de l'énoncé, car la formule de l'énoncé comporte des pointillés à la place du terme général de la somme ! On supposera que tel est le cas...

Avec cette supposition, la réponse D est exacte ; de plus la relation de récurrence ci-dessus prouve que les coefficients u_k sont des réels, donc la réponse B est exacte (les B_n sont les *polynômes de Bernouilli*).

Q6 : Réponses B,D

---

7. Calculons les premiers polynômes de la suite.
On a $u_0 = 1$
puis $u_1 + \dfrac{u_0}{2} = 0$ d'où $u_1 = -\dfrac{1}{2}$ ce qui donne $B_1(x) = u_0 x + u_1 = x - \dfrac{1}{2}$,
puis $u_2 + \dfrac{u_1}{2} + \dfrac{u_0}{6} = 0$ donc $u_2 = \dfrac{1}{12}$ et $B_2(x) = 2(u_0\dfrac{x^2}{2} + u_1 x + u_2) = x^2 - x + \dfrac{1}{6}$,
puis $u_3 + \dfrac{u_2}{2} + \dfrac{u_1}{6} + \dfrac{u_0}{24} = 0$ donc $u_3 = 0$ et $B_3(x) = 6(u_0\dfrac{x^3}{6} + u_1\dfrac{x^2}{2} + u_2 x + u_3) = x^3 - \dfrac{3}{2}x^2 + \dfrac{x}{2}$,
puis $u_4 + \dfrac{u_3}{2} + \dfrac{u_2}{6} + \dfrac{u_1}{24} + \dfrac{u_0}{120} = 0$ donc $u_4 = -\dfrac{1}{720}$ et $B_4(x) = 24(u_0\dfrac{x^4}{24} + u_1\dfrac{x^3}{6} + u_2\dfrac{x^2}{2} + u_3 x + u_4)$ soit $B_4(x)x^4 - 2x^3 + x^2 - \dfrac{1}{30}$.
On trouve ensuite $u_5 = 0$ et $B_5 = 120(u_0\dfrac{x^5}{120} + u_1\dfrac{x^4}{24} + u_2\dfrac{x^3}{6} + u_3\dfrac{x^2}{2} + u_4 x + u_5) = x^5 - \dfrac{5}{2}x^4 + \dfrac{5}{3}x^3 - \dfrac{x}{6}$.
Cela servira à la question 9, mais ici, cela nous sert à affirmer d'emblée que les réponses A et C sont fausses.
On a, pour tous $z \in \mathbb{C}^*$ et x :

$$\Phi(z, 1-x) = \frac{z e^{z(1-x)}}{e^z - 1} = \frac{z e^z e^{-zx}}{e^z - 1} = \frac{z e^{-zx}}{1 - e^{-z}} = \Phi(-z, x)$$

donc, pour tout $z \in D(0, \alpha)$ et tout réel x :

$$1 + \sum_{n=1}^{\infty} B_n(1-x)\frac{z^n}{n!} = 1 + \sum_{n=1}^{\infty} B_n(x)\frac{(-z)^n}{n!}$$

d'où l'on tire, par unicité du D.S.E : $B_n(1-x) = (-1)^n B_n(x)$: les réponses B et D sont fausses.
Finalement :

Q7 : Réponse E : aucune réponse exacte.

---

8. On a, pour tous $z \in \mathbb{C}^*$ et x :

$$\Phi(z, 1+x) = \frac{z e^{z(1+x)}}{e^z - 1} = \frac{z e^z e^{zx}}{e^z - 1} = \frac{z(e^z - 1 + 1)e^{zx}}{e^z - 1} = \Phi(z, x) + z e^{zx}$$

donc, pour tout $z \in D(0, \alpha)$ et tout réel x :

$$1 + \sum_{n=1}^{\infty} B_n(1+x)\frac{z^n}{n!} = 1 + \sum_{n=1}^{\infty} B_n(x)\frac{z^n}{n!} + \sum_{n=0}^{+\infty} x^n \frac{z^{n+1}}{n!} = 1 + \sum_{n=1}^{\infty} B_n(x)\frac{z^n}{n!} + \sum_{n=1}^{+\infty} x^{n-1}\frac{z^n}{(n-1)!}$$

d'où l'on tire, par unicité du D.S.E : $B_n(1+x) = B_n(x) + n x^{n-1}$.
Donc :

Q8 : Réponse D

---

9. Les calculs ont été faits plus haut.

Q9 : Réponses B,D

---

10. Toutes les réponses sont fausses, il suffit de considérer les valeurs de B_1 et de B_2 ...

Q10 : Réponse E : aucune réponse exacte.

---

11. La fonction $x \mapsto \mathrm{B}_n(x)$ étant polynomiale est évidemment dérivable.

En reprenant les notations de la question 6, on a, en supposant $n \geqslant 2$: $\mathrm{B}_n(x) = n!\sum_{k=0}^{n} \frac{u_{n-k}x^k}{k!}$ donc

$\mathrm{B}'_n(x) = n!\sum_{k=1}^{n} \frac{u_{n-k}x^{k-1}}{(k-1)!} = n!\sum_{k=0}^{n-1} \frac{u_{n-1-k}x^k}{k!} = n\left((n-1)!\sum_{k=0}^{n-1} \frac{u_{n-1-k}x^k}{k!}\right) = n\mathrm{B}_{n-1}(x)$.

Remarque : on peut aussi obtenir cette relation en dérivant la relation $\Phi(z,x) = 1 + \sum_{n=1}^{\infty} \mathrm{B}_n(x)\frac{z^n}{n!}$ *par rapport à* x*, mais la justification de la dérivation terme à terme de la série est un peu délicate. Néanmoins, dans une épreuve type QCM, cela passe très bien !*

Q11 : Réponse B

---

12. Pour justifier les réponses, démontrons d'abord le résultat suivant :
Pour $n \geqslant 2$, $\mathrm{B}_n(1) = \mathrm{B}_n(0)$:

En effet, avec les notations de la question 6, on a $\mathrm{B}_n(0) = n!u_n$ et $\mathrm{B}_n(1) = n!\left(u_n + \sum_{k=1}^{n} \frac{u_{n-k}}{k!}\right)$. Or $\sum_{k=1}^{n} \frac{u_{n-k}}{k!} = \sum_{k=0}^{n-1} \frac{u_k}{(n-1)-k+1} = 0$ pour $n-1 \geqslant 1$ d'après la relation de récurrence démontrée dans la question 6. Cela donne la relation voulue.

Il en résulte que, pour $n \geqslant 2$ les fonctions g_n seront continues sur $\mathbb{R}$, et de classe $\mathscr{C}^1$ par morceaux. Dans ce cas, on sait d'après le cours que $c_k(g_n) \underset{k\to+\infty}{=} o\left(\frac{1}{k}\right)$ (cela résulte de la relation $c_k(g_n) = \frac{1}{ik}c_k(g'_n)$ et du fait que $\lim_{k\to+\infty} c_k(g'_n) = 0$ d'après Parseval).

On aura aussi, à l'aide du résultat de la question 11, $\mathrm{B}'_n(0) = \mathrm{B}'_n(1)$ pour $n \geqslant 3$, donc les fonctions g_n seront de classe $\mathscr{C}^1$ sur $\mathbb{R}$ pour $n \geqslant 3$.

En conclusion, il y a beaucoup de choses bizarres dans les réponses proposées, les résultats que nous venons de démontrer ne dépendant pas de la parité de n (seulement de $n \geqslant 2$ ou $n \geqslant 3$...). En faisant le tri, on a tout de même :

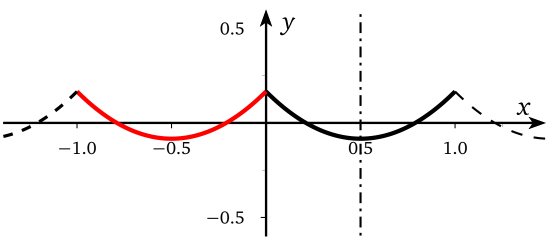
Q12 : Réponse A

---

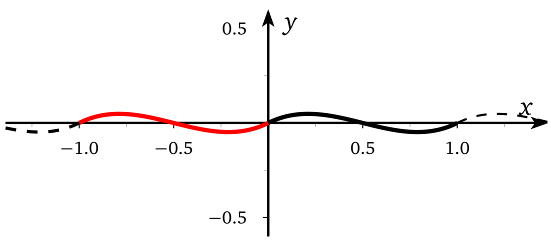
13. **A.B.** La relation $\mathrm{B}_n(1-x) = (-1)^n\mathrm{B}_n(x)$ montre que, lorsque n est pair, la courbe représentative de B_n est symétrique par rapport à la droite d'équation $x = \frac{1}{2}$; il en résulte que g_n sera alors paire (faites un dessin !).
Cette même relation montre que, lorsque n est impair, la courbe de B_n est symétrique par rapport au point de coordonnées $\left(\frac{1}{2}, 0\right)$. De plus pour n impair $\geqslant 3$, on a $\mathrm{B}_n(0) = \mathrm{B}_n(1) = 0$; donc g_n sera impaire (faites un dessin !).
Les deux réponses sont incorrectes.

C.D. Nous venons de répondre à ces questions : puisque g_{2p} est paire, on a bien $g_{2p}(x) = g_{2p}(-x)$ puis $g_{2p}(-x) = g_{2p}(1-x)$ par 1-périodicité. Idem pour g_{2p+1}.

Q13 : Réponse C



La fonction g_2



La fonction g_3

14. A.B Les g_n étant continues (par morceaux) et 1-périodiques, le théorème de Parseval donne

$$\lim_{p\to+\infty} \left\|S_p(g_n) - g_n\right\|_2 = 0$$

où $\|.\|_2$ est définie par $\left\|f\right\|_2 = \sqrt{\int_0^1 \left|f(t)\right|^2 \mathrm{d}t}$. Il s'agit de la norme de la convergence en moyenne quadratique sur $[0,1]$.

(la réponse B, qui parle de convergence en moyenne quadratique « sur $\mathbb{R}$ » n'a guère de sens...)

C.D. D'après le théorème de Dirichlet global, g_n étant continue et $\mathscr{C}^1$ par morceaux, il y a convergence normale sur $\mathbb{R}$ de sa série de Fourier vers g_n.

Q14 : Réponses A,C

---

15. • Pour $p \geqslant 1$, la fonction g_{2p} est paire donc les coefficients b_k sont nuls. On a alors :

$$a_0(g_{2p}) = 2\int_0^1 B_{2p}(t)\,\mathrm{d}t = \left[2\frac{B_{2p+1}(t)}{2p+1}\right]_0^1 = 0$$

(en utilisant la relation $B_n' = nB_{n-1}$ pour $n \geqslant 2$ et $B_n(1) = B_n(0)$ pour $n \geqslant 2$).

Puis, pour tout entier $k \geqslant 1$, en faisant deux intégrations par parties successives :

$$\begin{aligned}
a_k(g_{2p}) &= 2\int_0^1 B_{2p}(t)\cos(2\pi kt)\,\mathrm{d}t \\
&= \underbrace{\left[2\frac{B_{2p+1}(t)}{2p+1}\cos(2\pi kt)\right]_0^1}_{=0} + \frac{4\pi k}{2p+1}\int_0^1 B_{2p+1}(t)\sin(2\pi kt)\,\mathrm{d}t \\
&= \frac{4\pi k}{2p+1}\left(\underbrace{\left[\frac{B_{2p+2}(t)}{2p+2}\sin(2\pi kt)\right]_0^1}_{=0} - \frac{2\pi k}{2p+2}\int_0^1 B_{2p+2}(t)\cos(2\pi kt)\,\mathrm{d}t\right) = -\frac{(2\pi k)^2}{(2p+1)(2p+2)}a_k(g_{2p+2})
\end{aligned}$$

De plus, toujours en intégrant par parties :

$$\begin{aligned}
a_k(g_2) &= 2\int_0^1 (t^2 - t + 1/6)\cos(2\pi kt)\,\mathrm{d}t = 0 - \frac{2}{2\pi k}\int_0^1 (2t-1)\sin(2\pi kt)\,\mathrm{d}t \\
&= -\frac{1}{\pi k}\left(\left[-\frac{2t-1}{2\pi k}\cos(2\pi kt)\right]_0^1 + \frac{1}{2\pi k}\underbrace{\int_0^1 2\cos(2\pi kt)\,\mathrm{d}t}_{=0}\right) = \frac{1}{(\pi k)^2}
\end{aligned}$$

On aura donc, par récurrence sur p, pour tout entier $k \geqslant 1$:

$$\begin{aligned}
a_k(g_{2p}) &= -\frac{(2p)(2p-1)}{(2\pi k)^2}a_k(g_{2p-2}) = \frac{(2p)(2p-1)(2p-2)(2p-3)}{(2\pi k)^4}a_k(g_{2p-4}) = \cdots \\
&= (-1)^{p-1}\frac{(2p)(2p-1)(2p-2)(2p-3)\cdots 4\cdot 3}{(2\pi k)^{2(p-1)}}a_k(g_2) = 2(-1)^{p-1}\frac{(2p)!}{(2\pi k)^{2p}}
\end{aligned}$$

La formule de la réponse B est donc fausse : il manque un coefficient « 2 »...

• La fonction g_{2p+1} est impaire, donc ses coefficients a_k sont nuls.

Pour tout entier $k \geqslant 1$, en intégrant par parties :

$$b_k(g_{2p+1}) = 2\int_0^1 B_{2p+1}(t)\sin(2\pi kt)\,\mathrm{d}t = \underbrace{\left[2\frac{B_{2p+2}(t)}{2p+2}\sin(2\pi kt)\right]_0^1}_{=0} - \frac{4\pi k}{2p+2}\int_0^1 B_{2p+2}(t)\cos(2\pi kt)\,\mathrm{d}t$$

donc $b_k(g_{2p+1}) = -\dfrac{2\pi k}{2p+2}a_k(g_{2p+2}) = 2(-1)^{p+1}\dfrac{2\pi k}{2p+2}\dfrac{(2p+2)!}{(2\pi k)^{2p+2}} = 2(-1)^{p+1}\dfrac{(2p+1)!}{(2\pi k)^{2p+1}}$.

En conclusion :

Q15 : Réponse D

Remarque : ces calculs sont infaisables en temps (très) limité ! Cette question est à laisser de côté le jour de l'épreuve ! De plus, il suffit d'une petite erreur de calcul pour perdre tout le bénéfice du temps passé. Ce genre de questions est donc à éviter absolument.

---

16. A.B. Réponse B. L'explication fournie par l'énoncé est claire.

C.D. Réponse D. Il n'y a pas convergence normale des séries des dérivées successives sur l'intervalle $]1,+\infty[$ en entier, mais seulement sur des intervalles de la forme $[a,+\infty[$ avec $a>1$. En effet :

Pour tout $k\geqslant 1$ et tout $t>1$, $v_n^{(k)}(t)=\dfrac{(-\ln n)^k}{n^t}$ donc pour tout $t>a>1$ on aura $\left|v_n^{(k)}(t)\right|\leqslant\dfrac{(\ln n)^k}{n^a}$, qui est le terme général d'une série convergente (série de Bertrand classique).

Il y a donc convergence normale donc uniforme des séries des dérivées successives sur $[a,+\infty[$; par application itérée du théorème de dérivation d'une série de fonctions, la fonction ζ est donc de classe $\mathscr{C}^\infty$ sur tout intervalle de cette forme, donc finalement sur $]1,+\infty[$.

Q16 : Réponses B,D

---

17. A.B La fonction ζ est décroissante sur $]1,+\infty[$. Si elle admettait une limite finie en 1^+, elle serait majorée, donc il existerait $\mathrm{M}>0$ tel que :

$$\forall t>1,\ \zeta(t)\leqslant \mathrm{M}$$

On aurait donc :

$$\forall \mathrm{N}\in\mathbb{N}^*, \forall t>1,\ \sum_{n=1}^{\mathrm{N}}\frac{1}{n^t}\leqslant \mathrm{M}.$$

En faisant tendre t vers 1^+ dans cette dernière somme (finie), on aurait :

$$\forall \mathrm{N}\in\mathbb{N}^*,\ \sum_{n=1}^{\mathrm{N}}\frac{1}{n}\leqslant \mathrm{M}$$

ce qui impliquerait la convergence de la série $\displaystyle\sum_{n\geqslant 1}\frac{1}{n}$: absurde.

Donc ζ n'est pas majorée, et d'après le théorème de la milite monotone, on a forcément $\displaystyle\lim_{t\to 1^+}\zeta(t)=+\infty$.

C.D. La méthode suggérée par l'énoncé dans la question D est loin d'être la plus rapide ! Pour calculer la limite de ζ en $+\infty$, le théorème de la double limite, que l'on peut appliquer ici compte tenu de la convergence uniforme au voisinage de $+\infty$, est bien plus rapide !

Faisons comme il est indiqué. La formule de Taylor avec reste intégrale, appliqué à la fonction $x\mapsto(1+x)^t$, qui est de classe $\mathscr{C}^\infty$ sur $\mathbb{R}_+$, donne, pour tout $x>0$ et tout réel t :

$$(1+x)^t=1+tx+\frac{t(t-1)}{2}x^2+\int_0^x\frac{(x-u)^2}{2}t(t-1)(t-2)(1-u)^{t-3}\,\mathrm{d}u$$

On aura donc, à condition de supposer $t\geqslant 2$:

$$(1+x)^t\geqslant\frac{t(t-1)}{2}x^2$$

En appliquant cette inégalité à $x=n-1$ pour $n\geqslant 2$ on trouve :

$$n^t\geqslant\frac{t(t-1)}{2}(n-1)^2\quad\text{d'où}\quad\frac{1}{n^t}\leqslant\frac{2}{t(t-1)}\,\frac{1}{(n-1)^2}.$$

En sommant ces inégalités, on obtient bien :

$$\forall t\geqslant 2,\ 0<\sum_{n=2}^{+\infty}v_n(t)\leqslant\frac{2}{t(t-1)}\sum_{n=2}^{+\infty}\frac{1}{(n-1)^2}=\frac{\pi^2}{3t(t-1)}.$$

Cette relation permet d'en déduire $\lim\limits_{t\to+\infty}\sum\limits_{n=2}^{+\infty} v_n(t)=0$ d'où $\lim\limits_{t\to+\infty}\zeta(t)=\lim\limits_{t\to+\infty}\left(1+\sum\limits_{n=2}^{+\infty} v_n(t)\right)=1$.

On a donc bien la réponse D, mais la relation indiquée n'est vraie que pour $t\geqslant 2$ et non pour tout t comme il est indiqué (d'ailleurs, il était clair dès le début que l'inégalité $n^t\geqslant t(t-1)\geqslant(n-1)^2$ exige $t\geqslant 2$, tout simplement en comparant le comportement des deux termes quand $n\to+\infty$).

Je pense cependant que l'on peut considérer la réponse comme exacte [1], compte tenu du fait que ce qui nous intéresse, c'est le comportement quand $t\to+\infty$.

Q16 : Réponses A,D(?)

---

18. **A.B** On a vu que, pour $p\geqslant 1$, la fonction g_{2p} est somme de sa série de Fourier sur $\mathbb{R}$. En particulier, on aura

$$\forall x\in[0,1],\ \mathrm{B}_{2p}(x)=\sum_{k=1}^{+\infty} a_k(g_{2p})\cos(2\pi kx)=2(-1)^{p-1}(2p)!\sum_{k=1}^{+\infty}\frac{\cos(2\pi kx)}{(2\pi k)^{2p}}$$

En faisant $x=0$ dans cette égalité, on obtient :

$$\zeta(2p)=(2\pi)^{2p}\frac{\beta_p}{2(2p)!}$$

ce qui est la réponse de la question A.

Remarque : *ainsi, pour* $p=1$, $\mathrm{B}_2(0)=\dfrac{1}{6}$ *et on trouve* $\zeta(2)=(2\pi)^2.\dfrac{1}{6}.\dfrac{1}{4}=\dfrac{\pi^2}{6}$, *formule bien connue et qui permet de vérifier les résultat de ses calculs (voire même de répondre à la question même si on n'a pas fait ces calculs !). Pour* $p=2$, $\mathrm{B}_4(0)=-\dfrac{1}{30}$, *et on trouve* $\zeta(4)=(2\pi)^4.\dfrac{1}{30}.\dfrac{1}{48}=\dfrac{\pi^4}{90}$, *autre résultat bien connu...*

C.D. On a vu que $\lim\limits_{p\to+\infty}\zeta(2p)=1$. Donc d'après la formule obtenue ci-dessus, on a : $\beta_p\underset{p\to+\infty}{\sim}\dfrac{2(2p)!}{(2\pi)^{2p}}$ donc, à l'aide de la formule de Stirling comme le dit si gentiment l'énoncé :

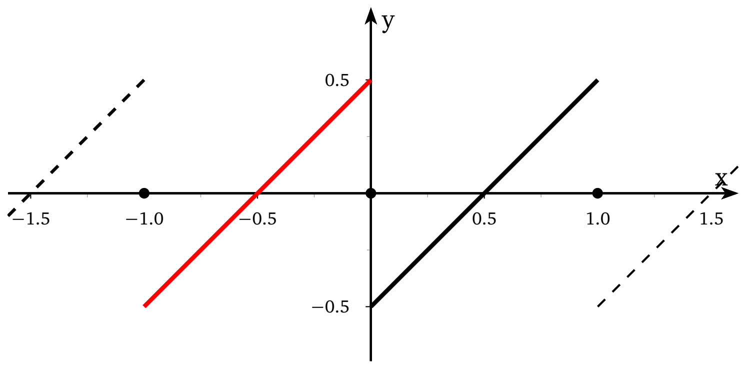
$$\beta_p\underset{p\to+\infty}{\sim}\frac{2}{(2\pi)^{2p}}\left(\frac{2p}{\mathrm{e}}\right)^{2p}\sqrt{4\pi p}=4\sqrt{\pi p}\left(\frac{p}{\pi\mathrm{e}}\right)^{2p}$$

C'est la réponse C.

Q18 : Réponses A,C

---

19. Il suffit de faire une rapide figure pour conclure !



Q19 : Réponse B

---

20. On applique ici les théorèmes du cours. g_1 étant seulement $\mathscr{C}^1$ par morceaux, mais pas continue, sa série de Fourier converge en moyenne quadratique (Parseval) (c'est la réponse A) et converge simplement sur $\mathbb{R}$ vers

1. ou alors, ce serait un piège bien méchant... Il s'agit plus vraisemblablement d'une erreur (encore) du concepteur du sujet.

sa régularisée (Dirichlet local). Puisque l'on a posé $g_1(0) = 0 = \frac{1}{2}\left(\lim_{x\to 0^-} g_1(x) + \lim_{x\to 0^+} g_1(x)\right)$, g_1 est égale à sa régularisée, donc la série de Fourier de g_1 converge simplement vers g_1 sur $\mathbb{R}$: la réponse C est inexacte.

La réponse D est exacte : la justification théorique fournie par l'énoncé est claire. Mais pour vérifier qu'elle est entièrement juste et qu'il n'y a pas (encore) un piège, il faut déterminer la série de Fourier de g_1 !

g_1 étant imapire, les a_k sont nuls et, pour $k \geqslant 1$ on a :

$$b_k(g_1) = 2\int_0^1 \left(t - \frac{1}{2}\right)\sin(2k\pi t)\,\mathrm{d}t = \left[-\frac{2}{2k\pi}\left(t-\frac{1}{2}\right)\cos(2k\pi t)\right]_0^1 + \frac{2}{2k\pi}\underbrace{\int_0^1 \cos(2k\pi t)\,\mathrm{d}t}_{=0}$$

$$= -\frac{1}{k\pi}$$

donc la série de Fourier de g_1 est bien la série $\sum_{k\geqslant 1} -\frac{1}{k\pi}\sin(2k\pi x)$.

$\boxed{\textbf{Q20 : Réponses A,D}}$

---

21. On vient de faire le calcul. Aucune réponse n'est exacte (il y a toujours quelque chose qui manque, un signe ou un coefficient 2...).

$\boxed{\textbf{Q21 : Réponse E : aucune réponse exacte.}}$

---

22. **A.B.** Puisque la suite $\left(-\frac{1}{\pi}\mathrm{G}_\mathrm{N}\right)_\mathrm{N}$ est celle des sommes partielles de la série de Fourier de g_1, elle converge simplement vers g_1 sur $[0,1]$.

Donc la suite (h_N) converge simplement vers $-h.g_1$. Or $-h(x)g_1(x) = \begin{cases} h(x)\left(\frac{1}{2} - x\right) & \text{si } x \in]0,1[\\ 0 & \text{si } x = 0 \text{ ou } x = 1 \end{cases}$.

Aucune des deux réponses n'est donc juste !

C. D'après l'hypothèse faite, on aura, pour tout $x \in [0,1]$:

$$\left|h_\mathrm{N}(x)\right| = \frac{|h(x)|}{\pi}\left|\mathrm{G}_\mathrm{N}(x)\right| \leqslant \mathrm{K}\frac{\|h\|_\infty}{\pi}$$

ce qui n'est pas vraiment la réponse C...

D. Cependant, ce qui précède prouve l'existence, pour la suite (h_N), d'une fonction dominante qui est intégrable sur $[0,1]$ (car c'est une constante). Le théorème de convergence dominée permet alors d'affirmer que :

$$\lim_{\mathrm{N}\to+\infty}\int_0^1 h_\mathrm{N}(x)\,\mathrm{d}x = \int_0^1 h(x)\left(\frac{1}{2} - x\right)\,\mathrm{d}x$$

(les hypothèses de continuité par morceaux du théorème sont bien vérifiées ici).

Or : $\int_0^1 h_\mathrm{N}(x)\,\mathrm{d}x = \int_0^1 h(x)\sum_{n=1}^{\mathrm{N}}\frac{\sin(2\pi nx)}{n\pi} = \sum_{n=1}^{\mathrm{N}}\frac{1}{n\pi}\int_0^1 h(x)\sin(2\pi nx)\,\mathrm{d}x$, donc on obtient la réponse D.

$\boxed{\textbf{Q22 : Réponse D}}$

Remarque : *Cette question donne une impression d'inachevé, comme si le problème avait été coupé en plein milieu... En écrivant, pour* $x \in [0,1]$, $\mathrm{G}_\mathrm{N}(x) = -2\pi x + \int_0^x \left[2\pi + \mathrm{G}'_\mathrm{N}(t)\right]\,\mathrm{d}t$, *je vous laisse le soin de démontrer l'existence de la constante* M *admise par l'énoncé.*

Et on peut affiner ce résultat en démontrant l'existence d'un réel $\ell > 1/2$ *tel que* $\lim_{\mathrm{N}\to+\infty}\left(\max_{x\in[0,1]}\mathrm{G}_\mathrm{N}(x)\right) = \ell$ *: c'est le phénomène de Gibbs...*

PARTIE II (= ICNA Optionnelle 2007 !)

23. C'est directement du cours.

Q23 : Réponses A,C

---

24. La matrice A est de rang 2, puisqu'elle possède 12 colonnes identiques, et que la treizième est linéairement indépendante des autres. D'après le théorème du rang, le noyau de f est donc de dimension 11. 0 est donc valeur propre de f. f étant diagonalisable, l'ordre de multiplicité de 0 est égal à la dimension du sous-espace propre associé, i.e à celle de $\operatorname{Ker} f$, donc à 11.

Q24 : Réponse E (pas de bonne réponse)

---

25. **A.** $\operatorname{Im} f$ est un sous-espace vectoriel de E stable par f, on peut donc parfaitement définir l'endomorphisme *induit* par f sur $\operatorname{Im} f$ (ce n'est pas une simple restriction !).

B. g est bien un *endomorphisme* de $\operatorname{Im} f$ puisque $\operatorname{Im} f$ est stable par f, et $\operatorname{Im} f = \operatorname{Vect}(e_7, u)$, puisque l'image d'un endomorphisme est le sous-espace vectoriel engendré par les images des vecteurs de base ; ici $e_7 = f(e_i)$ pour $i \neq 7$ et $u = f(e_7)$.

C. D. Pour répondre à cette question, il suffit d'exprimer les images $f(e_7)$ et $f(u)$ des vecteurs de la base (e_7, u) de $\operatorname{Im} f$ en fonction de ceux-ci. Or $f(e_7) = u$ et $f(u) = \sum_{i \neq 7} f(e_i) + f(e_7) = 12e_7 + u$. C'est donc la deuxième matrice qui convient.

Q25 : Réponses B,D

---

26. En calculant le polynôme caractéristique de la matrice précédente, on trouve $\chi_g = X^2 - X - 12$. On sait que χ_g divise χ_f (th. du cours), et que 0 est une valeur propre d'ordre 11, donc $\chi_f = -X^{11}\chi_g$.

Remarque : la réponse C est inexacte car il est communément admis de prendre comme définition du polynôme caractéristique : $\chi_f = \det(f - X\mathrm{Id})$ *et* **non** $\det(X\mathrm{Id} - f)$...

Q26 : Réponse A

---

27. **A. B.** Le spectre de A est donc l'ensemble des racines du polynôme $-X^{11}(X^2 - X - 12)$, c'est l'ensemble $\{-3, 0, 4\}$.

C. D. A est diagonalisable ; si U désigne la matrice de passage de la base canonique à une base de vecteurs propres (rangés dans un ordre convenable), on a $A = UDU^{-1}$ (ou $D = U^{-1}AU$) avec $D = \operatorname{diag}(4, -3, 0, 0, \ldots, 0)$. Aucune des réponses C. et D. n'est donc exacte.

Q28 : Réponse B

---

28. **A. B.** On a : $D = \operatorname{diag}(4, -3, 0, 0, \ldots, 0) = 4P_1 - 3P_2$, et $D^n = \operatorname{diag}(4^n, (-3)^n, 0, 0, \ldots, 0) = 4^n P_1 + (-3)^n P_2$. $A = UDU^{-1}$ implique $A^n = UD^nU^{-1}$, d'où $A^n = U(4^n P_1 + (-3)^n P_2)U^{-1} = 4^n A_1 + (-3)^n A_2$.
Réponse A.

C. D. A étant diagonalisable, son polynôme minimal Π_A est scindé à racines simples, et ses racines sont les valeurs propres de A. Donc $\Pi_A = X(X+3)(X-4)$. On sait de plus qu'il s'agit d'un polynôme annulateur de A.

La division euclidienne de X^n par Π_A s'écrit : $X^n = X(X+3)(X-4)Q(X) + aX^2 + bX + c$. En faisant successivement $X = 0$, $X = -3$ et $X = 4$, on obtient le système (puisque $n \geqslant 1$) :

$$\begin{cases} 0 = c \\ (-3)^n = 9a - 3b \\ 4^n = 16a + 4b \end{cases}$$

qui conduit à

$$c = 0 \qquad b = \frac{4.(-3)^{n-1} + 3.4^{n-1}}{7} \qquad a = \frac{4^{n-1} - (-3)^{n-1}}{7}$$

On a alors $A^n = \Pi_A(A)Q(A) + aA^2 + bA + cI_3 = aA^2 + bA + cI_3$, ce qui donne la formule de la question C.

Q15 : Réponses A,C

PARTIE III (= ICNA Optionnelle 2007 !)

29. D'après l'énoncé, 0 est racine simple de P, donc $P = XQ$ avec 0 non racine de Q, c'est-à-dire $Q(0) \neq 0$. Et il n'y a pas de condition supplémentaire sur $Q'(0)$.

Q29 : Réponse C

---

30. Puisque $Q(0) \neq 0$, le polynôme Q n'est pas divisible par X, donc les seuls polynômes qui divisent à la fois X et Q sont les polynômes constants.

Donc X et Q sont premiers entre eux, ce qui équivaut à dire que leur pgcd est égal à 1 (la formulation de la réponse A est assez curieuse, mais pas inexacte).

De même, les seuls polynômes qui divisent à la fois X^2 et Q sont les polynômes constants, donc X^2 et Q sont premiers entre eux. Ils vérifient donc forcément l'identité de Bezout ! Même si la formulation de la question D. est maladroite (à cause du « puisque »), la phrase est exacte.

Remarque : la notion de pgcd ne figure que dans le programme MP, pas dans le programme PSI ni PC. Mais les épreuves de l'ICNA sont communes aux trois filières...

Q30 : Réponses A,D

---

31. *Remarque : le théorème de décomposition des noyaux ne figure que dans le programme MP..*

Les polynômes X et Q étant premiers entres eux, le théorème de décomposition des noyaux s'écrit :

$$\operatorname{Ker}\big(f \circ Q(f)\big) = \operatorname{Ker} f \oplus \operatorname{Ker} Q(f)$$

Puisque P est annulateur de f par hypothèse, on a $P(f) = f \circ Q(f) = 0$ (ce qui est la réponse D., l'écriture $fQ(f)$ pour désigner $f \circ Q(f)$ étant licite[2] ; donc $\operatorname{Ker}\big(f \circ Q(f)\big) = E$, et $E = \operatorname{Ker} f \oplus \operatorname{Ker} Q(f)$.

Cela donne donc les réponses B. et D. Je pense que c'est ce qu'attendait le concepteur du sujet[3], malheureusement, la réponse à la question A est elle aussi exacte ! ! En effet :

Dans la question 2., on a vu que X^2 et Q sont aussi premiers entre eux. Donc, d'après le th. de décomposition des noyaux : $\operatorname{Ker}\big(f^2 \circ Q(f)\big) = \operatorname{Ker} f^2 \oplus \operatorname{Ker} Q(f)$. Mais, puisque $f \circ Q(f) = 0$, on a aussi $f^2 \circ Q(f) = 0$ donc $E = \operatorname{Ker} f^2 \oplus \operatorname{Ker} Q(f)$. C'est la réponse A.
Finalement :

Q31 : Réponses (A,) B,D (3 réponses exactes)

---

32. Puisque $E = \operatorname{Ker} f \oplus \operatorname{Ker} Q(f)$, on a $\dim \operatorname{Ker} Q(f) + \dim \operatorname{Ker} f = n$, donc d'après le théorème du rang,
$n - \dim \operatorname{Im} f = \dim \operatorname{Ker} f = n - \dim \operatorname{Ker} Q(f) = \dim \operatorname{Im} Q(f)$. Cela donne les réponses B. et D. ; là encore, je pense que c'est ce qu'attendait le correcteur. Malheureusement, les réponses aux deux autres questions sont aussi exactes ! ! En effet :

On a vu dans la question précédente que $E = \operatorname{Ker} f^2 \oplus \operatorname{Ker} Q(f)$; donc $n = \dim \operatorname{Ker} f^2 + \dim \operatorname{Ker} Q(f)$ soit $\dim \operatorname{Ker} Q(f) = n - \dim \operatorname{Ker} f^2 = \dim \operatorname{Im} f^2$ d'après le théorème du rang. Ce sont les réponses A. et C.

Conclusion :

Q32 : Réponses (A,) B (,C) ,D (4 réponses exactes)

2. d'ailleurs dans toute la suite de l'énoncé, pour écrire la composition de deux endomorphismes u et v, les deux notations uv et $u \circ v$ sont utilisées sans que l'on sache pourquoi l'une est tantôt privilégiée...
3. et la conception du sujet a été un peu rapide (euphémisme)...

---

33. **A.** Le théorème du rang donne $\dim E = \dim \operatorname{Im} f + \dim \operatorname{Ker} f$ pour tout endomorphisme f de E, mais on n'a pas forcément $E = \operatorname{Ker} f \oplus \operatorname{Im} f$ dans le cas général ! ! (contre-exemples donnés en cours ; un exercice classique consiste d'ailleurs à démontrer que $E = \operatorname{Ker} f \oplus \operatorname{Im} f \iff \operatorname{Ker} f = \operatorname{Ker} f^2$ ...).

B. On a déjà vu que $Q(f) \circ f = 0$ donc, pour tout $x \in E$, $Q(f)\left[f(x)\right] = 0$ donc $\operatorname{Im} f \subset \operatorname{Ker} Q(f)$.

C. est exacte. En effet, on sait que $f \circ Q(f) = Q(f) \circ f = 0$ donc, en composant par f à droite et à gauche, on obtient $f^2 \circ Q(f) = Q(f) \circ f^2 = 0$. Même si l'affirmation $f^2 \circ Q(f) = P(f)$ semble fausse (on a $P = XQ$ et non $P = X^2Q$), elle est vraie ici puisque tous ces endomorphismes sont nuls ! L'égalité $Q(f) \circ f^2 = 0$ implique alors $\operatorname{Im} f^2 \subset \operatorname{Ker} Q(f)$. Là encore, je ne pense pas que le concepteur du sujet attendait cette réponse et qu'il a voulu mettre un piège grossier...

D. On a vu à la question B. : $\operatorname{Im} f \subset \operatorname{Ker} Q(f)$ et, dans la question 32, $\dim \operatorname{Im} Q(f) = \dim \operatorname{Ker} f$. D'après le théorème du rang, on en déduit $\dim \operatorname{Ker} Q(f) = \dim \operatorname{Im} f$. Les deux sous-espaces vectoriels $\operatorname{Im} f$ et $\operatorname{Ker} Q(f)$ étant inclus l'un dans l'autre, et de même dimensions, sont égaux.
Enfin, on a vu à la question 31 : $E = \operatorname{Ker} f \oplus \operatorname{Ker} Q(f)$. On a donc $E = \operatorname{Ker} f \oplus \operatorname{Im} f$.

Q33 : Réponses B,(C,) D (3 réponses exactes)

---

34. **A.** est vraie pour la même raison que dans la question 33.B, le fait que E est de dimension finie n'ayant pas servi.

B. Même chose que dans la question 33., la dimension n'intervenant pas ici.

C. Tout polynôme Q s'écrit sous la forme $Q = \sum_{k=0}^{\deg Q} a_k X^k = a_0 + X \sum_{k=1}^{\deg Q} a_k X^{k-1}$, ou encore sous la forme $Q = a + XQ_1$, avec $a = Q(0)$.

D. L'égalité $Q = XQ_2$ est impossible, puisque $Q(0) \neq 0$.

J'avoue ici ne pas bien savoir quelle question le concepteur du sujet pensait fausse...

Q34 : Réponses A,B,C (3 réponses exactes)

---

35. **A.** La relation $Q = a + XQ_1$ implique $Q(f) = a\mathrm{Id}_E + f \circ Q_1(f)$, donc, pour tout $x \in E$: $Q(f)(x) = ax + f \circ Q_1(f)(x)$.
Si x appartient à $\operatorname{Ker} Q(f)$, puisque $a = Q(0)$ est non nul, on en tire $0 = ax + f \circ Q_1(f)(x)$ soit
$x = \frac{-1}{a} f\left[Q_1(f)(x)\right] = f\left(\frac{-1}{a} Q_1(f)(x)\right)$ (f étant linéaire). C'est la réponse proposée ici.

B. Faux ! l'écriture $Q_1(f(x))$ *n'a aucun sens* puisque Q_1 est un polynôme et $f(x)$ un vecteur...(dans la ligne du dessus, c'est $Q_1(f)(x)$...attention à la place des parenthèses ! !)

C. Faux ! L'écriture $f(x)Q_1(f)(x)$ *n'a aucun sens* : produit de deux vecteurs ?

D. La relation démontrée en A. prouve que, si $x \in \operatorname{Ker} Q(f)$, alors $x \in \operatorname{Im} f$, c'est-à-dire l'inclusion $\operatorname{Ker} Q(f) \subset \operatorname{Im} f$. L'inclusion réciproque a été vue dans la question 34, on en déduit donc $\operatorname{Ker} Q(f) = \operatorname{Im} f$ puis $E = \operatorname{Ker} f \oplus \operatorname{Im} f$ d'après la relation établie dans la question 31 (le théorème de décomposition des noyaux utilisé dans cette question est valable en dimension quelconque).

Finalement :

Q35 : Réponses A,D

---

36. Tout ce que permet de dire le cours dans le cas général, c'est que, si P est un polynôme annulateur de f, le spectre de f est *inclus* dans l'ensemble des racines de P, d'où la réponse B.

On notera ici l'absurdité des phrases dans les questions A, B et C : en effet, *par définition*, si f est un endomorphisme d'un $\mathbb{K}$-espace vectoriel , on appelle valeur propre de f *tout élément* λ *de* $\mathbb{K}$ tel que etc... Cela n'a donc aucun sens de parler du spectre dans $\mathbb{C}$ d'un endomorphisme d'un espace vectoriel réel ! ! Un endomorphisme d'un $\mathbb{R}$-espace vectoriel a forcément des valeurs propres réelles par définition (s'il y en a) : c'est la réponse D (cependant , à l'aide du polynôme caractéristique, on peut effectivement parler du spectre dans $\mathbb{C}$ d'une *matrice* à coefficients réels.)

En conséquence, je ne sais pas quoi répondre à cette question, mais on considèrera quand même que la réponse B est exacte...

Bref :

Q8 : Réponses B,D

---

37. La trace de f est la somme de ses valeurs propres dans $\mathbb{C}$ (lorsque l'on considère la matrice de f, puisque le polynôme caractéristique de f est scindé dans $\mathbb{C}[X]$), chacune étant comptée avec son ordre de multiplicité. Ici, les valeurs propres possibles (même dans $\mathbb{C}$) sont 0 et 1. La trace de f sera donc un entier positif ou nul, égale au nombre de fois où figure la valeur propre 1, c'est-à-dire à l'ordre de multiplicité de 1.

Enfin, cette trace est nulle si et seulement si 1 n'est pas valeur propre , ce qui équivaut à $f - \mathrm{Id}_E$ bijectif. La justification donnée à la question D. est donc exacte.

Q9 : Réponses C,D

PARTIE IV (= ICNA Optionnelle 2007 !)

38. Il suffit de lire, puisque l'énoncé (réponse D) fournit (presque) la démonstration complète :
En effet, pour $x \geqslant 0$ la fonction f est bien continue sur $\mathbb{R}_+^*$.

Si $x = 0$, $f(t) = 0$ et il n'y a pas de problème ; sinon, $\ln(1 + xt^2) \underset{t\to 0}{\sim} xt^2$ donc $f(t) \underset{t\to 0}{\sim} \dfrac{xt}{1+t^2}$ donc $\lim\limits_{t\to 0^+} f(t) = 0$ et f se prolonge bien par continuité en 0.
Enfin, au voisinage de $+\infty$, on a bien $f(t) \to 0$ mais il est bien connu que cela ne suffit pas à assurer l'intégrabilité (réponse B fausse). Par contre, $\lim\limits_{t\to+\infty} t^2 f(t) = \lim\limits_{t\to+\infty} \dfrac{\ln(1+xt^2)}{t} = 0$, donc pour t assez grand on aura bien $0 \leqslant f(t) \leqslant \dfrac{1}{t^2}$, et la fonction $t \mapsto \dfrac{1}{t^2}$ est intégrable au voisinage de $+\infty$.

Et là, il y a un PIÈGE ! En effet, il est écrit que la fonction $t \mapsto \dfrac{1}{t^2}$ est intégrable sur $]0,+\infty[$, ce qui est faux ! (elle est intégrable sur $[1,+\infty[$, par contre). Du coup, la réponse D devient fausse !
(il y a d'ailleurs peut-être une deuxième erreur dans la réponse D, que je n'ai pas vu tout de suite : l'énoncé parle de l'intégrabilité sur l'intervalle fermé $[0,+\infty[$ alors que la fonction n'est pas définie en 0 ; cependant, elle s'y prolonge par continuité...Bref :)

Q38 : Réponse E (aucune réponse exacte)

---

39. **A. B.** Un calcul simple montre que la formule de la réponse B est exacte. Mais le problème est que l'énoncé ne définit clairement pas F en $(0,0)$, ni ϕ en 0...Question très douteuse...

C. On sait que, pour tout $u \in]-1,1[$, $\ln(1+u) = \displaystyle\sum_{k=1}^{+\infty} (-1)^{k-1} \frac{u^k}{k}$, donc, pour $u \neq 0$, $\psi(u) = \displaystyle\sum_{k=1}^{+\infty} (-1)^{k-1} \frac{u^{k-1}}{k}$, et cette égalité reste vraie pour $u = 0$. ψ est donc bien développable en série entière au voisinage de 0, avec un rayon de convergence égal à 1 ; d'après le cours, elle est donc bien de classe $\mathscr{C}^\infty$ sur $]-1,1[$.
Cependant, il y a un problème avec la formulation de l'énoncé, qui dit que « développable en série entière au voisinage de 0 » implique « de classe $\mathscr{C}^\infty$ sur $]-1,1[$ ». Cela est faux dans le cas général (c'est vrai ici seulement parce que le rayon de convergence est 1)....

D. Cela n'a pas de sens, pour les fonctions de plusieurs variables, de parler de différentiabilité sur un ensemble qui est fermé ! !

Q39 : Réponses B(? ?),C(?)

---

40. Pour $x \geqslant 0$ (seulement), on considère $g(x) = \displaystyle\int_0^{+\infty} F(x,t)\,dt$.

Il s'agit ici d'appliquer le théorème sur la dérivabilité d'une intégrale à paramètres. Les quatre premières hypothèses ne posent pas de problème ; reste l'hypothèse de domination pour $\left|D_1 f\right|$.

Soit $a > 0$. Pour tout $x \in [a,+\infty[$, on a $\left|D_1 F(x,t)\right| \leqslant \dfrac{t}{(1+at^2)(1+t^2)}$ qui est une fonction continue sur $[0,+\infty[$, positive, et intégrable sur $[0,+\infty[$ (équivalente $+\infty$ à $\dfrac{1}{at^3}$). Le théorème de dérivabilité d'une intégrale à paramètres permet alors de conclure que g est de classe $\mathscr{C}^1$ sur $[a,+\infty[$, et ce, pour tout $a>0$, donc est de classe $\mathscr{C}^1$ sur $\mathbb{R}_+^*$.

Et, pour tout $x>0$, on a : $g'(x)=\displaystyle\int_0^{+\infty}\frac{t}{(1+xt^2)(1+t^2)}\,\mathrm{d}t=\frac{1}{2}\int_0^{+\infty}\frac{\mathrm{d}u}{(1+xu)(1+u)}$ en effectuant le changement de variables $u=t^2$, $\mathscr{C}^1$-difféomorphisme de $\mathbb{R}_+$ sur $\mathbb{R}_+$.

Donc, pour $x\neq 1$, $g'(x)=\displaystyle\frac{1}{2}\int_0^{+\infty}\left[\frac{\frac{-x}{1-x}}{1+xu}+\frac{\frac{1}{1-x}}{1+u}\right]\mathrm{d}u=\frac{1}{2(1-x)}\left[\ln\left(\frac{1+u}{1+xu}\right)\right]_{u=0}^{u\to+\infty}=\frac{\ln x}{2(x-1)}$.

g étant de classe $\mathscr{C}^1$ cette relation se prolonge en $x=1$: $g'(1)=\displaystyle\lim_{x\to1}\frac{\ln x}{2(x-1)}=\frac{1}{2}$. C'est la réponse D.De plus, cette égalité montre que $\displaystyle\lim_{x\to0^+}g'(x)=+\infty$, donc g n'est pas dérivable en 0. La réponse B. est donc fausse.

Enfin, je ne sais pas trop quoi penser de la réponse A. Tout ce qui est écrit est correct, mais, là encore la formulation est ambigüe : « g est dérivable *uniquement* sur $]0,+\infty[$ car..» La raison invoquée suffit à démontrer qu'elle est dérivable effectivement sur $\mathbb{R}_+^*$, mais pas qu'elle ne l'est pas en 0^+, cela a été fait ailleurs...

Q40 : Réponses A(?),D

⋆ ⋆ ⋆ ⋆
⋆ ⋆ ⋆
⋆ ⋆
⋆