# CORRIGÉ ICNA Épreuve commune 2008

## PARTIE I

**1.** Compte tenu de l'expression analytique de $f$, on obtient directement, d'après le cours :

$$\mathscr{M}_{\mathscr{B}}(f)=\begin{pmatrix}2\alpha+3 & -\alpha & \alpha+1\\ \alpha-2 & \alpha-1 & \alpha-2\\ 2\alpha-1 & \alpha-1 & 2\alpha-1\end{pmatrix}$$

**Q1 : Réponse B**

---

**2.** Pour la suite, $\alpha=-1$ donc $\mathrm{M}=\begin{pmatrix}-1 & 1 & 0\\ -3 & -2 & -3\\ -3 & -2 & -3\end{pmatrix}$.

Les questions suivantes étant liées, autant calculer directement le polynôme caractéristique de $f$ :

$$\begin{aligned}\chi_{\mathrm{M}}(\mathrm{X})&=\begin{vmatrix}-1-\mathrm{X} & 1 & 0\\ -3 & -2-\mathrm{X} & -3\\ -3 & -2 & -3-\mathrm{X}\end{vmatrix}\\ &=\begin{vmatrix}-1-\mathrm{X} & 1 & 0\\ 0 & -2-\mathrm{X} & -3\\ \mathrm{X} & -2 & -3-\mathrm{X}\end{vmatrix}\quad\text{en faisant } \mathrm{C}_1\leftarrow \mathrm{C}_1-\mathrm{C}_3\\ &=-(1+\mathrm{X})(2+\mathrm{X})(3+\mathrm{X})-3\mathrm{X}+6(1+\mathrm{X})=-(\mathrm{X}^3+6\mathrm{X}^2+8\mathrm{X})\end{aligned}$$

Les valeurs propres de $f$ sont donc $0,-2,-4$ ; étant distinctes, M est diagonalisable et est semblable à $\mathrm{D}=\mathrm{diag}(0,-2,-4)$.
Ce calcul préliminaire permet de répondre plus vite aux questions qui suivent.

A. B. D. $\mathrm{Ker}\, f$ est une droite vectorielle (c'est le sous-espace propre associé à la valeur propre $0$, qui est simple), donc le théorème du rang donne $\mathrm{rg}\, f=2$. Réponses fausses (et la « justification » de la question B est fausse aussi).

C. Réponse exacte ; la justification de l'énoncé est claire.

**Q2 : Réponse C**

---

**3.** Pour la suite, on peut aussi déterminer les sous-espaces propres $\mathrm{E}_0,\mathrm{E}_{-2}$ et $\mathrm{E}_{-4}$ associés aux trois valeurs propres $0,-2$ et $-4$.

Soit $\mathrm{V}=\begin{pmatrix}x\\ y\\ z\end{pmatrix}$.

$$\mathrm{MV}=0\iff\begin{cases}-x+y=0\\ -3x-2y-3z=0\end{cases}\iff\begin{cases}y=x\\ 3z=-5x\end{cases}\quad\text{donc } \mathrm{E}_0=\mathrm{Vect}\begin{pmatrix}3\\ 3\\ -5\end{pmatrix}$$

$$\mathrm{MV}=-2\mathrm{V}\iff\begin{cases}x+y=0\\ -3x-3z=0\\ -3x-2y-z=0\end{cases}\iff\begin{cases}y=-x\\ z=-x\end{cases}\quad\text{donc } \mathrm{E}_{-2}=\mathrm{Vect}\begin{pmatrix}1\\ -1\\ -1\end{pmatrix}$$

$$\mathrm{MV}=-4\mathrm{V}\iff\begin{cases}3x+y=0\\ -3x+2y-3z=0\\ -3x-2y+z=0\end{cases}\iff\begin{cases}y=-3x\\ z=-3x\end{cases}\quad\text{donc } \mathrm{E}_{-4}=\mathrm{Vect}\begin{pmatrix}1\\ -3\\ -3\end{pmatrix}$$

On a alors $\operatorname{Ker} f = E_0$ et $\operatorname{Im} f = E_{-2} \oplus E_{-4}$ (je rappelle ici un résultat important : les vecteurs propres associés à une valeur propre *non nulle* appartiennent nécessairement à l'image).

Les sous-espaces propres étant supplémentaires, on a bien $\mathbb{R}^3 = \operatorname{Ker} f \oplus \operatorname{Im} f$ ; puisque $\operatorname{Im} f = \operatorname{Vect}\left\{\begin{pmatrix}1\\-1\\-1\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}1\\-3\\-3\end{pmatrix}\right\}$,

$\operatorname{Im} f$ est le plan d'équation $y = z$, et il contient bien le vecteur $e_2 + e_3$.
Conclusion :

**Q3 : Réponses A,C**

---

**4.** Le calcul du polynôme caractéristique a déjà été fait. Je rappelle que le degré du polynôme caractéristique d'un endomorphisme est toujours égal à la dimension de l'espace (ici, $3$), et que cela n'a rien à voir avec son rang !

**Q4 : Réponse E (aucune réponse exacte)**

---

**5.** Déjà fait. Je rappelle que $0$ est valeur propre d'un endomorphisme si et seulement si celui-ci n'est pas injectif (ce qui équivaut à non bijectif si l'espace est de dimension finie).

**Q5 : Réponse B**

---

**6.** Déjà fait.

**Q6 : Réponse A**

---

**7.** D'après l'énoncé, $\lambda_1 = -4$ donc, compte tenu des contraintes, $v_1 = \begin{pmatrix}1\\-3\\-3\end{pmatrix}$ ; $\lambda_2 = -2$ et $v_2 = \begin{pmatrix}1\\-1\\-1\end{pmatrix}$ ; $\lambda_3 = 0$ et $v_3 = \begin{pmatrix}1\\1\\-\frac{5}{3}\end{pmatrix}$.

$(v_1, v_2, v_3)$ est une base de $\mathbb{R}^3$, puisque $f$ est diagonalisable ; $(v_1, v_2)$ est une base de $\operatorname{Im} f$ et $v_3$ engendre $\operatorname{Ker} f$.

La réponse D est exacte, puisque $f(v_3) = 0$ !

**Q7 : Réponses C,D**

---

**8.** $P = \begin{pmatrix}1 & 1 & 1\\-3 & -1 & 1\\-3 & -1 & -\frac{5}{3}\end{pmatrix}$ et $D = \begin{pmatrix}-4 & 0 & 0\\0 & -2 & 0\\0 & 0 & 0\end{pmatrix}$.

D'après le cours, $D = P^{-1}MP$ soit $PD = MP$.

Enfin, la réponse D est fausse : les valeurs propres de $M$ et de $D$ sont, par construction, les mêmes !

**Q8 : Réponse B**

---

**9.** Le système proposé s'écrit, en posant $V = \begin{pmatrix}x\\y\\z\end{pmatrix}$ : $PV = \begin{pmatrix}r\\s\\t\end{pmatrix}$.

$P$ étant inversible (c'est une matrice de passage !), ce système est un système de Cramer qui admet pour unique solution $V = P^{-1}\begin{pmatrix}r\\s\\t\end{pmatrix}$.

**Q9 : Réponse C**

---

**10.** $P$ est la matrice de passage de $\mathscr{B}$ à $\mathscr{B}'$, donc $P^{-1}$ est celle de $\mathscr{B}'$ à $\mathscr{B}$ ; par définition, les coefficient des ses *colonnes* sont donc les coordonnées des vecteurs de $\mathscr{B}$ dans $\mathscr{B}'$.
Les réponses A,B, C sont donc fausses (noter que $\operatorname{rg} P = \operatorname{rg} P^{-1} = 3$ !)

Plutôt que de chercher $P^{-1}$ par les méthodes habituelles, autant se servir de l'énoncé ! On effectue donc le produit matriciel :

$$\begin{pmatrix} -4 & -1 & -3 \\ 12 & -2 & 6 \\ 0 & 3 & -3 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ -3 & -1 & 1 \\ -3 & -1 & -\frac{5}{3} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 8 & 0 & 0 \\ 0 & 8 & 0 \\ 0 & 0 & 8 \end{pmatrix}$$

Le produit des deux matrices est égal à $8I_3$ donc $P^{-1}$ est en fait égale à $\dfrac{1}{8}$ de la matrice de l'énoncé.

**Q10 : Réponse E (aucune réponse exacte)**

---

**11.** A. B. On a vu que $M = PDP^{-1}$ donc $M^n = PD^nP^{-1}$ pour tout entier $n$.

C. Le simple calcul de $M^2$ montre que la dernière ligne de $M^2$ n'est pas nulle...

D. $M$ ayant ses deux dernières lignes égales, il en sera de même pour les matrices $M^n$ pour tout $n \geqslant 1$ : cela découle directement de la formule du produit matriciel.

**Q11 : Réponses B,D**

---

**12.** A. B. Par définition de l'image, l'équation $f(u) = b$ a (au moins) une solution si et seulement si $b$ appartient à l'image de $f$.

C. $f(v_1) = -4v_1$ donc tout vecteur $u$ de la droite vectorielle $\mathbb{R}v_1$ vérifie $f(u) = -4u$. La réponse C est fausse.

D. On sait que, si $u_0$ est une solution particulière de l'équation (s'il en existe), l'ensemble des solutions sera le sous-espace affine $u_0 + \operatorname{Ker} f$. Ce n'est pas un sous-espace vectoriel , sauf si $u_0 = 0$, i.e $b = 0$.

**Q12 : Réponse B**

---

**13.** A. B. Les solutions de (II) sont évidemment

$$\begin{cases} y_1(t) = C_1 e^{-4t} \\ y_2(t) = C_2 e^{-2t} \\ y_3(t) = C_3 \end{cases} \quad \text{avec } C_1, C_2, C_3 \text{ constantes réelles}$$

C'est donc un $\mathbb{R}$-espace vectoriel de dimension $3$.

C. D. Le système (II) s'écrit $Y' = DY$ et le système (I) s'écrit $X' = MX$, soit $X' = PDP^{-1}X$ ou $P^{-1}X' = D(P^{-1}X)$.
Donc (I) se ramène à (II) en posant $Y = P^{-1}X$ soit $X = PY$.

**Q13 : Réponses B,C**

---

Maintenant, $\alpha = 1$, donc $M = \begin{pmatrix} 3 & -1 & 2 \\ -1 & 0 & -1 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}$.

**14.** La matrice $M$ est de rang $2$ (deux lignes proportionnelles, et la troisième indépendante), donc $\operatorname{rg} f = 2$ et $\dim \operatorname{Ker} f = 1$. C'est la réponse A.

La réponse D est elle aussi exacte : en effet, la phrase « $f$ non injective » implique que le noyau n'est pas réduit à $\{0\}$, donc est de dimension non nulle, et il est forcément de dimension inférieure ou égale à $3$.

$$\boxed{\textbf{Q14 : Réponses A,D}}$$

---

**15.** Pour déterminer $\operatorname{Ker} f$, on résoud l'équation $MV = 0$, avec $V = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$. On obtient

$$MV = 0 \Longleftrightarrow \begin{cases} 3x - y + 2z = 0 \\ -x - z = 0 \\ xz = 0 \end{cases} \Longleftrightarrow \begin{cases} y = x \\ z = -x \end{cases}$$

donc $\operatorname{Ker} f = \operatorname{Vect}\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix}$.

La réponse A est exacte ; la réponse B est fausse puisque la droite $D$ n'est même pas incluse dans $P$ ; le calcul précédent montre également que C et D sont fausses.

$$\boxed{\textbf{Q15 : Réponse A}}$$

---

**16.** D'après le théorème du rang, $\operatorname{Im} f$ est un plan. C'est le plan vectoriel engendré par les images des vecteurs de base, dont les coordonnées sont les colonnes de $M$.

Ces trois colonnes étant liées, on a, par exemple : $\operatorname{Im} f = \operatorname{Vect}\left\{\begin{pmatrix} 3 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}\right\}$.

C'est donc le plan d'équation $y + z = 0$, i.e $P$. Le vecteur $\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix}$ vérifiant cette équation, on a $\operatorname{Ker} f \subset P$, donc $\operatorname{Ker} f + \operatorname{Im} f = \operatorname{Im} f = P$.

$$\boxed{\textbf{Q16 : Réponses B,D}}$$

---

**17.**
- Ce qui précède permet d'éliminer d'emblée les réponses A,C et D !
- On calcule le polynôme caractéristique :

$$\chi_M(X) = \begin{vmatrix} 3 - X & -1 & 2 \\ -1 & -X & -1 \\ 1 & 0 & 1 - X \end{vmatrix} = \ldots = X^2(4 - X)$$

On peut remarquer que $0$ est valeur propre double, alors que le sous-espace propre associé ($\operatorname{Ker} f$) est de dimension $1$, donc $M$ n'est pas diagonalisable.

$$\boxed{\textbf{Q17 : Réponse E (aucune réponse exacte)}}$$

---

**18.** Le but des deux questions suivantes est de trigonaliser $M$.

On cherche donc une base $\mathscr{B}' = (e'_1, e'_2, e'_3)$ telle que $\mathscr{M}_{\mathscr{B}'}(f) = Q = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 4 \end{pmatrix}$. La matrice $N$ sera la matrice de passage de $\mathscr{B}$ à $\mathscr{B}'$.

$e'_1$ est nécessairement un vecteur de $\operatorname{Ker} f$ ; on peut prendre $e'_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix}$.

$e'_3$ est nécessairement un vecteur du sous-espace propre associé à la valeur propre $4$ ; il suffit de vérifier que le vecteur $\begin{pmatrix} 3 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix}$ convient.

On cherche ensuite un vecteur $e'_2$ tel que $f(e'_2) = e'_1$, et l'énoncé demande de le chercher sous la forme $e'_2 = \begin{pmatrix}1\\a\\b\end{pmatrix}$. L'équation $\mathrm{M}e'_2 = e'_1$ donne le système

$$\begin{cases} 3 - a + 2b = 1 \\ -1 - b = 1 \\ 1 + b = -1 \end{cases}$$

Ce système est de rang $2$, et possède la solution unique $a = b = -2$. Ainsi :

**Q18 : Réponses B,D**

---

**19.** D'après les calculs ci-dessus, il existe une et une seule matrice N de la forme voulue qui vérifie $\mathrm{MN} = \mathrm{NQ}$ ; il s'agit de celle obtenue pour $a = b = -2$ ; elle est inversible et on a donc $\mathrm{Q} = \mathrm{N}^{-1}\mathrm{MN}$.

**Q19 : Réponses A,D**

---

Maintenant, $\alpha = 0$ soit $\mathrm{M} = \begin{pmatrix}1 & 0 & 1\\-2 & -1 & -2\\-1 & -1 & -1\end{pmatrix}$ (cela commence à devenir lassant...)

**20.** Soit $\mathrm{V} = \begin{pmatrix}x\\y\\z\end{pmatrix}$.

$$\mathrm{MV} = 0 \iff \begin{cases} x + z = 0 \\ -2x - y - 2z = 0 \\ -x - y - z = 0 \end{cases} \iff \begin{cases} x + z = 0 \\ y = 0 \end{cases}$$

donc $\operatorname{Ker} f$ est la droite vectorielle de base $\begin{pmatrix}1\\0\\-1\end{pmatrix}$.

$\operatorname{Im} f$ est le plan vectoriel engendré par les images des vecteurs de base, donc $\operatorname{Im} f = \operatorname{Vect}\left\{\begin{pmatrix}1\\-2\\-1\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}0\\-1\\-1\end{pmatrix}\right\}$.

C'est bien le plan d'équation $x + y - z = 0$ ; il ne contient pas la droite précédente, donc c'en est un supplémentaire.

**Q20 : Réponses B,D**

---

**21.** On calcule encore le polynôme caractéristique ; on trouve $\chi_{\mathrm{M}}(\mathrm{X}) = \mathrm{X}(1 - \mathrm{X})(\mathrm{X} + 2)$ ; donc M possède trois valeurs propres distinctes, et est par suite diagonalisable.

On calcule : $\mathrm{M} \cdot \begin{pmatrix}1\\0\\-1\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}0\\0\\0\end{pmatrix}$ donc $e_1 - e_3$ est un vecteur propre de $f$, mais c'est un vecteur de $\operatorname{Ker} f$. La réponse C est fausse.

On re-calcule : $\mathrm{M} \cdot \begin{pmatrix}1\\-1\\0\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}1\\-1\\0\end{pmatrix}$ donc $e_1 - e_2$ est bien un vecteur propre de $f$ ; de toutes façons (calcul précédent inutile), il ne peut constituer une base de $\operatorname{Im} f$ puisque $\operatorname{Im} f$ est un plan. La réponse D est fausse.

**Q21 : Réponse A**

---

**22.** • D'après le th. de Cayley-Hamilton, $\chi_{\mathrm{M}}(\mathrm{M}) = 0$, soit ici $\mathrm{M}(\mathrm{M}+2\mathrm{I})(\mathrm{M}-\mathrm{I}) = 0$ ou $\mathrm{M}(\mathrm{M}^2+\mathrm{M}-2\mathrm{I}) = 0$. Les réponses A et B sont donc inexactes.

- $M - I$ n'est pas inversible, puisque $1$ est valeur propre de $M$. La réponse C est fausse.
- La réponse D est fausse aussi. En effet, si on avait $M^2 = u_2 M + v_2 I$, $M$ possèderait un polynôme annulateur de degré $2$ ; cela est impossible puisque, ici, $M$ étant diagonalisable, son polynôme minimal est scindé à racines simples et a pour racines les valeurs propres de $M$, donc est de degré $3$.

**Q22 : Réponse E (aucune réponse exacte)**

---

# PARTIE II

**23.** $\lim\limits_{x\to\pi^-} f(x) = \lim\limits_{x\to\pi^-} \cos(\lambda x) = \cos(\lambda\pi)$ et
$\lim\limits_{x\to\pi^+} f(x) = \lim\limits_{x\to-\pi^+} f(x) = \lim\limits_{x\to-\pi^+} \cos(\lambda x) = \cos(-\lambda\pi) = \cos(\lambda\pi)$
donc $f$ est continue en $\pi$, et, par suite sur $\mathbb{R}$, et cela, pour tout réel $\lambda$.
*Cependant* (piège !), l'énoncé précise au début de la question que le paramètre $\lambda$ est choisi $> 0$ une fois pour toutes. La réponse C doit donc être considérée comme fausse !

**Q23 : Réponse A**

---

**24.** Pour $x \in ]-\pi,\pi]$, $f'(x) = -\lambda\sin(\lambda\pi)$ donc

$$\lim_{x\to\pi^-} f'(x) = -\lambda\sin(\lambda\pi) \quad \text{et} \quad \lim_{x\to\pi^+} f'(x) = \lim_{x\to-\pi^+} f'(x) = -\lambda\sin(-\lambda\pi) = \lambda\sin(\lambda\pi)$$

donc $f$ est dérivable en $\pi$ si et seulement si $-\lambda\sin(\lambda\pi) = -\lambda\sin(\lambda\pi)$,soit $\sin(\lambda\pi) = 0$ (puisque l'énoncé suppose $\lambda \neq 0$), c'est-à-dire $\lambda \in \mathbb{Z}$ ($\lambda \in \mathbb{N}$ en fait, puisque l'énoncé suppose $\lambda > 0$). Et, dans ce cas, d'après le théorème de prolongement des fonctions de classe $\mathscr{C}^1$, elle sera de classe $\mathscr{C}^1$ sur $\mathbb{R}$.

**Q24 : Réponse C**

---

**25.** D'après un théorème du cours, $f$ étant $2\pi$-périodique, continue et de classe $\mathscr{C}^1$ par morceaux sur $\mathbb{R}$, elle est développable en série de Fourier (et sa somme sera égale à $f$, et la série de Fourier sera normalement convergente).
Toutes les réponses proposées sont donc fausses (justifications fausses ou incomplètes).

**Q25 : Réponse E (aucune réponse exacte)**

---

**26.** $f$ est paire (évident), et $2\pi$-périodique *par construction*.

**Q26 : Réponse A**

---

**27.**
- Pour les réponses C et D, il manque l'hypothèse de *continuité* de $g$.
- Pour la convergence en moyenne quadratique (Parseval), il suffit que $g$ soit $2\pi$-périodique et continue par morceaux, ce qui est a fortiori le cas si on la suppose $\mathscr{C}^1$ par morceaux.
  Par contre, je ne comprends pas bien ce que signifie « converge en moyenne quadratique sur $\mathbb{R}$ » ou « en moyenne quadratique sur un intervalle de longueur $2\pi$ ». Il s'agit de la convergence au sens de la norme $\|\ \|_2$, définie par $\|f\|_2^2 = \dfrac{1}{2\pi}\displaystyle\int_0^{2\pi} |f(t)|^2\,\mathrm{d}t = \dfrac{1}{2\pi}\displaystyle\int_\alpha^{\alpha+2\pi} |f(t)|^2\,\mathrm{d}t$, c'est tout ! !
  Je pense que c'est ce que l'énoncé entend par « converge en moyenne quadratique sur un intervalle de longueur $2\pi$ », donc :

**Q27 : Réponse B**

---

**28.** On a vu que $f$ est continue sur $\mathbb{R}$ et de classe $\mathscr{C}^1$ par morceaux (elle est même de classe $\mathscr{C}^1$ lorsque $\lambda$ est entier).
Il y a donc convergence normale de la série de Fourier de $f$ vers $f$, et cela, pour tout $\lambda \in \mathbb{R}$.

**Q28 : Réponses B,D**

---

**29.** Les coefficients $b_n$ sont nuls parce que $f$ est *paire*.
Les formules vues en cours sont : $a_n = \dfrac{2}{\pi}\displaystyle\int_\alpha^{\alpha+\pi} f(x)\cos nx\,\mathrm{d}x$ et $b_n = \dfrac{2}{\pi}\displaystyle\int_0^\pi \cos(\lambda x)\sin nx\,\mathrm{d}x$.
ATTENTION AU PIÈGE : si la formule de la réponse D donnant $b_n$ semble a priori fausse, elle aurait pu être exacte si le résultat du calcul avait fait $0$ ! Ce n'est pas le cas ici...

**Q29 : Réponse E (aucune réponse exacte)**

---

**30.** C'est du cours...

**Q30 : Réponses A,D**

---

**31.**

$$a_0 = \frac{2}{\pi}\int_0^\pi \cos(\lambda x)\,\mathrm{d}x = \frac{2}{\pi}\left[\frac{\sin(\lambda x)}{\lambda}\right]_0^\pi = \frac{2\sin(\lambda\pi)}{\lambda\pi}$$

$$\begin{aligned} a_n = \frac{2}{\pi}\int_0^\pi \cos(\lambda x)\cos nx\,\mathrm{d}x &= \frac{1}{\pi}\int_0^\pi \Big[\cos(\lambda-n)x + \cos(\lambda+n)x\Big]\mathrm{d}x \\ &= \frac{1}{\pi}\left[\frac{\sin(\lambda-n)x}{\lambda-n} + \frac{\sin(\lambda+n)x}{\lambda+n}\right]_0^\pi \\ &= \frac{(1)^n}{\pi}\sin(\lambda\pi)\left[\frac{1}{\lambda-n} + \frac{1}{\lambda+n}\right] \\ &= \frac{2\lambda(-1)^n\sin(\lambda\pi)}{\pi(\lambda^2-n^2)} \end{aligned}$$

(ce calcul est possible car l'énoncé suppose $\lambda$ non entier).

**Q31 : Réponse E (aucune réponse exacte)**

---

**32.**
- $a_0 = \dfrac{2\sin(\lambda\pi)}{\lambda\pi}$ est vrai pour tout $\lambda \neq 0$, donc, si $\lambda$ est entier, $a_0 = 0$.
- Pour $n \geqslant 0$, le calcul de la question précédente reste valable si $\lambda \neq n$, et on a alors $a_n = 0$.
  Mais, si $\lambda = n$, $a_\lambda = \dfrac{2}{\pi}\displaystyle\int_0^\pi \cos^2(\lambda x)\,\mathrm{d}x = \dfrac{2}{\pi}\displaystyle\int_0^\pi \left[\dfrac{\cos(2\lambda x)+1}{2}\right]\mathrm{d}x = 1$.

**Q32 : Réponse D**

---

**33.** Pour $\lambda = \dfrac{1}{4}$, les formules établies à la question 31 donnent :

$$a_0 = \frac{2\sin\frac{\pi}{4}}{\frac{\pi}{4}} = \frac{4\sqrt{2}}{\pi} \quad \text{et} \quad a_n = \frac{\sqrt{2}}{4}\,\frac{(-1)^n}{\pi\left(\frac{1}{16}-n^2\right)} = 4\sqrt{2}\,\frac{(-1)^n}{\pi(1-16n^2)}$$

Conclusion :

**Q33 : Réponse E (aucune réponse exacte)**

*Rem :* Certains livres définissent le coefficient $a_0$ comme étant égal à la valeur moyenne de la fonction et non à son double, soit $a_0 = c_0(f)$ et non $a_0 = 2c_0(f)$, comme je l'ai fait à la question 31, et comme c'est, je crois, l'usage le plus répandu.
Les deux définitions pour $a_0$ sont possibles (chacune a ses avantages et inconvénients); ceux d'entre vous qui adoptent l'autre définition trouvent alors que la réponse C est correcte...Encore une imprécision de l'énoncé (une de plus !).

---

**34.** On a déjà vu que $f$ est somme sur $\mathbb{R}$ de sa série de Fourier, soit :

$$\forall t \in \mathbb{R}\ ,\ f(t) = \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{+\infty} a_n \cos nt$$

ce qui donne ici :

$$\begin{aligned} f(t) &= \frac{2\sqrt{2}}{\pi} + \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{4\sqrt{2}}{\pi} \frac{(-1)^n}{1-16n^2} \cos nt \\ &= \frac{2\sqrt{2}}{\pi}\left[1 + 2\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{(1)^n \cos nt}{1-16n^2}\right] \end{aligned}$$

C'est la réponse B.

En particulier, pour $t = \pi$, $f(t) = \cos\frac{\pi}{4} = \dfrac{\sqrt{2}}{2}$ et $\cos nt = (-1)^n$, ce qui donne :

$$\frac{\sqrt{2}}{2} = \frac{2\sqrt{2}}{\pi}\left[1 + 2\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{1-16n^2}\right]$$

d'où

$$2\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{1-16n^2} = \frac{\pi}{4} - 1 \quad \text{et} \quad \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{1-16n^2} = \frac{\pi}{8} - \frac{1}{2}$$

(cette dernière relation a été confirmée par MAPLE).

**Q34 : Réponse B**

---

# PARTIE III

**35.** Le coefficient de $y''$ s'annule pour $x = 0$, donc l'ensemble des solutions sur $\mathbb{R}_+^*$ est un $\mathbb{R}$-espace vectoriel de dimension $2$, et l'ensemble des solutions sur $\mathbb{R}_-^*$ est aussi un $\mathbb{R}$-espace vectoriel de dimension $2$.

**Q35 : Réponse C**

---

**36.** Supposons $f(x) = \sum_{n=1}^{+\infty} a_n x^n$, de rayon de convergence $R > 0$, solution de $(E)$. On a alors, pour tout $x \in ]-R, R[$, $f'(x) = \sum_{n=1}^{+\infty} n a_n x^{n-1}$ et $f''(x) = \sum_{n=2}^{+\infty} n(n-1) a_n x^{n-2}$, d'où

$$\sum_{\substack{\cancel{n=2}\\ n=0}}^{+\infty} n(n-1) a_n x^n + (x+1) \sum_{\substack{\cancel{n=1}\\ n=0}}^{+\infty} n a_n x^n - \sum_{n=0}^{+\infty} a_n x^n = 0$$

$$\sum_{n=0}^{+\infty} [n(n-1) + n - 1] a_n x^n + \sum_{n=0}^{+\infty} n a_n x^{n+1} = 0$$

$$-a_0 + \sum_{n=1}^{+\infty} (n^2 - 1) a_n x^n + \sum_{n=0}^{+\infty} n a_n x^{n+1} = 0$$

$$-a_0+\sum_{n=0}^{+\infty}[(n+1)^2-1]a_{n+1}x^{n+1}+\sum_{n=0}^{+\infty}na_nx^{n+1}=0$$

$$-a_0+\sum_{n=0}^{+\infty}n(n+2)a_{n+1}x^{n+1}+\sum_{n=0}^{+\infty}na_nx^{n+1}=0$$

On a donc : $a_0=0$, $a_1$ quelconque, et, pour $n\geqslant 1$ :$(n+2)a_{n+1}+a_n=0$.

Réciproquement, pour tout $a_1\neq 0$,il existe une suite $(a_n)$ de réels non nuls définis par la relation de récurrence ci-dessus. Une telle suite vérifie $\lim\limits_{n\to+\infty}\frac{a_{n+1}}{a_n}=\lim\limits_{n\to+\infty}\frac{-1}{n+2}=0$, donc la série entière $\sum a_nx^n$ est de rayon de convergence infini, et, en reprenant les calculs ci-dessus, sera nécessairement solution de l'équation $(\mathrm{E})$. $(\mathrm{E})$ admet donc bien des solutions développables en série entière

**Q36 : Réponse E (aucune réponse exacte)**

---

**37.** Je viens de répondre à cette question :

**Q37 : Réponse B**

---

**38.** C'est une question de cours.

**Q38 : Réponse A**

---

**39.** On avait trouvé : $a_0=0$ et, pour $n\geqslant 1$, $a_{n+1}=-\frac{1}{n+2}a_n$.

On a donc : $a_2=-\frac{1}{3}a_1$, $a_3=-\frac{1}{4}a_2=\frac{1}{4\cdot 3}a_1$, $a_4=-\frac{1}{5}a_3=\frac{-1}{5\cdot 4\cdot 3}a_1$ etc...

et, par une récurrence facile : $a_n=\frac{2\cdot(-1)^{n+1}}{(n+1)!}a_1$ pour tout $n\geqslant 1$.

Ce n'est pas tout à fait l'expression de la réponse A, à cause du signe. D'ailleurs, on voit bien que la réponse de l'énoncé est déjà fausse pour $n=1$...

**Q39 : Réponse E (aucune réponse exacte)**

---

**40.** On a donc, pour les solutions de $(\mathrm{E})$ développables en série entière (de rayon de convergence $+\infty$) :

$$\begin{aligned}f(x)=\sum_{n=0}^{+\infty}a_nx^n&=2a_1\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{(_1)^{n+1}}{(n+1)!}x^n\\&=\frac{2a_1}{x}\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{(_1)^{n+1}}{(n+1)!}x^{n+1}\\&=\frac{2a_1}{x}\left[\sum_{n=0}^{+\infty}\frac{(-x)^n}{n!}-1+x\right]\\&=\frac{2a_1}{x}\left(\mathrm{e}^{-x}-1+x\right)\end{aligned}$$

pour $x\neq 0$, et l'expression obtenue se prolonge par continuité en $x=0$.

**Q40 : Réponse C**

---