ICNA 2005 – Épreuve commune

(1) • Pour $x=0$, $\varphi_1(u)=\dfrac{1}{\sin^2 u}$ donc a) b) sont fausses. c) est évidemment vraie (car $\cos u$ et $\sin u$ ne peuvent s'annuler en même temps). d est fausse, évidemment (si $x<0$, $x^2>0$!)

---

(2) • a) est vraie, b) est fausse (comme ci-dessus)

• Pour $x\neq 0$ $\quad \varphi_2'(u)=\dfrac{\cos u\,(x^2\cos^2 u+\sin^2 u)-\sin u(-2x^2\cos u\sin u+2\sin u\cos u)}{(\,\cdot\,\cdot\,)^2}$

$$=\frac{x^2\cos^3 u+(2x^2-1)\sin^2 u\cos u}{(\,\cdot\,\cdot\,)^2}$$: réponse c

---

(3) • L'argument de a) est exact, mais ne s'applique pas ici ds le cas $x=0$. Donc la réponse a) est fausse

• L'argument du b) est faux (il existe des f° définies sur un segment mais qui n'y sont pas intégrables, du moins au sens de Riemann)

• c) est fausse aussi (c'est pour $x\neq 0$)

• Pour $x=0$, $\varphi_1(u)\underset{0}{\sim}\dfrac{1}{u^2}$ mais $\varphi_2(u)\underset{0}{\sim}\dfrac{1}{u}$. Les deux intégrales sont donc divergentes, mais la réponse d) est fausse

---

(4) a) faux ! b) l'argument est archi-faux (ex : $x\mapsto\dfrac{1}{x}$ sur $[1,+\infty[$)

Réponse : c) $\quad$ (d) est fausse aussi

---

(5) a) est fausse ! si on pose $t=\dfrac{\tan u}{x}$, cela réalise une bijection de $[0,\frac{\pi}{2}[$ sur $[0,+\infty[$ (Rem : l'énoncé, ensuite aussi, parle d'appl. bij. sans être de C¹ ou singulier, c'est une horreur !)

b) $J(x)=\displaystyle\int_0^{\pi/2}\frac{1}{x^2\cos^2 u+\sin^2 u}=\int_0^{\pi/2}\frac{1}{\cos^2 u}\left(\frac{1}{x^2+\tan^2 u}\right)du$. Donc en posant $t=\tan u$ (C^1-difféo. de $[0,\pi/2[$ sur $[0,+\infty[$), on obtient : $J(x)=\displaystyle\int_0^{+\infty}\frac{1}{x^2+t^2}dt=\left[\frac{1}{x}\operatorname{Arctan}\frac{t}{x}\right]_0^{+\infty}=\frac{\pi}{2x}$.

b) est donc fausse

c) est fausse ; d) est vraie : En effet, on a posé $v=\cos u$, C^1 difféo. de $[0,\frac{\pi}{2}]$ sur $[0,1]$, $dv=-\sin u\,du$ d'où $K(x)=\displaystyle\int_0^1\frac{dv}{x^2v^2+1-v^2}=\int_0^1\frac{dv}{1-(1-x^2)v^2}$

or, $1-x^2>0$, donc $\dfrac{1}{1-(1-x^2)v^2}=\dfrac{1/2}{1-\sqrt{1-x^2}\,v}+\dfrac{1/2}{1+\sqrt{1-x^2}\,v}$

puis $K(x)=\dfrac{1}{2}\times\dfrac{1}{\sqrt{1-x^2}}\left[-\ln(1-\sqrt{1-x^2}\,v)+\ln(1+\sqrt{1-x^2}\,v)\right]_{v=0}^{v=1}=\underbrace{\dfrac{1}{2\sqrt{1-x^2}}\ln\dfrac{1+\sqrt{1-x^2}}{1-\sqrt{1-x^2}}}_{}$

soit la formule du d)

(6) Qd $x \to 0$, $\sqrt{1-x^2} \to 1$ donc $K(x) \sim \frac{1}{2}\left[\ln(1+\sqrt{1-x^2}) - \ln(1-\sqrt{1-x^2})\right]$

$$\sim \frac{1}{2}\left[\ln(1+\sqrt{1-x^2}) - \ln\left(\frac{x^2}{2}+o(x^2)\right)\right]$$

$$\sim \underline{-\ln x} \quad \left(\text{car } -\ln\frac{x^2}{2} \sim -\ln x^2 = -2\ln x \text{ qd } x \to 0\right.$$

et $\ln(1+\sqrt{1-x^2}) \to \ln 2$ donc c'est un $o(\ln x)$)

Réponse : b)

---

(7) $f(x) = \displaystyle\int_0^{\pi/2} \frac{x\,u}{x^2\cos^2 u + \sin^2 u}\,du$ $(x>0)$. Donc $f(1) = \displaystyle\int_0^{\pi/2} u = \frac{\pi^2}{8}$: réponse b

$f\left(\frac{1}{x}\right) = \displaystyle\int_0^{\pi/2} \frac{u}{x\left(\frac{\cos^2 u}{x^2}+\sin^2 u\right)}\,du = \int_0^{\pi/2} \frac{xu}{x^2\sin^2 u + \cos^2 u}$. En posant $v = \frac{\pi}{2} - u$, on obtient

$$f\left(\frac{1}{x}\right) = \int_0^{\pi/2} \frac{x\left(\frac{\pi}{2}-v\right)}{x^2\cos^2 v + \sin^2 v}\,dv \text{ d'où } f\left(\frac{1}{x}\right) + f(x) = \frac{\pi}{2}x \underbrace{\int_0^{\pi/2} \frac{dv}{x^2\cos^2 v + \sin^2 v}}_{=\frac{\pi}{2x} \text{ cf. 5.a)}}$$

Soit $\underline{f(x) + f\left(\frac{1}{x}\right) = \frac{\pi^2}{4}}$: Réponse d.

---

(8) $h(u) = u - \frac{\pi}{2}\sin u$. h est évidemment C^∞ sur $\left[0, \frac{\pi}{2}\right]$ donc a) vraie, b) fausse.

$h'(u) = 1 - \frac{\pi}{2}\cos u$, d'où si $\alpha = \text{Arccos}\,\frac{2}{\pi}$:

u	0		α		$\pi/2$
h'		$-$	0	$+$	
h	0	$\searrow$		$\nearrow$	0

d'où la réponse d)

[Rem : $h(u) = \frac{2}{\pi}u - \sin u$, et $u \mapsto \frac{2}{\pi}u$ est l'éq. de la corde à la C.R. de sin passant par les pts de coord. $(0,0)$ et $\left(\frac{\pi}{2}, 1\right)$; la négativité de h résulte donc directement de la concavité de la f° sin]

---

(9) . [$xK(x) = \displaystyle\int_0^{\pi/2} \frac{x\sin u}{x^2\cos^2 u + \sin^2 u}\,du \leq \int_0^{\pi/2} \frac{xu}{x^2\cos^2 u + \sin^2 u}\,du$ (car $\sin u \leq u$ sur $[0, \pi/2]$, par concavité)

inutile → d'où $\underline{xK(x) \leq f(x)}$.] Réponse a) fausse et b) vraie, car $xK(x)\frac{\pi}{2} \leq f(x)$ équivaut à $\displaystyle\int_0^{\pi/2} \frac{x\left(u - \frac{\pi}{2}\sin u\right)}{x^2\cos^2 u + \sin^2 u}\,du \geq 0$, or $u - \pi/2 \sin u \leq 0$! (et l'inég. $f(x) \geq 0$ est évidente

. $K(x) \underset{x\to 0}{\sim} -\ln x$ donc $xK(x) \underset{x\to 0}{\longrightarrow} 0$ d'où $\underline{\lim_{x\to 0} f(x) = 0}$. Mais c) est fausse à cause de l'argument donné. d) est fausse également !

---

(10) A l'aide de la relation $f\left(\frac{1}{x}\right) + f(x) = \frac{\pi^2}{4}$, on en déduit : $\lim_{x\to+\infty} f(x) = \frac{\pi^2}{4}$: réponse c

(11) • $\cancel{\frac{1}{A+B}}$ $\frac{1}{A} - \frac{B}{A^2} + \frac{B^2}{A^2(A+B)} = \frac{A(A+B) - B(A+B) + B^2}{A^2(A+B)} = \frac{1}{A+B}$ d'où réponse a)

• $g(x+h)-g(x) = \int_0^{\pi/2} u \left[\frac{1}{(x+h)\cos^2u+\sin^2u} - \frac{1}{x\cos^2u+\sin^2u}\right]du = \int_0^{\pi/2} u\cdot\left(\frac{1}{A+B}-\frac{1}{A}\right)du$

$$= \int_0^{\pi/2} u\left[\frac{-B}{A^2}+\frac{B^2}{A^2(A+B)}\right]du$$

d'où $\frac{g(x+h)-g(x)}{h} + \int_0^{\pi/2}\frac{u}{h}\frac{B}{A^2}\,du = \int_0^{\pi/2}\left[\frac{u}{h}\cdot\frac{B^2}{A^2(A+B)}\right]du$ (possible car $h\neq 0$)

$$= \int_0^{\pi/2} \frac{u\cdot h\cos^4u}{(x\cos^2u+\sin^2u)^2\,((x+h)\cos^2u+\sin^2u)}\,du$$

Or $x\cos^2u+\sin^2u \geq \frac{x}{2}\cos^2u+\sin^2u$ et $(x+h)\cos^2u+\sin^2u \geq \frac{x}{2}\cos^2u+\sin^2u$ car $|h|<\frac{x}{2}$)

d'où $\left|\frac{g(x+h)-g(x)}{h} + \int_0^{\pi/2}\frac{u\cos^2u}{(x\cos^2u+\sin^2u)^2}\,du\right| \leq |h|\int_0^{\pi/2}\frac{u\cos^4u}{(\frac{x}{2}\cos^2u+\sin^2u)^3}\,du$.

Bref c), d) sont fausses.

---

(12) Réponses a) et d) évidemment.

---

(13) • $\frac{\partial\varphi}{\partial x}(x,u) = \frac{u}{x^2\cos^2u+\sin^2u} + \frac{xu\,(-2x\cos^2u)}{(x^2\cos^2u+\sin^2u)^2} = \frac{u(-x^2\cos^2u+\sin^2u)}{(x^2\cos^2u+\sin^2u)^2}$ donc a), b) fausses.

• $\frac{\partial\varphi}{\partial u}(x,u) = \frac{x}{(x^2\cos^2u+\sin^2u)} - xu\cdot\frac{-2x^2\cos u\sin u+2\sin u\cos u}{(x^2\cos^2u+\sin^2u)^2}$

$= \frac{x(x^2\cos^2u+\sin^2u) - xu\sin 2u(1-x^2)}{(\ldots)^2}$ d'où la réponse d)

---

(14) • Les d.p. de φ à tt ordre sont des fonctions continues sur $\mathbb{R}^+\times[0,\frac{\pi}{2}[$, donc φ est C^∞ sur $\mathbb{R}^+\times[0,\frac{\pi}{2}[$: réponse b), a) est fausse !

• La matrice jacobienne de $\varphi:\mathbb{R}^2\to\mathbb{R}$ est une matrice de type (1,2). C'est la matrice $\left[\frac{\partial\varphi}{\partial x},\frac{\partial\varphi}{\partial u}\right]$ donc seule la réponse d) est exacte.

---

(15) • D'après la question 11, en faisant $h\to 0$ (à $x>0$ fixé, donc on ~~...~~ peut supposer $|h|<\frac{x}{2}$) on obtient : g dérivable en $\forall x>0$ et $g'(x) = -\int_0^{\pi/2}\frac{u\cos^2u}{(x\cos^2u+\sin^2u)^2}\,du$

On a bien $f(x) = xg(x^2)$ pour $\forall x\neq 0$, donc f est dérivable sur $\mathbb{R}^*$.

MAIS : l'argument g est dérivable sur $\mathbb{R}^*$ est FAUX, g n'étant définie, par l'énoncé, que sur $\mathbb{R}_+^*$!! Donc la réponse a) est fausse

Pour $x \neq 0$: $f(x) = x\,g(x^2) \Rightarrow f'(x) = g(x^2) + 2x^2 g'(x^2)$ (donc b est fausse) !!

$$\Rightarrow f'(x) = \int_0^{\pi/2} \frac{u}{(x^2\cos^2 u + \sin^2 u)}\,du - 2x^2 \int_0^{\pi/2} \frac{u\cos^2 u}{(x^2\cos^2 u + \sin^2 u)^2}\,du$$

$$= \int_0^{\pi/2} -\frac{u\,(x^2\cos^2 u - \sin^2 u)}{(x^2\cos^2 u + \sin^2 u)^2}\,du \quad \text{(ce qui est la formule du b) ...)}$$

Ce calcul montre qd même que la réponse c est exacte ! (et cela, sans utiliser le th. de D. sous le signe $\int$, mais par un calcul direct en revenant à la définition de la dérivée : quelle horreur !). Enfin, d) est évidemment fausse

---

(16) • β est évidemment C^∞ sur I. $\beta'(u) = \dfrac{(\cos^2 u - \sin^2 u)(x^2\cos^2 u + \sin^2 u) - \sin u\cos u\,(-2x^2\sin u\cos u + 2\sin u\cos u)}{(x^2\cos^2 u + \sin^2 u)^2}$

$$= \frac{x^2\left[\cos^2 u(\cos^2 u - \sin^2 u) + 2\sin^2 u\cos^2 u\right] + \sin^2 u(\cos^2 u - \sin^2 u) - 2\sin^2 u\cos^2 u}{(\;-\;)^2}$$

$$= \frac{x^2\cos^2 u - \sin^2 u}{(\quad)^2}$$

donc a) b) sont fausses !

• D'après le 15), $f'(x) = -\displaystyle\int_0^{\pi/2} u\,\beta'(u)\,du = \underbrace{\big[-u\,\beta(u)\big]_0^{\pi/2}}_{=0} + \int_0^{\pi/2} \beta(u)\,du$ soit la réponse d)

(de toutes façons, la réponse c) est automatiquement fausse car $f(x) \geq 0$ et $\beta(u) \geq 0$ sur $[0, \frac{\pi}{2}]$!)

---

(17) • $f'(1) = \displaystyle\int_0^{\pi/2} \sin u\cos u\,du = \int_0^{\pi/2} \frac{\sin 2u}{2}\,du = \left[-\frac{\cos 2u}{4}\right]_0^{\pi/2} = \frac{1}{2}$: a) est fausse (évidemment !)

• On remarque que $\dfrac{d}{du}(x^2\cos^2 u + \sin^2 u) = 2\sin u.\cos u.(1-x^2)$.

Donc (pour $x^2 \neq 1$) $\displaystyle\int_0^{\pi/2} \beta(u)\,du = \frac{1}{2(1-x^2)} \int_0^{\pi/2} \frac{d(x^2\cos^2 u + \sin^2 u)}{x^2\cos^2 u + \sin^2 u} = \frac{1}{2(1-x^2)} \left[\ln(x^2\cos^2 u + \sin^2 u)\right]_{u=0}^{\pi/2}$

$$= \frac{1}{2(1-x^2)}(-\ln x^2) = \frac{-\ln x}{1-x^2} \quad \text{si on suppose } x > 0,\ x \neq 1$$

d'où la réponse : d)

---

(18) • a) et c) sont farfelues !

• $\dfrac{-\ln x}{1-x^2}$ est de signe cst sur $\mathbb{R}_+^*$ (positif) et se prolonge par continuité en 1 (car $\lim\limits_{x\to 1} \dfrac{\ln x}{x-1} = 1$)

donc on peut la considérer continue sur $\mathbb{R}_+^*$

On a : $-\frac{\ln x}{1-x^2} \underset{0^+}{\sim} -\ln x$, et $\int_0^a \ln x\,dx$ existe : donc, $\forall x>0$, $\int_0^x f(t)\,dt$ existe

et $-\frac{\ln x}{1-x^2} \underset{+\infty}{\sim} \frac{\ln x}{x^2}$; or $\int_a^{+\infty} \frac{\ln x}{x^2}\,dx$ existe (intégrale de Bertrand ; remarquer que $\frac{\ln x}{x^2} \underset{+\infty}{=} o\left(\frac{1}{x^{3/2}}\right)$ et $\int_a^{+\infty} \frac{dx}{x^{3/2}}$ converge)

donc $\int_0^{+\infty} f(t)\,dt$ existe.

Finalt. la seule réponse exacte est : b) (et encore.. la façon dont la phrase est tournée n'est pas claire...)

[Rem : on a trouvé : $\int_0^1 \frac{\ln x}{x^2-1}\,dx = f(1) - f(0) = \frac{\pi^2}{8}$; résultat bien connu, que l'on peut aussi obtenir en faisant un D.S.E de $\frac{1}{1-x^2}$]

---

(19) Réponse c), évidemment puisque $\lim_{t\to 0} t\ln t = 0$ et $\lim_{t\to 1} \frac{\ln t}{t-1} = 1$

---

(20) . a) est vraie (cf ci-dessous)

. En écrivant : $\frac{1}{1-t^2} = \sum_{p=0}^{n} t^{2p} + \frac{t^{2n+2}}{1-t^2}$ on a : $\int_0^x \frac{\ln t}{t^2-1}\,dt = -\sum_{p=0}^{n} \int_0^x t^{2p}\ln t\,dt - \int_0^x \frac{t^{2n+2}\ln t}{1-t^2}\,dt$

(toutes ces intégrales existent bien, car, $\forall p$, $t^{2p}\ln t = o\left(\frac{1}{\sqrt{t}}\right)$ qd $t\to 0$)

et en particulier : $\int_0^1 \frac{\ln t}{t^2-1}\,dt = -\sum_{p=0}^{n} \int_0^1 t^{2p}\ln t\,dt + \int_0^1 t^{2n+1} G(t)\,dt$

donc aucune des réponses b) c) d) n'est juste !

---

(21) On calcule : $\int_0^1 \underset{u'}{t^{2p}} \underset{v}{\ln t}\,dt = \underbrace{\left[\frac{t^{2p+1}}{2p+1}\ln t\right]_0^1}_{=0} - \int_0^1 \frac{t^{2p}}{2p+1}\,dt = -\frac{1}{(2p+1)^2}$. La formule ci-dessus
(en i.p.p.)

s'écrit donc : $f(1) = \sum_{p=0}^{n} \frac{1}{(2p+1)^2} + \int_0^1 t^{2n+1} G(t)\,dt$ soit : $S_n = f(1) - \int_0^1 t^{2n+1} G(t)\,dt$

donc aucune des réponses b) c) d n'est juste

---

(22) Réponses : c) et d) (d) car : G étant continue sur $[0,1]$ y est bornée, donc $\exists M \in \mathbb{R}_+$ tq $\forall t \in [0,1]$, $|G(t)| \le M$)

[Rem : l'interversion $\sum - \int$ pouvait se faire + facilement en utilisant le th. du cours puisque la série $\sum \int_0^1 |t^{2p}\ln t|\,dt$ est convergente !]

---

(23) Une rapide déc. en élts simples donne : $\frac{1}{n(n+1)(2n+1)^2} = \frac{1}{n} - \frac{1}{n+1} - \frac{4}{(2n+1)^2}$

d'où réponses : a) et c).

Sa somme vaut : $\displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n(n+1)} - 4 \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{(2n+1)^2}$

$\displaystyle = \underset{\text{(série télescopique)}}{1} - 4\left(\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{1}{(2n+1)^2} - 1\right) = 1 - 4\left(\frac{\pi^2}{8} - 1\right) = \boxed{5 - \frac{\pi^2}{2}}$

donc d) est fausse.

PARTIE II

(24) Réponses toutes fausses, car la multiplication n'est pas une loi interne ds F !

---

(25) Réponse évidente : d) (c) est fausse, car si on multiplie un élt de E par un scalaire non réel, cela ne donne pas un élt de E)

---

(26) Réponses : b) c) (quoique c) se discute, voir ci-dessous ...) (finalement je n'en sais rien !) (après réflexion et compte tenu de la suite, je pense que l'énoncé attendait d)) !!)
ou d) ??

---

(27) L'énoncé est très ambiguë : en effet, l'énoncé dit : "$f|_F$ est la restriction de f à F"

donc on a, par $\boxed{\text{déf}}$ du cours : $f_F : F \to \underline{\underline{E}}$; si on considère l'endomorphisme induit par f sur F (F est évidemment stable par f), on a alors : $f_F : F \to \underline{\underline{F}}$; si on considère $f|_F$ comme une application sur son ensemble image, on a $f|_F : F \to \mathbb{R}_2[X]$!! Pour moi, compte tenu de l'énoncé l'ensemble d'arrivée de F est $\underline{E}$, de dim infinie, donc pas de matrice possible et les réponses seraient fausses. Ensuite :

. si on considère $f|_F : F \to F$ $f_F(1) = 0$, $f_F(X) = 1$, $f_F(X^2) = 2X - 1$, $f_F(X^3) = 3X^2 - 3X + 1$

d'où $M_{(1,X,X^2,X^3)}^{(1,X,X^2,X^3)}(f_F) = \begin{pmatrix} 0 & 1 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & 2 & -3 \\ 0 & 0 & 0 & 3 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$: de là fausses b) c) d) sont fausses

et $M_{(1,X,X^2,X^3)}^{(1,X,X^2)}(f_F) = \begin{pmatrix} 0 & 1 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & 2 & -3 \\ 0 & 0 & 0 & 3 \end{pmatrix}$. Il semble que l'énoncé privilégie cette interprétation (qui n'est pas la mienne : ens. d'arrivée ≠ ens. image)

À VOUS DE CHOISIR !

---

(28) . a) b) sont fausses : la notion de matrices semblables n'est défini que pour des matrices carrées !

. c) est fausse a priori (donc d) est vraie) : en effet, il faudrait supposer $j_1 \neq j_0$ (si vous faites $C_{j_0} \leftarrow C_{j_0} - C_{j_0}$, on obtient une colonne de 0, ce qui change le rang de la matrice.

29 Réponse d) évidemment, les autres sont fausses.

---

30 On a facilement : $\ker f_F = \mathbb{R}_0[X]$ et $\operatorname{Im} f_F = \mathbb{R}_2[X]$. La seule réponse juste est évidemment <u>c)</u>

---

31 • Il est clair que f_F (considéré comme endo. de F), n'est <u>pas</u> diagonalisable, sa seule vp étant 0 et le s.e.p associé, $\ker f$, est de dim 1 (dim $\neq$ 4)

• Maintenant, si on ne considère pas f_F comme un endomorphisme, il ne peut être diagonalisable (cette notion n'étant définie que pour les endo. !)

Donc : c) d) sont <u>fausses</u>, et là encore, on peut hésiter entre a) et b) ! (toujours pour les mêmes raisons)

---

32 Tiens ! il semble que maintenant l'énoncé considère que f_F est un endomorphisme ... Alors en considérant la matrice de f_F (par exemple) on trouve que f_F est nilpotent <u>d'ordre 4</u>. D'où réponse a) (de plus, il est vrai que l'indice de nilpotence est toujours inférieur à la dim. de l'espace !)

---

33 • a) est évidemment fausse ! pour $i=0$, $d°B_i = 0$!

• d) ——— fausse, car $\dim F = 4$.

D'après l'énoncé, les B_i sont divisibles par X (car $B_i(0)=0$), donc <u>c) est vraie</u>.

L'ens. des poly. divisibles par X est le sev de F formé des polynômes de valuation ≥ 1. C'est évidemment un supplémentaire de $\mathbb{R}_0[X] = \ker f_F$. La restriction de f_F à ce supplémentaire, noté S, est, d'après le cours, un isomorphisme entre S et $\operatorname{Im} f_F = \mathbb{R}_2[X]$

Donc : $B_0 = 1$ a un unique antécédent dans S noté B_1

$B_1 = X$ ——— ——— dans S, noté B_2, et $d°B_2 = 2$ néc^t.

$2B_2$ " " dans S, noté B_3, et $d°B_3 = 3$ néc^t.

Donc la réponse <u>b) est égal^t vraie</u>

---

34 On calcule : $f(B_2) = X$ avec $B_2(0)=0$ donne, si $B_2 = aX^2+bX$:

$$aX^2+bX-a(X-1)^2-b(X-1) = X$$

d'où $2aX+b-a = 1$ soit $a = \frac{1}{2}$, $b=a$: $B_2 = \frac{1}{2}X(X+1)$

puis $f(B_3) = \frac{1}{2}(X^2+X)$ avec $B_3(0)=0$ donne, si $B_3 = aX^3+bX^2+cX$,

$$aX^3+bX^2+cX-a(X-1)^3-b(X-1)^2-c(X-1) = X(X+1)$$

d'où $3aX^2+(-3a+2b)X+a-b+c = X^2+X$ d'où $a=\frac{1}{3}$, ..., $c=+\frac{2}{5}$

d'où $B_3 = \frac{1}{3}(X^3+3X^2+2X) = \frac{1}{3}X(X+1)(X+2)$! [polynômes de Newton]

D'où $Q = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1/2 & 2/3 \\ 0 & 0 & 1/2 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1/3 \end{pmatrix}$ donc les 4 réponses sont fausses

---

(35) $A' = Q^{-1}AQ$ et $A' = M_q(f) = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 3 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$: aucune réponse n'est bonne !

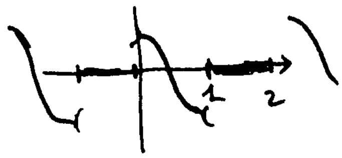
---

(36) . Tout d'abord, notons que l'énoncé est stupide !: Il est dit : "soit g l'application qui..." Je pense qu'il faut lire "Soit g l'application linéaire de F dans F qui..." ...

Réponses immédiates : b) d)

PARTIE III

(37) Aucune réponse exacte ! →



---

(38) $\forall n \in \mathbb{Z}$, $c_n(f) = \frac{1}{2}\int_0^2 f(x)e^{-in\pi x}dx$ (ici $T=2$, $\omega = \frac{2\pi}{T} = \pi$)

$$= \frac{1}{2}\int_0^1 \cos\pi x . e^{-in\pi x}dx = \frac{1}{2}\int_0^1 \frac{e^{i\pi x}+e^{-i\pi x}}{2}e^{-in\pi x}dx = \frac{1}{4}\int_0^1 \left[e^{i\pi(1-n)x} + e^{i\pi(-1-n)x}\right]dx$$

Pour $n=1$: $c_1(f) = \frac{1}{4}\int_0^1 \left[1+e^{-2i\pi x}\right]dx = \frac{1}{4}$

Pour $n=-1$: $c_{-1}(f) = \frac{1}{4}\int_0^1 \left[1+e^{2i\pi x}\right]dx = \frac{1}{4}$

Pour $n \neq \pm 1$ $c_n(f) = \frac{1}{4}\left[\frac{e^{i\pi(1-n)x}}{i\pi(1-n)} + \frac{e^{i\pi(-1-n)x}}{i\pi(-1-n)}\right]_0^1 = \frac{1}{4}\left[\frac{e^{i\pi(1-n)}}{i\pi(1-n)} + \frac{e^{i\pi(-1-n)}}{i\pi(-1-n)} - \frac{1}{i\pi(1-n)} + \frac{1}{i\pi(1+n)}\right]$

$$= \frac{1}{4i\pi(1-n^2)}\left[(1+n)e^{i\pi(1-n)} - (1-n)e^{i\pi(-1-n)} - 2n\right] = \frac{i}{4\pi(n^2-1)}\left[\dots\right]$$

Puisque f est réelle, $c_{-n}(f) = \overline{c_n(f)}$ d'où $a_n(f) = c_n(f) + c_{-n}(f) = 2\,\mathrm{Re}(c_n(f))$

d'où $a_n(f) = \frac{1}{2}$ si $n=1$ et pour $n \neq 1$: $a_n(f) = \frac{-1}{4\pi(n^2-1)}\left[(n+1)\sin\pi(1-n) - (1-n)\sin\pi(-1-n)\right] = 0$

puis $b_n(f) = i\left[c_n(f) - c_{-n}(f)\right] = -2\,\mathrm{Im}(c_n(f)) = \frac{-1}{4\pi(n^2-1)}\left[(n+1)\cos\pi(1-n) - (1-n)\cos\pi(-1-n) - 2n\right]$

$= (0$ si $n=1$ et si $n\neq 1)$

$$= \frac{-1}{2\pi(n^2-1)}\left[(n+1)(-1)^{1-n} - (1-n)(-1)^{-1-n} - 2n\right]$$

$$= \frac{n}{\pi(1-n^2)}\left[(-1)^{n+1} - 1\right]$$

Soit $b_{2p+1}(f) = 0$ pour tout $p\in\mathbb{N}$ et $b_{2p}(f) = \frac{2p}{\pi(4p^2-1)} = \frac{2p}{\pi(4p^2-1)}$ pour $p\in\mathbb{N}^*$

Donc la série de Fourier de f est : $\underbrace{\frac{a_0(f)}{2}}_{=0} + \underbrace{a_1(f)}_{=\frac{1}{2}}\cos\pi x + \sum_{p=1}^{+\infty}\frac{2p}{\pi(4p^2-1)}\sin 2p\pi x$

soit la réponse (b) (Rem : en fait, $f(x) - \frac{\cos\pi x}{2}$ est impaire, ce qui explique que les $a_n(f)$ sont nuls pour $n\neq 1$)

---

39 f étant continue par morceaux et C^1 par morceaux, le th. de Dirichlet donne :

$$\forall x\in\mathbb{R} : \frac{1}{2}\left[f(x^+) + f(x^-)\right] = S_f(x)$$

f étant continue en tout pt $x\in\mathbb{R}-\mathbb{Z}$, on a : $\forall x\in\mathbb{R}-\mathbb{Z}$, $S_f(x) = f(x)$, puis $S_f(0) = \frac{1}{2}$ et $S_f(1) = -\frac{1}{2}$ soit,

$$S_f(x) = \begin{cases} f(x) & \text{si } x\in\mathbb{R}-\mathbb{Z} \\ \frac{1}{2} & \text{si } x\in\mathbb{Z} \text{ et } x \text{ pair} \\ -\frac{1}{2} & \text{si } x\in\mathbb{Z} \text{ et } x \text{ impair} \end{cases}$$

donc aucune réponse exacte

---

40. La formule de Parseval (applicable ici car f continue par morceaux) s'écrit :

$$\frac{1}{T}\int_0^T f^2 = \sum_{n\in\mathbb{Z}}|c_n(f)|^2 = \frac{|a_0(f)|^2}{4} + \frac{1}{2}\sum_{n=1}^{+\infty}|a_n|^2 + |b_n|^2$$

soit $\frac{1}{2}\int_0^2 f^2 = \frac{1}{2}a_1^2 + \frac{1}{2}\sum_{p=1}^{+\infty} b_{2p}^2 = \frac{1}{8} + \frac{1}{2}\sum_{p=1}^{+\infty}\frac{4p^2}{\pi^2(4p^2-1)^2}$

d'où $\int_0^2 f^2 = \frac{1}{4} + \frac{4}{\pi^2}\sum_{p=1}^{+\infty}\frac{p^2}{(4p^2-1)^2}$: réponse b)

• D'où, puisque $\int_0^2 f^2 = \int_0^1 \cos^2\pi x\,dx = a_1(f) = \frac{1}{2}$: $\frac{1}{4} = \frac{4}{\pi^2}\sum_{p=1}^{+\infty}\frac{p^2}{(4p^2-1)^2}$

d'où $\sum_{p=1}^{+\infty}\frac{p^2}{(4p^2-1)^2} = \frac{\pi^2}{16}$ donc d) fausse ! (la formule de d) donne $\frac{\pi^2}{64}$!)