

CORRIGÉ ICNA Épreuve optionnelle 2013

PARTIE I (= ICNA Commune 2005 = ENAC 2007 !)

1. **A.B.** Pour $x = 0$, $\varphi_1(u) = \frac{1}{\sin^2 u}$ n'est pas définie en 0. Les réponses A et B sont donc fausses.

C.D Si $x \neq 0$, $x^2 \cos^2 u + \sin^2 u = 0 \iff \sin u = \cos u = 0$, ce qui est impossible. Donc φ_1 est définie sur tout l'intervalle I, et elle y est continue d'après les théorèmes usuels. Cela est vrai pour tout x non nul donc :

Q1 : Réponse C

2. **A.B.** Comme dans la question précédente, on montre que φ_2 est dérivable sur tout l'intervalle I (toujours les théorèmes usuels!) si et seulement si x est non nul. Donc la réponse A est vraie, la réponse B est fausse.

C.D Lorsque $x = 0$, φ_2 est définie et dérivable sur $]0, \frac{\pi}{2}]$. On aura donc, pour tout x réel et tout $u \in]0, \frac{\pi}{2}]$:

$$\begin{aligned} \varphi_2'(u) &= \frac{\cos u(x^2 \cos^2 u + \sin^2 u) - \sin u(-2x^2 \cos u \sin u + 2 \sin u \cos u)}{(x^2 \cos^2 u + \sin^2 u)^2} \\ &= \frac{x^2 \cos^3 u + (2x^2 - 1) \sin^2 u \cos u}{(x^2 \cos^2 u + \sin^2 u)^2} \end{aligned}$$

ce qui est la réponse C.

Q2 : Réponses A,C

3. **A.** L'argument donné est exact mais ne s'applique pas ici lorsque $x = 0$. Donc réponse fausse.

B. Les intégrales sont bien définies pour tout x non nul, mais l'argument donné est faux : il existe des fonctions définies sur un segment et non intégrables.

Cette question est hors-programme : les élèves de CPGE n'ont à connaître que la définition de l'intégrale d'une fonction *continue par morceaux* seulement. Les notions d'intégrabilité sur un segment (au sens de Riemann, de Lebesgue...) ne sont plus au programme depuis un certain temps déjà...

C. Pour tout x non nul (et pas seulement $x > 0$), les fonctions φ_1 et φ_2 sont continues sur $]0, \frac{\pi}{2}]$ donc les intégrales citées existent. La réponse C est donc fausse.

D. Pour $x = 0$, $\varphi_1(u) \underset{u \rightarrow 0^+}{\sim} \frac{1}{u^2}$ et $\varphi_2(u) \underset{u \rightarrow 0^+}{\sim} \frac{1}{u}$. Par comparaison à l'intégrale d'une fonction de Riemann, les deux intégrales sont bien divergentes mais l'argument donné est faux.

En conclusion :

Q3 : Réponse E : aucune réponse exacte.

4. La réponse A est fantaisiste.

Vous devez savoir que la réponse B est fausse (contre-exemple : $t \mapsto \frac{1}{t+1}$ au voisinage de $+\infty$).

Les réponses C et D sont exactes (exemple classique, non détaillé), même si l'absolue convergence mentionnée dans la réponse C ne sert à rien, la fonction étant positive.

Q4 : Réponses C,D

5. **A.B.** Je ne vois pas pourquoi se limiter ici à $x \in]0, 1[$. Pour le calcul qui suit, il suffit de supposer $x > 0$. De plus, le changement de variable suggéré par l'énoncé est inutilement compliqué.

Le changement de variable plus simple $u \mapsto \tan u$, réalise un \mathcal{C}^1 -difféomorphisme de $[0, \frac{\pi}{2}[$ sur $[0, +\infty[$, ce qui justifie les calculs qui suivent, et montre immédiatement que le résultat donné en A est faux (l'intégrale citée a 0 et $\frac{\pi}{2}$ comme bornes).

Il semble assez évident que la réponse B est fautive (le résultat donné ne dépendant pas de x , or quand $x \rightarrow 0^+$ $J(x) \rightarrow +\infty \dots$) mais comme je suis gentil, je vous livre le calcul :

$$J(x) = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{1}{x^2 \cos^2 u + \sin^2 u} du = \int_{[0, \frac{\pi}{2}[} \frac{1}{x^2 + \tan^2 u \cos^2 u} du \quad (\text{chgt de variable } t = \tan u \rightarrow dt = \frac{du}{\cos^2 u})$$

$$= \int_0^{+\infty} \frac{dt}{x^2 + t^2} = \left[\frac{1}{x} \text{Arctan} \frac{t}{x} \right]_{t=0}^{t=+\infty} = \frac{\pi}{2x} \quad \text{puisque } x > 0$$

C.D Le changement de variable $v = \cos u$, qui réalise un \mathcal{C}^1 -difféomorphisme de $[0, \frac{\pi}{2}]$ sur $[0, 1]$ conduit aux calculs suivants :

$$K(x) = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\sin u}{x^2 \cos^2 u + \sin^2 u} du = \int_0^1 \frac{dv}{x^2 v^2 + (1-v^2)} = \int_0^1 \frac{dv}{1 - (1-x^2)v^2} \quad (dv = -\sin u du)$$

Notons que l'on trouve ici la formule de la réponse C.

Puisque $1 - x^2 > 0$ ici, une décomposition en éléments simples donne ensuite :

$$\frac{1}{1 - (1-x^2)v^2} = \frac{1/2}{1 - \sqrt{1-x^2}v} + \frac{1/2}{1 + \sqrt{1-x^2}v}$$

puis

$$K(x) = \frac{1}{2} \frac{1}{\sqrt{1-x^2}} \left[-\ln(1 - \sqrt{1-x^2}v) + \ln(1 + \sqrt{1-x^2}v) \right]_{v=0}^{v=1} = \frac{1}{2\sqrt{1-x^2}} \ln \left(\frac{1 + \sqrt{1-x^2}}{1 - \sqrt{1-x^2}} \right)$$

ce qui, après lecture attentive, est la formule de la réponse D.

Q5 : Réponses C,D

6. Deux fois la même question, à quelques détails près!! Il n'y a pas à se fatiguer, on reprend les résultats précédents et on en déduit :

Q6 : Réponse D

7. Pour $x > 0$, on a $f(x) = x \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{u}{x^2 \cos^2 u + \sin^2 u} du$ donc $f(1) = \int_0^{\frac{\pi}{2}} u du = \frac{\pi^2}{8}$.

$$f\left(\frac{1}{x}\right) = \frac{1}{x} \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{u}{\frac{\cos^2 u}{x^2} + \sin^2 u} du = x \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{u}{x^2 \sin^2 u + \cos^2 u} du$$

. En posant $v = \frac{\pi}{2} - u$ on obtient :

$$f\left(\frac{1}{x}\right) = x \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\frac{\pi}{2} - v}{x^2 \cos^2 v + \sin^2 v} dv$$

d'où

$$f\left(\frac{1}{x}\right) + f(x) = \frac{\pi}{2} x \underbrace{\int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{dv}{x^2 \cos^2 v + \sin^2 v}}_{= \frac{\pi}{2x} \text{ d'après 5.}} = \frac{\pi^2}{4}$$

Donc :

Q7 : Réponses B,D

8. A.B La fonction $h : u \mapsto u - \frac{\pi}{2} \sin u$ est évidemment de classe \mathcal{C}^∞ sur \mathbb{R} !

C.D $h'(u) = 1 - \frac{\pi}{2} \cos u$ d'où le tableau de variations ci-dessous, en posant $\alpha = \text{Arccos} \frac{2}{\pi}$:

u	0	α	$\frac{\pi}{2}$
$h'(u)$	-	0	+
h	0	↘	↗ 0

Ce tableau montre que la réponse D est correcte.

$h(u) = \frac{\pi}{2} \left(\frac{2}{\pi} u - \sin u \right)$. Or $u \mapsto \frac{2}{\pi} u$ est l'équation de la corde à la courbe représentative de \sin qui passe par les points de coordonnées $(0,0)$ et $(\frac{\pi}{2}, 1)$; la négativité de h résulte alors directement de la concavité de la fonction \sin .

Q8 : Réponses A,D

9. A.B $f(x) - \frac{\pi}{2} x K(x) = x \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{u}{x^2 \cos^2 u + \sin^2 u} du - \frac{\pi}{2} x \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\sin u}{x^2 \cos^2 u + \sin^2 u} du = x \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{h(u)}{x^2 \cos^2 u + \sin^2 u} du$
 donc $f(x) - \frac{\pi}{2} x K(x) \leq 0$ d'après le résultat de la question précédente (et le résultat est vrai pour tout $x > 0$, pas seulement pour $x \in]0, 1[$).
 Enfin l'inégalité $f(x) \geq 0$ est immédiate, ce qui donne la réponse B.

C.D On reprend, pour $x \in]0, 1[$ l'expression trouvée à la question 5 : $K(x) = \frac{1}{2\sqrt{1-x^2}} \ln \left(\frac{1 + \sqrt{1-x^2}}{1 - \sqrt{1-x^2}} \right)$.

Quand $x \rightarrow 0^+$, $\sqrt{1-x^2} \rightarrow 1$ donc $K(x) \underset{x \rightarrow 0^+}{\sim} \frac{1}{2} \ln \left(\frac{1 + \sqrt{1-x^2}}{1 - \sqrt{1-x^2}} \right)$.

De plus, $\sqrt{1-x^2} = 1 - \frac{x^2}{2} + o(x^3)$ donc $\frac{1 + \sqrt{1-x^2}}{1 - \sqrt{1-x^2}} \underset{x \rightarrow 0^+}{\sim} \frac{4}{x^2}$ et enfin $K(x) \underset{x \rightarrow 0^+}{\sim} -\ln x$.

On en déduit $\lim_{x \rightarrow 0^+} xK(x) = 0$ puis $\lim_{x \rightarrow 0^+} f(x) = 0$ à l'aide de l'encadrement précédent, ce qui est la réponse C, mais la justification fournie dans cette réponse est inexacte.

Finalement :

Q9 : Réponse B

10. On a la relation $f\left(\frac{1}{x}\right) + f(x) = \frac{\pi^2}{4}$ pour tout $x > 0$. Puisque $\lim_{x \rightarrow 0^+} f(x) = 0$, on en déduit $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = \frac{\pi^2}{4}$.

Q10 : Réponse C

PARTIE II (= ICNA Optionnelle 2006 !)

11. C'est du cours :

- Il y a interversion des définitions dans les réponses A et B.
- Une matrice orthogonale est symétrique si et seulement si il s'agit de la matrice d'une symétrie orthogonale, donc la réponse D est fausse.
- Enfin, si $A \in \mathcal{F}_p$, on a ${}^t A = -A$...

En conclusion :

Q11 : Réponse E : aucune réponse exacte.

12. A. Il existe bien sûr des matrices symétriques non inversibles (par exemple la matrice nulle), donc la réponse A est fausse.
- B. Si A est une matrice orthogonale, la relation ${}^tAA = I$ implique A inversible et aussi $(\det A)^2 = 1$ donc $\det A = \pm 1$. Réponse fausse.
- C. S'il est vrai que les coefficients diagonaux d'une matrice antisymétrique sont nuls, celle-ci peut très bien être inversible. Ex : $\begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$. Réponse fausse.
- D. Si A est une matrice antisymétrique d'ordre p, la relation ${}^tA = -A$ conduit à $\det A = \det {}^tA = \det(-A) = (-1)^p \det A$. Si A est inversible, on a alors $\det A \neq 0$ d'où $(-1)^p = 1$ ce qui implique p pair.

Q12 : Réponse D

13. Si A appartient à \mathcal{F}_p , elle est antisymétrique et inversible donc nécessairement p est pair. Il en résulte que $\mathcal{F}_p = \emptyset$ dès que p est impair.

Enfin, soit $B = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$. On a $B^2 = -I_2$. Si p est pair, la matrice A d'ordre p diagonale par blocs et

telle que ses blocs diagonaux soient tous égaux à B, soit $A = \begin{bmatrix} \boxed{B} & & & \\ & \ddots & & \\ & & \boxed{0} & \\ & & & \boxed{B} \end{bmatrix}$ (avec p/2 blocs), vérifie

$A^2 = -I_p$, ce qui montre que \mathcal{F}_p n'est pas vide.

Finalement :

Q13 : Réponse C

14. C'est du cours. Les affirmations A,B et C sont fantaisistes, je vous laisse le soin d'y réfléchir.

Q14 : Réponse D

15. Le produit de deux matrices symétriques (d'ordre ≥ 2 !) n'est pas forcément symétrique (je vous laisse le soin de trouver un contre-exemple). L'ensemble \mathcal{S}_p ne peut donc pas être (sauf dans le cas trivial $p = 1$) stable par multiplication interne, ce qui exclut les réponses A,B et D.

Par contre c'est bien un sous-espace vectoriel de $M_p(\mathbb{R})$, de dimension $\frac{p(p+1)}{2}$, résultat du cours.

Q15 : Réponse C

16. La matrice J_n de l'énoncé est visiblement antisymétrique; un produit par blocs montre que $J_n^2 = -I_{2n}$ donc J_n appartient à \mathcal{F}_{2n} .

Enfin il est clair que les vecteurs colonnes de cette matrice forment une famille orthonormale, donc J_n est une matrice orthogonale.

En conclusion :

Q16 : Réponses C,D

17. A. B. C. ${}^tB = {}^t({}^tPAP) = {}^tP{}^tA{}^tP = {}^tP(-A)P = -B$ donc B est antisymétrique.

Puisque ${}^tP = P^{-1}$, on aura $B^2 = {}^tPA^2P = -I_{2n}$ donc B appartient bien à \mathcal{F}_{2n} .

Les 3 réponses sont donc inexactes.

- D. Réponse exacte (calcul immédiat en utilisant toujours ${}^tP = P^{-1}$).

Q17 : Réponse D

18. Puisque $A^2 = -I$, le polynôme $X^2 + 1$ est annulateur de A . Les valeurs propres complexes de A sont donc incluses dans l'ensemble des racines de ce polynôme, c'est-à-dire dans $\{-i, i\}$.

Le polynôme caractéristique de A est à coefficients réels, et possède nécessairement au moins une racine dans \mathbb{C} ; il en résulte que $-i$ et i sont exactement les racines de ce polynôme puisque les racines complexes non réelles d'un polynôme à coefficients réels sont conjuguées deux à deux, donc $\text{Sp}_{\mathbb{C}}(A) = \{-i, i\}$.

Cependant, la justification donnée à la fin de la réponse C est fantaisiste : si A est une matrice à coefficients réels quelconque, il n'y a aucune raison que la matrice $(A + iI)$ ne soit pas inversible !

Finalement :

Q18 : Réponse D

19. On a : $f(f(x) + ix) = f^2(x) + if(x) = -x + if(x) = i(f(x) + ix)$ donc le vecteur $f(x) + ix$ appartient bien au sous-espace propre de f associé à la valeur propre i . *Cependant* ce n'est pas forcément un vecteur propre de f car il peut être nul ! (Piège classique dans les questionnaires ICNA).

Pour cette raison et sans autre calcul, les quatre réponses sont fausses.

Q19 : Réponse E : aucune réponse exacte.

20. On a vu à la question 18 que la matrice A admet les deux valeurs propres $-i$ et i , et qu'elle annule le polynôme scindé à racines simples (dans $\mathbb{C}[X]$) $X^2 + 1$. Elle est donc diagonalisable d'après un célèbre théorème du cours d'où :

Q20 : Réponses A,C

21. A. Si E est un \mathbb{C} -espace vectoriel, la loi de multiplication externe $\mathbb{C} \times E \longrightarrow E$ peut être restreinte à

$$(\lambda, x) \mapsto \lambda \cdot x$$

$\mathbb{R} \times E$, et elle possèdera les mêmes propriétés algébriques, ce qui permet de munir E d'une structure de \mathbb{R} -espace vectoriel.

Si (e_1, \dots, e_n) est une base du \mathbb{C} -espace vectoriel E , tout vecteur x de E s'écrit de façon unique sous la forme $x = \sum_{k=1}^n z_k e_k$ avec z_1, \dots, z_n dans \mathbb{C} . En écrivant $z_k = a_k + ib_k$ avec a_k et b_k réels, on peut écrire x comme combinaison linéaire des $2n$ vecteurs e_k et ie_k pour $k \in \llbracket 1, n \rrbracket$. Il est facile de vérifier que ces $2n$ vecteurs sont \mathbb{R} -linéairement indépendants, donc ils forment une base du \mathbb{R} -espace vectoriel E , qui est par suite de dimension $2n$.

B. D. Si E est un \mathbb{R} -espace vectoriel, on ne peut pas toujours le munir d'une structure de \mathbb{C} -espace vectoriel ! Par exemple, si E est le \mathbb{R} -espace vectoriel $\mathbb{M}_2(\mathbb{R})$, et si $A \in E$, on n'a pas $\lambda \cdot A$ élément de E si λ est un complexe non réel. Et pourtant la dimension de E est ici paire, donc B et D sont fausses.

C. Si l'on suppose E de dimension finie, la réponse est exacte compte tenu de la réponse à la question A (faites bien la différence entre « il faut » et « il suffit »). Cependant, il n'est pas précisé dans l'énoncé que E est de dimension finie...

Q21 : Réponses A, C(?)

22. Grosse erreur d'énoncé ici, qui rend la question assez incompréhensible. Cette erreur, déjà présente dans la version de l'épreuve en 2006, n'a même pas été rectifiée !

Il fallait lire : « ... u l'application qui à $X \in \mathbb{C}^{2n}$ associe \overline{X} » (et non X).

On a bien, si $X, Y \in \mathbb{C}^{2n}$, $u(X + Y) = u(X) + u(Y)$ d'après les propriétés de la conjugaison.

Si $\lambda \in \mathbb{C}$ et $X \in \mathbb{C}^{2n}$, on a $u(\lambda X) = \overline{\lambda} u(X)$, donc u n'est pas \mathbb{C} -linéaire. Puisque $\lambda = \overline{\lambda}$ si λ réel, elle est par contre \mathbb{R} -linéaire.

Puisque $\overline{\overline{X}} = X$, on a $u \circ u = \text{Id}_{\mathbb{C}^{2n}}$, donc u est une symétrie vectorielle du \mathbb{R} -espace vectoriel \mathbb{C}^{2n} . Elle est donc en particulier bijective, donc l'image d'un sous-espace vectoriel est un sous-espace vectoriel de même dimension.

En résumé :

Q22 : Réponses B,C

23. A. Supposons par exemple que E_1 désigne le sous-espace propre associé à la valeur propre i et E_2 celui associé à la valeur propre $-i$ (on adoptera ce choix pour toute la suite).

Si $X \in E_1$, on a $AX = iX$ d'où $A\overline{X} = \overline{A} \overline{X} = \overline{AX} = \overline{iX} = -i\overline{X}$ puisque A est réelle, ce qui prouve que $\overline{X} = u(X) \in E_2$.

On a donc bien $u(E_1) \subset E_2$ et de la même façon $u(E_2) \subset E_1$.

B. C. D. Il en résulte que $\dim_{\mathbb{R}} u(E_1) \leq \dim_{\mathbb{R}} E_2$ et $\dim_{\mathbb{R}} u(E_2) \leq \dim_{\mathbb{R}} E_1$. Compte tenu de la question précédente, on en tire $\dim_{\mathbb{R}} E_1 = \dim_{\mathbb{R}} E_2$, puis d'après la question 21 : $\dim_{\mathbb{C}} E_1 = \dim_{\mathbb{C}} E_2$.

Enfin, d'après la question 20, $\mathbb{C}^{2n} = E_1 \oplus E_2$, donc $\dim_{\mathbb{C}} E_1 = \dim_{\mathbb{C}} E_2 = n$.

Conclusion :

Q23 : Réponses A,D

24. L'énoncé ne le précise pas clairement, mais il faut supposer ici que \mathbb{C}^{2n} est muni de son produit scalaire canonique, défini par : si $X, Y \in \mathbb{C}^{2n}$, $\langle X|Y \rangle = {}^t\overline{X}Y$.

C. D. On peut ici éliminer d'emblée, sans les lire complètement, les réponses B et C et D : il suffit de considérer le cas $X = Y$: si X est orthogonal à X , alors $X = 0$, et un sous-espace propre ne peut être réduit à $\{0\}$.

A. Supposons alors que X appartient à E_1 : $AX = iX$, et que Y appartient à E_2 : $AY = -iY$. Alors

$$\langle X|Y \rangle = {}^t\overline{X}Y = {}^t\left(\frac{1}{i}\overline{AX}\right) \cdot \frac{-1}{i}AY = -{}^t(\overline{AX})AY = -{}^t(A\overline{X})AY = -{}^t\overline{X}{}^tAA Y = -{}^t\overline{X}(-A^2)Y = -{}^t\overline{X}Y$$

où l'on a utilisé les propriétés : A est réelle, ${}^tA = -A$ et $A^2 = -I_{2n}$.

Il en résulte ${}^t\overline{X}Y = 0$, soit X et Y orthogonaux.

D. Supposons alors que X et Y appartiennent à E_1 (par exemple) : $AX = iX$ et $AY = iY$. On fait le même genre de calcul que ci-dessus :

$${}^tXY = {}^t\left(\frac{1}{i}\overline{AX}\right) \cdot \frac{1}{i}AY = -{}^t(AX)AY = -{}^tX{}^tAA Y = -{}^tX(-A^2)Y = -{}^tXY$$

d'où ${}^tXY = 0$.

C'est le début de la réponse D. On peut s'interroger sur la fin de la phrase : il est vrai que A appartient à \mathcal{O}_{2n} (car on a bien ${}^tAA = -A^2 = I_{2n}$), mais la formulation « car » me semble un peu excessive...

Notez que l'application $(X, Y) \mapsto {}^tXY$ n'est pas un produit scalaire sur \mathbb{C}^{2n} , donc l'égalité ${}^tXY = 0$ ne signifie pas que X et Y sont orthogonaux !!

Q24 : Réponses A,D

25. A. Puisque \mathbb{C}^{2n} est somme directe des deux sous-espaces propres de f , il suffit de choisir une base orthonormale dans chacun de ces sous-espaces propres (cela est possible d'après le cours), et leur réunion formera une base orthonormale de \mathbb{C}^{2n} puisque ces deux sous-espaces propres sont orthogonaux d'après la question précédente.

La réponse A est donc fautive (on pourrait d'ailleurs directement répondre aux autres questions pour obtenir ce résultat).

B. C. D. On choisit une base orthonormale (X_1, \dots, X_n) de E_1 . On a vu que $u(E_1) \subset E_2$, donc les vecteurs $\overline{X}_1, \dots, \overline{X}_n$ sont dans E_2 . Pour $(i, j) \in \llbracket 1, n \rrbracket$, $\langle \overline{X}_i | \overline{X}_j \rangle = {}^tX_i \overline{X}_j = \overline{{}^tX_i X_j} = \overline{\langle X_i | X_j \rangle} = \delta_{i,j}$, donc la famille $(\overline{X}_1, \dots, \overline{X}_n)$ est une famille orthonormale de E_2 , et par suite en est une base puisque $\dim E_2 = \dim E_1 = n$.

La réunion des deux familles (X_1, \dots, X_n) et $(\overline{X}_1, \dots, \overline{X}_n)$ forme alors une base orthonormale de \mathbb{C}^{2n} comme il a été expliqué ci-dessus.

Conclusion :

Q25 : Réponse B

26. A. B. En supposant toujours que E_1 est le sous-espace propre associé à la valeur propre i et E_2 celui associé à $-i$, on a :

Pour tout $j \in \llbracket 1, n \rrbracket$, $AZ_j = AX_j + A\overline{X_j} = AX_j + \overline{AX_j}$ puisque A est réelle. Or $AX_j = iX_j$ donc $AZ_j = i(X_j - \overline{X_j}) = Z_{j+n}$; on en déduit $AZ_{j+n} = A^2Z_j = -Z_j$. Les deux réponses A et B sont donc inexactes.

On peut cependant se demander ce que l'on obtient en supposant que E_1 est le sous-espace propre associé à la valeur propre $-i$. On trouve alors : $AZ_j = -Z_{j+n}$ et $AZ_{j+n}Z_j$, donc les réponses sont encore inexactes. Ouf !

C. D. Notons déjà que, puisque les vecteurs X_j et $\overline{X_j}$ sont orthogonaux, leur produit scalaire est nul soit : ${}^t\overline{X_j}X_j = 0$ et on a aussi, par conjugaison ${}^tX_jX_j = 0$.

D'où : ${}^tZ_jZ_j = ({}^tX_j + {}^t\overline{X_j})(X_j + \overline{X_j}) = {}^tX_jX_j + {}^t\overline{X_j}X_j = 2\|X_j\|^2 = 2$ puisque les X_j ont été choisis unitaires. Ainsi les réponses C et D sont-elles fausses.

Q26 : Réponse E : aucune réponse exacte.

27. A. Soient $j, k \in \llbracket 1, n \rrbracket$, distincts. Puisque la famille (X_1, \dots, X_n) est orthonormale, on a X_j et X_k orthogonaux, soit ${}^t\overline{X_j}X_k = 0$ et, de même, ${}^t\overline{X_k}X_j = 0$.

Donc : ${}^tZ_jZ_k = ({}^tX_j + {}^t\overline{X_j})(X_k + \overline{X_k}) = {}^tX_jX_k + {}^t\overline{X_j}X_k$. Mais ${}^tX_jX_k = \langle \overline{X_j} | X_k \rangle = 0$ puisque $X_j \in E_1$ et $\overline{X_k} \in E_2$ et que $E_1 \perp E_2$. De même ${}^t\overline{X_j}X_k = 0$ et, finalement, ${}^tZ_jZ_k = 0$.

On démontre de la même façon que ${}^tZ_{j+n}Z_{k+n} = 0$.

B. Si $j = k$, on a vu à la question 26 que ${}^tZ_jZ_j = 2$; donc cette réponse est fausse.

C. ${}^tZ_jZ_{k+n} = i({}^tX_j + {}^t\overline{X_j})(X_k - \overline{X_k}) = i({}^tX_jX_k - {}^tX_j\overline{X_k} + {}^t\overline{X_j}X_k - {}^t\overline{X_j}\overline{X_k})$ (*)

- Si $j \neq k$, les relations obtenues dans la résolution de la question A conduisent à ${}^tZ_jZ_{k+n} = 0$.

- Si $j = k$, on a ${}^tX_jX_j = 0$ et ${}^t\overline{X_k}X_k = 0$ d'après 24.D, et aussi ${}^tX_j\overline{X_j} = {}^t\overline{X_j}X_j = 1$, donc on obtient encore ${}^tZ_jZ_{k+n} = 0$.

Enfin on notera que la relation (*) ci-dessus n'est pas tout à fait la même que dans l'énoncé (un signe diffère), mais la relation de l'énoncé est quand même exacte puisque dans tous les cas on a ${}^t\overline{X_j}X_k = 0$! (PIÈGE ?)

D. Notons déjà que les coefficients des Z_i , par leur définition, sont des réels, donc les Z_i sont bien des éléments de \mathbb{R}^{2n} .

D'après A, on a ${}^tY_iY_i = 0$ pour tout $i \in \llbracket 1, 2n \rrbracket$, donc la famille (Y_1, \dots, Y_{2n}) est orthogonale dans le \mathbb{R} -espace vectoriel \mathbb{R}^{2n} muni du produit scalaire canonique $(X, Y) \mapsto {}^tXY$.

Enfin, le calcul fait à la question 26.D s'écrit $\|Z_i\|^2 = 2$; donc la famille (Y_1, \dots, Y_{2n}) est orthonormale. Donc (???)

Q27 : Réponses A,C,D

28. C. Déjà, la base (Z_1, \dots, Z_{2n}) n'est pas orthonormale ($\|Z_i\|^2 = 2$), donc la réponse C est fausse.

A. B. IMPOSSIBLE DE RÉPONDRE À CES QUESTIONS !

En effet, le résultat dépend du choix fait pour les sous-espaces propres E_1 et E_2 (à quelle valeur propre i ou $-i$ font-ils référence?), et ce choix n'est pas précisé dans l'énoncé.

Avec le choix que j'ai fait depuis le début, on a $AY_i = Y_{i+n}$ et $AY_{i+n} = -Y_i$ pour $i \in \llbracket 1, n \rrbracket$ donc la matrice de f dans la base orthonormale (Y_1, \dots, Y_n) est J_n (réponse B). Avec le choix opposé, on obtiendrait $-J_n$, réponse A)...

D. La matrice de passage entre deux bases orthonormales est une matrice orthogonale d'après le cours. La formule de changement de base $\pm J_n = P^{-1}AP = {}^tPAP$ fait aussi partie du cours. La réponse D est exacte si l'on fait l'hypothèse que E_1 est le sous-espace propre associé à la valeur propre i , fausse si l'on fait l'hypothèse contraire...

Q28 : Ne pas répondre

PARTIE III

29. **A. B. C.** $f_n(0) = (-1)^{n-1}$, donc la série $\sum_{n \geq 1} f_n(0)$ diverge. Les deux premières réponses sont donc fausses, et la troisième est exacte, sans réfléchir davantage.

D. Je suppose que la mystérieuse fonction u_n qui apparaît dans l'énoncé est en fait f_n ...

Pour tout x réel ≥ 2 , on a $|f_n(x)| \leq \frac{1}{n^2}$ donc $\|f_n\|_{\infty}^{[2, +\infty[} \leq \frac{1}{n^2}$. Puisque la série à termes positifs $\sum_{n \geq 1} \frac{1}{n^2}$ converge, les théorèmes usuels de comparaisons assurent la convergence de la série $\sum_{n \geq 1} \|f_n\|_{\infty}^{[2, +\infty[}$, c'est-à-dire la convergence normale de la série de fonctions $\sum_{n \geq 1} f_n$ sur l'intervalle $[2, +\infty[$.

Cette série y est donc uniformément convergente, et le théorème d'interversion des limites (appelé aussi th. de la double limite) donne : $\lim_{x \rightarrow +\infty} F(x) = \sum_{n=1}^{+\infty} \lim_{x \rightarrow +\infty} f_n(x) = 1$ puisque $f_1(x) = 1$ et que

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} f_n(x) = 0 \text{ pour } n \geq 2.$$

C'est exactement la réponse D. (l'énoncé est gentil, il fait la démonstration !)

Q29 : Réponses C,D

30. h_x est de classe \mathcal{C}^∞ sur \mathbb{R}_+^* comme quotient de telles fonctions (donc la réponse A est fausse) et pour tout $t > 0$: $h'_x(t) = (1 - x \ln t)t^{-x-1}$.

Il en résulte que h_x est croissante sur $]0, e^{1/x}]$ et décroissante sur $[e^{1/x}, +\infty[$. On aura donc, si $n \in \mathbb{N}$, $h_x(n+1) \leq h_x(n)$ dès que $n \geq e^{1/x}$, soit, puisque $e^{1/x}$ n'est pas entier, $n \geq E(e^{1/x}) + 1$.

La suite $n \mapsto \frac{\ln n}{n^x} = h_x(n)$ est donc décroissante à partir du rang $E(e^{1/x}) + 1$, donc la réponse C est fausse. Elle n'est pas forcément décroissante à partir du rang $E(e^{1/x})$, comme le montre le cas $x = 1$: dans ce cas, $E(e^{1/x}) = 2$ mais $h_x(3) = \frac{\ln 3}{3} \approx 0,366 \geq h_x(2) \approx 0,347$. Les réponses B et C sont donc fausses également.

Q30 : Réponse E : aucune réponse exacte.

31. Pour $x > 0$, $f_n(x) = (-1)^{n-1} n^{-x} = (-1)^{n-1} e^{-x \ln n}$ donc $f'_n(x) = (-1)^n \ln n e^{-x \ln n} = (-1)^n \frac{\ln n}{n^x}$.

D'après le résultat de la question précédente, la suite $|f'_n(x)|$ est décroissante à partir du rang $n_0 = E(e^{1/x}) + 1$, et $\lim_{n \rightarrow +\infty} f'_n(x) = 0$ par croissances comparées.

La série $\sum_{n \geq n_0} f'_n(x)$ vérifie donc le CSSA ; on en déduit en particulier, si l'on note $R_n(x) = \sum_{k=n+1}^{+\infty} f_k(x)$ pour

$$n \geq n_0, \text{ la majoration } |R_n(x)| \leq |f'_{n+1}(x)| = \frac{\ln n}{(n+1)^x} \leq \frac{\ln n}{(n+1)^a} \text{ pour } x \in [a, +\infty[.$$

Ainsi $\|R_n\|_{\infty}^{[a, +\infty[} \leq \frac{\ln n}{(n+1)^a} \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} 0$, ce qui prouve la convergence uniforme de la série sur $[a, +\infty[$.

Le théorème sur la dérivation d'une série de fonctions de classe \mathcal{C}^1 permet d'en déduire ensuite que F est de classe \mathcal{C}^1 sur $]0, +\infty[$.

Q31 : Réponses A,D

32. A. B. Pour $x > 1$ toutes les séries écrites ci-dessous sont convergentes et l'on a :

$$G(x) - F(x) = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1 - (-1)^{n-1}}{n^x} = \sum_{\substack{n=1 \\ n \text{ pair}}}^{+\infty} \frac{2}{n^x} = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{2}{(2n)^x} = \frac{2}{2^x} \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n^x} = 2^{1-x} G(x)$$

soit : $F(x) = (1 - 2^{1-x})G(x)$.

Aucune des deux réponses proposées ne convient.

C. D. Puisque $\lim_{x \rightarrow +\infty} 2^{1-x} = 0$, la relation ci-dessus montre que $F(x) \sim G(x)$, donc $\lim_{x \rightarrow +\infty} G(x) = \lim_{x \rightarrow +\infty} F(x) = 1$.

C'est la réponse C.

Rem : La fonction F est à valeurs positives (signe du premier terme, dans le cas d'une série vérifiant le CSSA), ainsi que la fonction G. Les réponses A,B et D pouvaient donc être écartées d'emblée !

Q32 : Réponse C

33. A. B. La suite proposée est celle des sommes partielles d'une série géométrique de premier terme 1 et de raison $-t$. Elle est donc convergente pour tout $t \in]-1, 1[$ et a pour limite $\frac{1}{1+t}$.

Les réponses A et B sont fausses.

C. D. $F(1) = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(-1)^n}{n+1} = \sum_{n=0}^{+\infty} (-1)^n \int_0^1 t^n dt$ donc $F(1) = \lim_{n \rightarrow +\infty} \sum_{k=0}^n \int_0^1 (-t)^k dt = \lim_{n \rightarrow +\infty} \int_0^1 u_n(t) dt$.

$u_n(t)$ est la somme partielle d'une série qui vérifie le CCSA donc pour tout $n \in \mathbb{N}$ et tout $t \in [0, 1[$, $0 \leq u_n(t) \leq u_0(t) = 1$. La fonction constante égale à 1 étant intégrable sur $[0, 1[$ le théorème de CVD

s'applique, ce qui donne : $F(1) = \int_0^1 \lim_{n \rightarrow +\infty} u_n(t) dt = \int_0^1 \frac{dt}{1+t} = \ln 2$ (résultat bien connu!).

Q33 : Réponse D

34. A. B. F étant de classe \mathcal{C}^1 ; le théorème de Taylor-Young donne, pour x au voisinage de 1 :

$$F(x) = F(1) + (x-1)F'(1) + o(x-1).$$

Les deux réponses A et B sont fausses.

C. D. On applique ce même théorème à la fonction $f : x \mapsto 1 - 2^{1-x} = 1 - e^{(1-x)\ln 2}$, mais à l'ordre 2.

On a ici $f'(x) = \ln 2 \cdot 2^{1-x}$ donc $f'(1) = \ln 2$, puis $f''(x) = -(\ln 2)^2 \cdot 2^{1-x}$ donc $f''(1) = -(\ln 2)^2$ et le développement limité de f au voisinage de 1 s'écrit :

$$f(x) = f(1) + (x-1)f'(1) + \frac{(x-1)^2}{2} f''(1) + o((x-1)^2) = (x-1)\ln 2 - \frac{(x-1)^2}{2}(\ln 2)^2 + o((x-1)^2).$$

Q34 : Réponse E : aucune réponse exacte.

35. Pour x au voisinage de 1^+ on a compte tenu de tous les résultats précédents :

$$\begin{aligned} G(x) &= \frac{1}{1-2^{-1x}} F(x) = \frac{\ln 2 + (x-1)F'(1) + o(x-1)}{(x-1)\ln 2 - \frac{(x-1)^2}{2}(\ln 2)^2 + o((x-1)^2)} \\ &= \frac{1}{(x-1)\ln 2} \cdot \frac{\ln 2 + (x-1)F'(1) + o(x-1)}{1 - \frac{x-1}{2}\ln 2 + o(x-1)} = \frac{1}{(x-1)\ln 2} \cdot (\ln 2 + (x-1)F'(1) + o(x-1)) \left(1 + \frac{x-1}{2}\ln 2 + o(x-1)\right) \\ &= \frac{1}{(x-1)\ln 2} \left(\ln 2 + \left(F'(1) + \frac{(\ln 2)^2}{2}\right)(x-1) + o(x-1) \right) = \frac{1}{x-1} + \left(\frac{F'(1)}{\ln 2} + \frac{\ln 2}{2} \right) + o(1) \end{aligned}$$

soit :

Q35 : Réponse B

36. A. B. Pour $x \geq 1$, la fonction $t \mapsto \frac{1}{t^x}$ décroît sur l'intervalle $[n, n+1]$ donc, si $n \leq t \leq n+1$,
 $\frac{1}{(n+1)^x} \leq \frac{1}{t^x} \leq \frac{1}{n^x}$ et, en intégrant cette inégalité entre n et $n+1$, on obtient

$$\frac{1}{(n+1)^x} \leq \int_n^{n+1} \frac{dt}{t^x} \leq \frac{1}{n^x}$$

ce qui donne $0 \leq v_n(x) \leq \frac{1}{n^x} - \frac{1}{(n+1)^x}$.

La série télescopique $\sum_{n \geq 1} \left(\frac{1}{n^x} - \frac{1}{(n+1)^x} \right)$ étant convergente (de somme 1), le théorème de comparaison sur les séries à termes réels positifs permet de conclure quant à la convergence de la série $\sum_{n \geq 1} v_n(x)$ pour tout $x \geq 1$.

C. D. Pour $x > 1$, la série $\sum_{n \geq 1} \frac{1}{n^x}$ et l'intégrale $\int_1^{+\infty} \frac{dt}{t^x}$ convergent, donc on a :

$$\forall x > 1, \sum_{n=1}^{+\infty} v_n(x) = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n^x} - \int_1^{+\infty} \frac{dt}{t^x} = G(x) - \left[\frac{t^{-x+1}}{-x+1} \right]_{t=1}^{t=+\infty} = G(x) + \frac{1}{1-x}.$$

Il y a une « erreur » de signe dans la réponse C...

En conclusion (même s'il n'était pas utile ici de supposer $x \leq 2$) :

Q36 : Réponse B

37. Pour tout $n \in \mathbb{N}$ et tout $x \geq 1$, posons $w_n(x) = \frac{1}{n^x} - \frac{1}{(n+1)^x} = e^{-x \ln n} - e^{-x \ln(n+1)}$.

w_n est de classe \mathcal{C}^1 sur $[1, +\infty[$ et $w'_n(x) = -\frac{\ln n}{n^x} + \frac{\ln(n+1)}{(n+1)^x} = -h_x(n) + h_x(n+1)$.

D'après la question 30, pour $n \geq e^{1/x}$, $h_x(n) \geq h_x(n+1)$ donc $w'_n(x) \leq 0$. Or $n \geq e^{1/x} \iff x \geq \frac{1}{\ln n}$. Pour $n \geq 3$, $\frac{1}{\ln n} < 1$ donc w'_n est négative sur $[1, +\infty[$ et w_n est décroissante.

Il en résulte : $\forall x \in [1, +\infty[\quad \forall n \geq 3, 0 \leq v_n(x) \leq w_n(x) \leq w_n(1) = \frac{1}{n(n+1)}$.

Par suite, $\|w_n\|_{\infty}^{[1, +\infty[} \leq \frac{1}{n(n+1)}$. La série de terme général $\frac{1}{n(n+1)}$ étant convergente, il en résulte que la série de fonctions $\sum_{n \geq 1} v_n$ est normalement convergente sur $[1, +\infty[$.

Elle est donc aussi uniformément convergente sur $[1, +\infty[$, et a fortiori sur $[1, 2]$!

Q37 : Réponse A

38. A. B. La réponse B est exacte, cela a été démontré ci-dessus.

C. D. On a vu à la question 36, pour tout $x > 1$: $G(x) = \frac{1}{x-1} + \sum_{n=1}^{+\infty} v_n(x)$. Puisque la somme de la série de fonctions de terme général v_n est continue en 1 ; on a, au voisinage de ce point :
 $\sum_{n=1}^{+\infty} v_n(x) = v_n(1) + o(x-1) = \gamma + o(x-1)$ d'où $G(x) = \frac{1}{x-1} + \gamma + o(1)$.

Or on avait obtenu, à la question 35 : $G(x) = \frac{1}{x-1} + \left(\frac{F'(1)}{\ln 2} + \frac{\ln 2}{2} \right) + o(1)$ au voisinage de 1^+ . Par comparaison de ces deux développements limités, on a $\gamma = \frac{F'(1)}{\ln 2} + \frac{\ln 2}{2}$, d'où $F'(1) = \ln 2 \left(\gamma - \frac{\ln 2}{2} \right)$.
 C'est la réponse D.

Complément : On a vu à la question 31 que le théorème de dérivation terme à terme d'une série de fonctions de classe \mathcal{C}^1 s'applique, donc, pour tout $x > 0$: $F'(x) = \sum_{n=1}^{+\infty} f_n'(x) = \sum_{n=1}^{+\infty} (-1)^n \frac{\ln n}{n^x}$. En particulier,

pour $x = 1$, on obtient le joli résultat : $\sum_{n=1}^{+\infty} (-1)^n \frac{\ln n}{n} = \ln 2 \left(\gamma - \frac{\ln 2}{2} \right)$.

Q38 : Réponses B, D

Les deux dernières questions n'ont aucun rapport avec ce qui précède. Elles donnent vraiment l'impression d'avoir été recopiées sur un vieil énoncé, (par exemple celui posé à l'épreuve optionnelle de 2006, qui avait déjà été repris pour l'épreuve optionnelle de 2012), mais sans les questions intermédiaires, ce qui rend le tout complètement incohérent et absolument infaisable !

39. Il est impossible de répondre à cette question sans faire d'abord une étude des propriétés des polynômes de Bernoulli !!

Je vous invite à vous reporter à mon corrigé de l'épreuve optionnelle de 2012 où l'on démontre que les fonctions g_k sont continues et de classe \mathcal{C}^1 par morceaux.

On peut donc alors directement affirmer, d'après le cours :

Q39 : Réponses A,C

40. Là encore, cette question est infaisable sans quelques résultats préliminaires. **Je vous invite encore à vous reporter à mon corrigé de l'épreuve optionnelle de 2012**; la seule différence est que, dans cette épreuve, les fonctions g_k avaient été choisies 1-périodiques et non 2π -périodiques comme ici...

Sous toutes réserves, car je n'ai pas envie de refaire tous les calculs (fastidieux), et par comparaison avec les résultats trouvés dans cette épreuve (en particulier la question 15 pour la réponse B et la question 18 pour la réponse C) :

Q40 : Réponses B,C

