J.5000796

ECOLE NATIONALE DE L'AVIATION CIVILE **Session 2005**

CONCOURS DE RECRUTEMENT D'ELEVES INGENIEURS DU CONTROLE DE LA NAVIGATION AERIENNE

◆

Epreuve commune obligatoire de MATHEMATIQUES

Durée : 4 heures

Coefficient : 2

◆

Ce sujet comporte :

1 page de garde
2 pages d'instructions pour remplir le QCM
1 page d'avertissement
12 pages de texte numérotées de 1 à 12

◆

CALCULATRICE AUTORISEE

ÉCOLE NATIONALE DE L'AVIATION CIVILE **ICNA 2005**

ÉPREUVE COMMUNE OBLIGATOIRE DE MATHÉMATIQUES

A LIRE TRÈS ATTENTIVEMENT

L'épreuve «commune obligatoire de mathématiques» de ce concours est un questionnaire à choix multiple qui sera corrigé automatiquement par une machine à lecture optique.

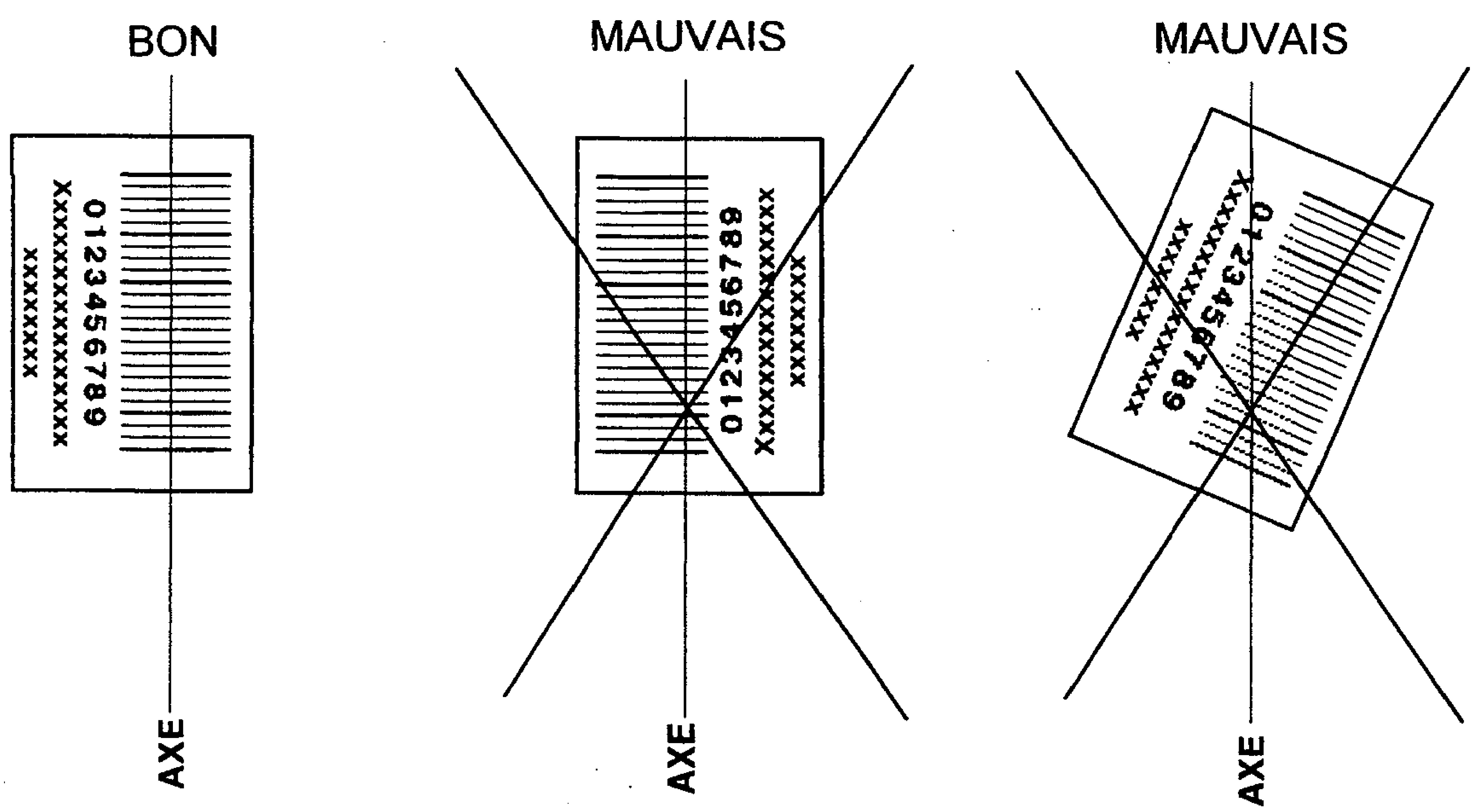
ATTENTION, IL NE VOUS EST DÉLIVRÉ QU'UN SEUL QCM

1) Vous devez coller dans la partie droite prévue à cet effet, **l'étiquette correspondant à l'épreuve que vous passez,** c'est-à-dire épreuve commune obligatoire de mathématiques (voir modèle ci-dessous).

POSITIONNEMENT DES ÉTIQUETTES

Pour permettre la lecture optique de l'étiquette, le trait vertical matérialisant l'axe de lecture du code à barres (en haut à droite de votre QCM) doit traverser la totalité des barres de ce code.

EXEMPLES :



2) Pour remplir ce QCM, vous devez utiliser un STYLO BILLE ou une POINTE FEUTRE de couleur NOIRE.

3) Utilisez le sujet comme brouillon et ne retranscrivez vos réponses qu'après vous être relu soigneusement.

4) Votre QCM ne doit pas être souillé, froissé, plié, écorné ou porter des inscriptions superflues, sous peine d'être rejeté par la machine et de ne pas être corrigé.

5) Cette épreuve comporte 40 questions obligatoires, certaines, de numéros consécutifs, peuvent être liées. La liste de ces questions est donnée avant l'énoncé du sujet lui-même.
Chaque question comporte au plus deux réponses exactes.

6) A chaque question numérotée entre 1 et 40, correspond sur la feuille-réponses une ligne de cases qui porte le même numéro (les lignes de 41 à 100 sont neutralisées). Chaque ligne comporte 5 cases a, b, c, d, e.
Pour chaque ligne numérotée de 01 à 40, vous vous trouvez en face de 4 possibilités :

► soit vous décidez de ne pas traiter cette question,
la ligne correspondante doit rester vierge.

► soit vous jugez que la question comporte une seule bonne réponse :
vous devez noircir l'une des cases a, b, c, d.

► soit vous jugez que la question comporte deux réponses exactes :
vous devez noircir deux des cases a, b, c, d et deux seulement.

► soit vous jugez qu'aucune des réponses proposées a, b, c, d n'est bonne :
vous devez alors noircir la case e.

Attention, toute réponse fausse entraîne pour la question correspondante une pénalité dans la note.

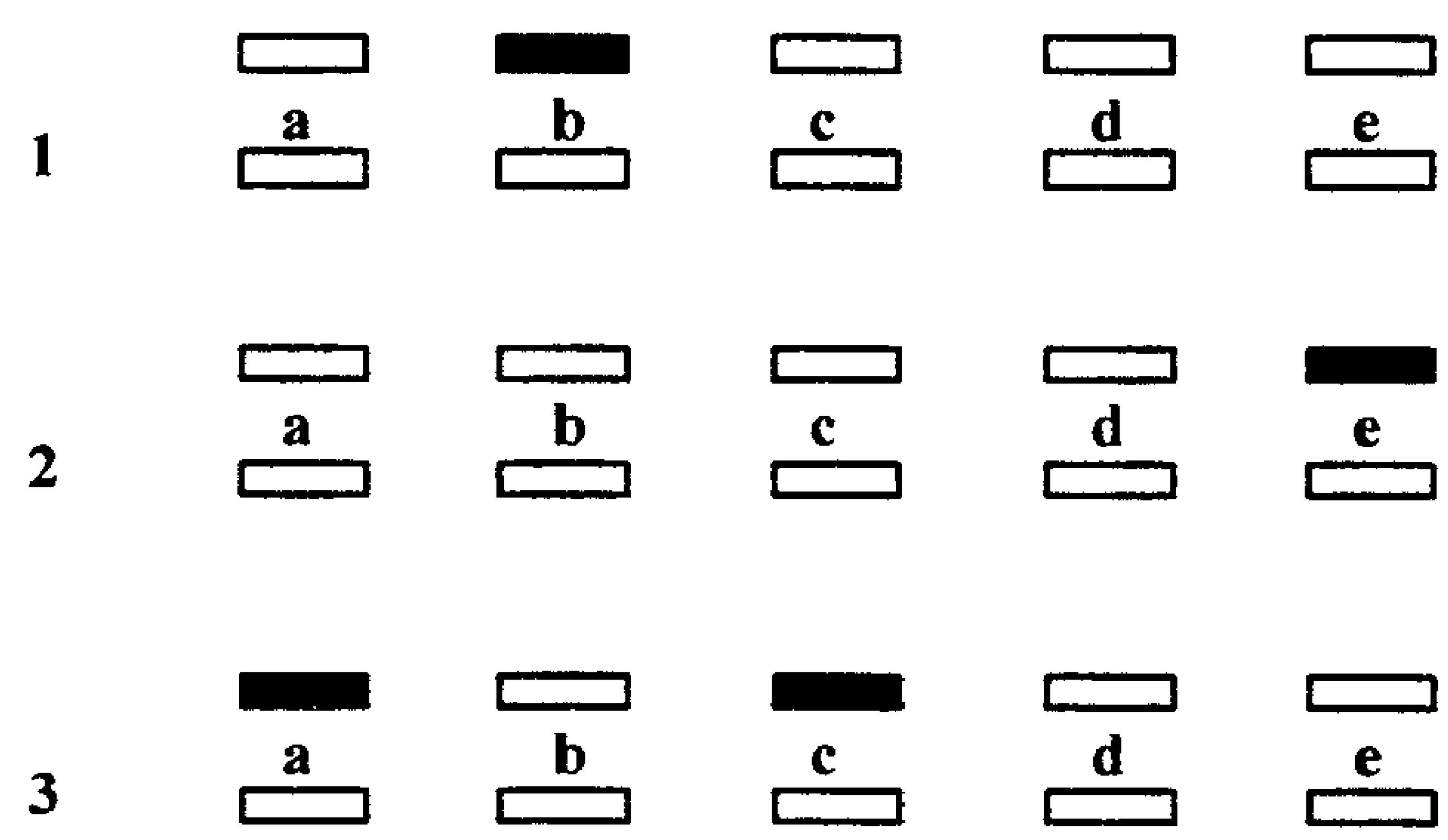
7) EXEMPLES DE RÉPONSES

Question 1 : $1^2 + 2^2$ vaut :
a) 3 b) 5 c) 4 d) -1

Question 2 : le produit (-1) (-3) vaut :
a) -3 b) -1 c) 4 d) 0

Question 3 : Une racine de l'équation $x^2 - 1 = 0$ est :
a) 1 b) 0 c) -1 d) 2

Vous marquerez sur la feuille réponse :



AVERTISSEMENT

QUESTIONS LIEES
de 1 à 23
de 24 à 36
de 37 à 40

PARTIE I

On considère les fonctions φ_1 qui à u, élément du segment $I=[0,\pi/2]$, associe

$$\varphi_1(u) = 1/(x^2\cos^2 u + \sin^2 u)$$

et $\cancel{\varphi_1}$ φ_2 qui à u, élément du segment I, associe

$$\varphi_2(u) = (\sin u)/(x^2\cos^2 u + \sin^2 u)$$

x étant un paramètre réel.

Question 1. La fonction φ_1

a) est définie sur I pour tout x réel
b) est définie sur I pour tout x réel positif ou nul
c) est définie et continue sur I pour x réel strictement positif
d) n'est continue sur I que pour x réel strictement positif

Question 2. La fonction φ_2

a) est dérivable sur I pour tout x réel non nul
b) est dérivable sur I pour tout x réel
c) est dérivable sur $]0,\pi/2]$ pour tout x réel et a pour dérivée sur cet intervalle
$$\varphi'_2(u) = (x^2\cos^3 u + (2x^2 - 1)\cos u \sin^2 u)/(x^2\cos^2 u + \sin^2 u)^2$$
d) a pour dérivée pour tout $u \ni I$ et pour tout x réel strictement positif
$$\varphi'_2(u) = (\cos u)/((1 - x^2)\sin 2u)$$

Question 3. Les intégrales $\displaystyle\int_0^{\pi/2} \varphi_1(u)\,du$ et $\displaystyle\int_0^{\pi/2} \varphi_2(u)\,du$

a) existent et ont des valeurs finies pour tout x réel car toute fonction continue sur un segment est intégrable sur ce segment
b) existent et ont des valeurs finies pour tout x réel non nul car toute fonction définie sur un segment est intégrable sur ce segment
c) existent et ont des valeurs finies, uniquement pour x réel strictement positif
d) sont divergentes pour $x= 0$ car les fonctions φ_1 et φ_2 sont équivalentes à la fonction $1/u^2$ au voisinage de 0

Question 4. L'intégrale généralisée $\displaystyle\int_0^{+\infty} (1/(1+t^2))\,dt$ est

a) divergente car la fonction n'est pas définie en $+\infty$
b) convergente car toute fonction f continue sur $[0,+\infty[$ et admettant une limite nulle en $+\infty$ a une intégrale généralisée $\displaystyle\int_0^{+\infty} f(t)\,dt$ convergente
c) absolument convergente car la fonction est continue positive sur $[0,+\infty[$ et équivalente à $1/t^2$ en $+\infty$
d) convergente mais non absolument convergente et vaut $\pi/2$

Question 5. On pose $J(x) = \int_0^{\pi/2} \varphi_1(u)\, du$ et $K(x) = \int_0^{\pi/2} \varphi_2(u)\, du$

lorsque ces intégrales sont convergentes. On obtient, pour x appartenant à l'intervalle $]0,1[$, en utilisant des changements de variable

a) $J(x) = \int_0^{\pi/2} ((x(1+x^2t^2)) /((1+x^2t^2)(1+t^2)x^2))\, dt$ en posant $t = (\tan u)/x$ transformation de classe C^1 et bijective sur $[0,\pi/2[$

b) $J(x) = \int_0^{+\infty} (1/(1+t^2))\, dt = \pi/2$

c) $K(x) = \int_0^{1} (1/(1+x^2v^2 + v^2))\, dv$

d) $K(x) = \int_0^{1} (1/(1 - (1-x^2)v^2))\, dv = (1/(2(1-x^2)^{1/2})) \ln((1+(1-x^2)^{1/2})/(1-(1-x^2)^{1/2}))$ en posant $v = \cos u$, transformation de classe C^1 et bijective sur $[0,\pi/2]$

Question 6. La fonction K de la variable réelle x définie à la question 5 est équivalente au voisinage de 0 à

a) $\ln x$
b) $-\ln x$
c) $1/x$
d) $-2 \ln x$

On considère l'application f définie sur l'intervalle $]0,+\infty[$ par $$f(x) = x \int_0^{\pi/2} u\, \varphi_1(u)\, du$$

Question 7. La fonction f vérifie

a) $f(1) = 0$
b) $f(1) = \pi^2/8$
c) $f(1/x)+f(x) = x\, \pi^2/4$ pour tout $x>0$
d) $f(1/x)+f(x) = \pi^2/4$ pour tout $x>0$

Question 8. La fonction h définie sur l'intervalle $[0,\pi/2]$ par $h(u) = u - (\pi/2)\sin u$ est

a) de classe C^∞ sur le segment $[0,\pi/2]$
b) dérivable mais n'est pas deux fois dérivable sur I
c) positive sur le segment $[0,\pi/2]$ car h' est strictement positive sur I
d) négative sur le segment $[0,\pi/2]$ car h est décroissante puis croissante respectivement sur les intervalles $[0,\alpha]$ et $[\alpha,\pi/2]$ où $\alpha = \arccos(2/\pi)$

Question 9. On a, pour tout x appartenant à l'intervalle $]0,1[$:

a) $x\,\mathrm{K}(x)\,\pi/2 \leq f(x)$

b) $0 \leq f(x) \leq x\,\mathrm{K}(x)\,\pi/2$

c) $\lim_{x \to 0} f(x) = 0$ car $\mathrm{K}(x)$ est équivalent à $-2\ln x$ au voisinage de 0

d) $\pi/2 \leq \lim_{x \to 0} f(x)$

Question 10. Lorsque x tend vers $+\infty$, $f(x)$ a pour limite

a) $+\infty$

b) $-\infty$

c) $\pi^2/4$

d) $(\pi^2/4) - (\pi/2)$

Soit g la fonction définie sur $]0,+\infty[$ par

$$g(x) = \int_0^{\pi/2} (u/(x\cos^2 u + \sin^2 u))\ du$$

Question 11. x désignant un réel strictement positif et k un réel tel que $0 < |\mathrm{k}| < x/2$, on pose $\mathrm{A} = x\cos^2 u + \sin^2 u$ et $\mathrm{B} = \mathrm{k}\cos^2 u$. On a

a) $1/(\mathrm{A+B}) = (1/\mathrm{A}) - (\mathrm{B}/\mathrm{A}^2) + (\mathrm{B}^2/(\mathrm{A}^2(\mathrm{A+B})))$

b) $1/(\mathrm{A+B}) = (1/\mathrm{A}) + (\mathrm{B}/\mathrm{A}^2) - (\mathrm{B}^2/(\mathrm{A}^2(\mathrm{A+B})))$

c) $((g(x+\mathrm{k})-g(x))/\mathrm{k}) + \int_0^{\pi/2} ((u\cos^2 u)/(x\cos^2 u+\sin^2 u)^2)du = \int_0^{\pi/2} (1/\mathrm{k})((1/(\mathrm{A+B}))-(1/\mathrm{A})-(\mathrm{B}/\mathrm{A}^2))du$

d) $\left| ((g(x+\mathrm{k})-g(x))/\mathrm{k}) + \int_0^{\pi/2} ((u\cos^2 u)/(x\cos^2 u+\sin^2 u)^2)du \right| \leq |\mathrm{k}| \int_0^{\pi/2} ((u\cos^4 u)/((x/2)(\cos^2 u+\sin^2 u)^3)du$

Question 12. On note ψ la fonction du couple (x,u) de variables réelles qui à (x,u) associe le réel $\psi(x,u) = xu/(x^2\cos^2 u + \sin^2 u)$. La fonction ψ est

a) définie et continue sur IR^2

b) définie et continue sur $[0,+\infty[\times[0,\pi/2]$ comme produit de fonctions continues sur cet ensemble

c) définie et continue sur $\mathrm{E}=]0,+\infty[\times[0,\pi/2]$ comme produit de fonctions continues sur E, la fonction $x^2\cos^2 u + \sin^2 u$ ne s'annulant pas sur E

d) définie et continue sur $\mathrm{IR}^*\times[0,\pi/2]$

Question 13. Les dérivées partielles d'ordre un de la fonction ψ sont définies par la fonction

a) $u(x^2\cos^2 u - \sin^2 u)/(x^2\cos^2 u + \sin^2 u)^2$ pour tout couple (x,u) appartenant à $]0,+\infty[\times[0,\pi/2]$ pour la dérivée partielle par rapport à x

b) $u/(2x\cos^2 u)$ pour tout couple (x,u) appartenant à $]0,+\infty[\times[0,\pi/2[$ pour la dérivée partielle par rapport à x

c) $x/(-2x^2\cos u \sin u + 2\cos u \sin u) = x/((1-x^2)\sin 2u)$ pour tout couple (x,u) appartenant à $]1,+\infty[\times]0,\pi/2[$ pour la dérivée partielle par rapport à u

d) $(x(x^2\cos^2 u + \sin^2 u) - x(1-x^2)u \sin 2u)/(x^2\cos^2 u + \sin^2 u)^2$ pour tout couple (x,u) appartenant à $]0,+\infty[\times[0,\pi/2]$ pour la dérivée partielle par rapport à u

Question 14. La fonction ψ

a) est différentiable sur IR^2 car de classe C^1 sur IR^2 puisque les dérivées partielles d'ordre un de ψ sont continues sur IR^2

b) est de classe C^n sur $IR^* \times [0,\pi/2]$ pour tout n entier strictement positif, car les dérivées partielles à tout ordre de ψ sont continues sur cet ensemble

c) a pour matrice jacobienne en tout point (x,u) de $IR^* \times [0,\pi/2]$

$$\begin{pmatrix} -u(x^2\cos^2 u - \sin^2 u)/(x^2\cos^2 u + \sin^2 u)^2 \\ (x(x^2\cos^2 u + \sin^2 u) - x(1-x^2)u \sin 2u)/(x^2\cos^2 u + \sin^2 u)^2 \end{pmatrix}$$

d) a pour matrice jacobienne en tout point (x,u) de $]0,+\infty[\times[0,\pi/2]$

$$\left(-u(x^2\cos^2 u - \sin^2 u)/(x^2\cos^2 u + \sin^2 u)^2,\ (x(x^2\cos^2 u + \sin^2 u) - x(1-x^2)u \sin 2u)/(x^2\cos^2 u + \sin^2 u)^2\right)$$

Question 15. La fonction f définie par $f(x) = x \displaystyle\int_0^{\pi/2} u\, \varphi_1(u)\, du$ est

a) dérivable sur IR^* car $f(x) = x\, g(x^2)$ pour tout x réel non nul et que la fonction g est dérivable sur IR^*

b) dérivable sur $]0,+\infty[$ de dérivée en tout point x de $]0,+\infty[$

$$f'(x) = g(x^2) + 2x\, g'(x^2) = -\int_0^{\pi/2} (u(x^2\cos^2 u - \sin^2 u)/(x^2\cos^2 u + \sin^2 u)^2)\, du$$

c) dérivable sur IR^* et, a pour dérivée en tout point x de IR^*

$$f'(x) = \int_0^{\pi/2} \psi'_x(x,u)\, du$$ où ψ'_x désigne la dérivée partielle d'ordre un de ψ par rapport à x

d) dérivable sur $]0,+\infty[$ mais n'est pas dérivable sur IR^*

Question 16. Pour x fixé dans $]0,+\infty[$, on note β la fonction définie sur $I=[0,\pi/2]$ par

$$\beta(u) = (\cos u \sin u)/(x^2\cos^2 u+\sin^2 u)$$

On a

a) β est de classe C^∞ sur I et a pour dérivée en tout point u de I

$$\beta'(u) = -(x^2\cos^2 u - \sin^2 u)\ /(x^2\cos^2 u+\sin^2 u)^2$$

b) β est de classe C^1 sur I et a pour dérivée en tout point u de I

$$\beta'(u) = (x\cos^2 u - \sin^2 u)\ /(x^2\cos^2 u+\sin^2 u)^2$$

c) $f'(x) = -\displaystyle\int_0^{\pi/2} \beta(u)\, du$

d) $f'(x) = \displaystyle\int_0^{\pi/2} \beta(u)\, du$

Question 17. La fonction f' vérifie

a) $f'(1) = -\displaystyle\int_0^{\pi/2} \cos u \sin u\, du \ = 1/2$

b) $f(x) = -(\ln x)^2/(2(1-x^2))$ pour tout x réel strictement positif et différent de 1

c) $f(x) = (\ln x)/(1-x^2)$ pour tout x réel strictement positif et différent de 1

d) $f(x) = -(\ln(1/x))/(x^2-1)$ pour tout x réel strictement positif et différent de 1

Question 18. L'intégrale $\displaystyle\int_0^x f(t)\, dt$ est pour tout x strictement positif

a) divergente car la fonction $(\ln t)/(t^2-1)$ n'a pas de limite en 0

b) convergente car absolument convergente puisque la fonction $(\ln t)/(1-t^2)$ est négative sur $]0,+\infty[-\{1\}$

c) convergente mais non absolument convergente puisque la fonction $(\ln t)/(1-t^2)$ n'est pas positive sur $]0,1[$

d) absolument convergente car f est continue, positive sur $]0,+\infty[$ et équivalente à $-\ln t$ au voisinage de 0, mais l'intégrale généralisée $\displaystyle\int_0^{+\infty} f(t)\, dt$ est divergente

On considère, si elle existe, une fonction G définie et continue sur le segment $[0,1]$, dont la restriction à l'intervalle ouvert $]0,1[$ est égale à $(t\ln t)/(t^2-1)$

Question 19. On établit

a) l'existence d'au moins deux fonctions vérifiant ces conditions

b) l'existence d'une unique fonction G vérifiant $G(0)=0$ et $G(1)=-1/2$

c) l'existence d'une unique fonction G vérifiant $G(0)=0$ et $G(1)=1/2$

d) qu'il n'existe aucune fonction G vérifiant ces conditions car $\lim_{x\to 0} G(x)=+\infty$

Question 20. La fonction f vérifie

a) $f(x)=\displaystyle\int_0^x (\ln t)/(t^2-1)\,dt$ pour tout x réel strictement positif

b) $f(1)=\displaystyle\sum_{p=0}^{n}\int_0^1 t^{2p}\ln t\,dt - \int_0^1 t^{2n+1}\,G(t)\,dt$ pour tout n entier naturel

c) $f(1)=-\displaystyle\sum_{p=0}^{n}\int_0^1 t^{2p}\ln t\,dt + \int_0^1 t^{2n}\,G(t)\,dt$ pour tout n entier naturel

d) $f(1)=-\displaystyle\sum_{p=0}^{n-1}\int_0^1 t^{2p}\ln t\,dt + \int_0^1 t^{2n-1}\,G(t)\,dt$ pour tout n entier strictement positif

Question 21. Pour tout n entier naturel, on pose $S_n=\displaystyle\sum_{p=0}^{n} 1/(2p+1)^2$. On a

a) $S_n=f(1)-\displaystyle\int_0^1 t^{2n}\,G(t)\,dt$

b) $S_n=f(1)-\displaystyle\int_0^1 t^{2n-1}\,G(t)\,dt$ pour tout n entier strictement positif

c) $S_n=-f(1)+\displaystyle\int_0^1 t^{2n+1}\,G(t)\,dt$

d) $S_n=-f(1)-\displaystyle\int_0^1 t^{2n+1}\,G(t)\,dt$

Question 22. n désigne un entier naturel, O est la notation de Landau et $| \; |$ représente la valeur absolue. La série de terme général $u_p = 1/(2p+1)^2$, pour p entier positif ou nul,

a) est convergente car u_p est équivalent à $1/p^2$ terme général d'une série de Riemann convergente
b) est convergente car une condition suffisante de convergence d'une série est la convergence vers 0 de son terme général
c) est convergente car $u_p = O(1/p^2)$ et que la série de terme général $1/p^2$ est une série à termes positifs convergente
d) a pour somme $f(1) = \pi^2/8$ car $\left| \int_0^1 t^{2n+1} \, G(t) \; dt \right| \leq M/(2n+2)$ où M est une constante positive

Question 23. O et o représentent les notations de Landau. La série de terme général $v_n = 1/(n(n+1)(2n+1)^2)$, pour n entier strictement positif

a) est convergente car $v_n = O(1/n^4)$
b) est convergente car $v_n = o(1/n^4)$
c) est convergente car $v_n = (1/(n(n+1))) - (4/(2n+1)^2)$, somme de deux termes généraux de séries convergentes
d) a pour somme $10 - \pi^2$

PARTIE II

On désignera par E l'espace vectoriel réel IR[X], des polynômes à une indéterminée à coefficients réels, et par F l'ensemble des polynômes de E de degré inférieur ou égal à 3. On considère l'application f qui à tout élément P de E associe le polynôme f(P) de IR[X], défini par $f(P)(X) = P(X) - P(X-1)$. On notera f_F la restriction de f à F.

Question 24. L'ensemble F

a) est un sous-anneau de l'anneau IR[X]
b) ne peut être un anneau car IR[X] n'est pas un anneau
c) est un groupe pour la multiplication des polynômes
d) est un anneau sur le corps des réels

Question 25. L'ensemble F

a) n'est pas un sous-espace vectoriel de E car F n'est pas un groupe commutatif pour l'addition des polynômes
b) est un sous-espace vectoriel de E sur le corps des réels de dimension 3
c) est un sous-espace vectoriel de E sur le corps des complexes de dimension 4
d) est un sous-espace vectoriel de E sur le corps des réels de dimension 4

Question 26. On a

a) f est une application linéaire de E dans F
b) f_F est une application linéaire de F dans E
c) f_F est un endomorphisme de F
d) f_F n'est pas un endomorphisme de F

Question 27. La matrice A de l'application f_F par rapport aux bases canoniques des espaces de départ et d'arrivée de cette application s'écrit

a) $A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & 2 & -3 \\ 0 & 0 & 0 & 3 \end{pmatrix}$

b) $A = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 \\ 0 & 2 & -3 \\ 0 & 0 & 3 \end{pmatrix}$

c) $A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & 2 & -3 \\ 0 & 0 & 0 & 3 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$

d) $A = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ -1 & 2 & 0 & 0 \\ 1 & -3 & 3 & 0 \end{pmatrix}$

Question 28. Pour des matrices de type (n,p), c'est-à-dire à n lignes et p colonnes, à coefficients dans K où K est le corps des réels ou des complexes

a) deux matrices quelconques sont semblables
b) deux matrices semblables ont même rang
c) le rang d'une matrice de type (n,p) à coefficients dans K est inchangé si l'on ajoute à la colonne j_0 de la matrice la colonne j_1 multipliée par un scalaire λ de K
d) le rang d'une matrice de type (n,p) à coefficients dans K peut être modifié si l'on ajoute à la colonne j_0 de la matrice la colonne j_1 multipliée par un scalaire λ de K

Question 29. Le rang de l'application f_F, noté rg f_F,

a) est nécessairement inférieur ou égal à 3 car l'espace F est de dimension 3
b) est égal à 2 car la matrice A possède deux colonnes linéairement indépendantes
c) vaut 3 car le rang d'une matrice est, par définition, égal au nombre de colonnes non nulles de la matrice considérée
d) est égal à 3 car on peut extraire au plus 3 lignes linéairement indépendantes

Question 30. Les sous-espaces vectoriels image et noyau de l'application f_F, notés respectivement $\mathrm{Im}\, f_F$ et $\mathrm{Ker}\, f_F$, sont tels que

a) $F = \mathrm{Ker}\, f_F \oplus \mathrm{Im}\, f_F$
b) $\dim \mathrm{Ker}\, f_F = \dim F - \mathrm{rg}\, f_F = 2$
c) $\mathrm{Im}\, f_F$ est le sous-espace $\mathbb{R}_2[X]$ des polynômes à coefficients réels de degré inférieur ou égal à 2
d) la famille (X, X^2) de polynômes de E forme une base de $\mathrm{Im}\, f_F$

Question 31. L'application f_F

a) n'est pas diagonalisable car f_F n'est pas un endomorphisme
b) n'est pas diagonalisable car 0 est valeur propre d'ordre 4 et le sous-espace propre E_0 associé à 0 est de dimension $\dim E_0 = \dim \mathrm{Ker}\, f_F = 1$
c) n'est pas diagonalisable car ses valeurs propres ne sont pas toutes distinctes
d) est diagonalisable mais n'est pas bijective car 0 est valeur propre de A

Question 32. On rappelle qu'un élément a d'un anneau est dit nilpotent d'ordre k si a^k est nul et a^{k-1} est différent de 0. La matrice A

a) est nilpotente d'ordre au plus égal à l'ordre 4 de cette matrice
b) est nilpotente d'ordre strictement supérieur à 4
c) n'est pas nilpotente
d) est nilpotente d'ordre 3

On considère la famille (B_0, B_1, B_2, B_3) de polynômes de E définis par $B_0 = 1$ et pour tout i entier compris entre 1 et 3 $f_F(B_i) = i\, B_{i-1}$ et B_i admet 0 comme racine

Question 33. Ces polynômes vérifient

a) pour tout entier i compris entre 0 et 3 B_i est un polynôme de degré compris entre 1 et 3
b) la famille (B_0, B_1, B_2, B_3) forme une base de F car c'est une famille libre constituée de quatre vecteurs de l'espace F de dimension 4
c) pour tout entier i compris entre 0 et 3 B_i est divisible par le polynôme X
d) la famille (B_0, B_1, B_2, B_3) ne peut être une base de F car $\dim F = 3$

On note $\mathcal{a}$, si elle existe, la base de F formée à l'aide des polynômes B_0,B_1,B_2,B_3 classés par ordre croissant de degré.

Question 34. La matrice de passage Q de la base canonique de F à la base $\mathcal{a}$

a) n'existe pas

b) s'écrit $Q=\begin{pmatrix}1 & 0 & 0\\ 0 & 1 & 1\\ 0 & 0 & 1\end{pmatrix}$

c) s'écrit $Q=\begin{pmatrix}1 & 0 & 0 & 0\\ 0 & 1 & 1 & 2\\ 0 & 0 & 1 & 3\\ 0 & 0 & 0 & 1\end{pmatrix}$

d) s'écrit $Q=\begin{pmatrix}1 & 0 & 0 & 0\\ 0 & 1 & 0 & 0\\ 0 & 1 & 1 & 0\\ 0 & 2 & 3 & 1\end{pmatrix}$

Question 35. La matrice A' de l'application f_F lorsque l'on rapporte l'espace F à la base $\mathcal{a}$

a) n'est pas définie car on ne peut pas former de base de F à l'aide des polynômes B_0,B_1,B_2,B_3

b) vérifie la relation $A' = Q^{-1}A\,Q=\begin{pmatrix}0 & 0 & 0 & 0\\ 1 & 0 & 0 & 0\\ 0 & 2 & 0 & 0\\ 0 & 0 & 3 & 0\end{pmatrix}$

c) vérifie la relation $A' = Q\,A\,Q^{-1}=\begin{pmatrix}0 & 1 & 0 & 0\\ 0 & 0 & 2 & 0\\ 0 & 0 & 0 & 3\\ 0 & 0 & 0 & 0\end{pmatrix}$

d) s'écrit $A'=\begin{pmatrix}1 & 0 & 0\\ 0 & 2 & 0\\ 0 & 0 & 3\end{pmatrix}$

Question 36. Soit g l'application qui, pour tout entier i compris entre 0 et 3, associe au polynôme X^i le polynôme B_i. On note G la matrice de g par rapport à la base canonique de F. On a alors

a) g est un endomorphisme de F injectif mais non bijectif
b) g est un endomorphisme bijectif de F car cette application transforme une base de F en une base de F
c) $G = Q^{-1}$
d) $G = Q$

PARTIE III

On considère la fonction f de la réelle à valeurs réelles, 2-périodique, nulle sur l'intervalle [1,2] et coïncidant sur l'intervalle]0,1[avec la fonction $\cos(\pi x)$.

Question 37. la fonction f est

a) continue et de classe C^1 par morceaux sur IR
b) de classe C^1 sur IR
c) paire car la fonction cos l'est
d) dérivable sur IR mais de dérivée discontinue aux points $x_k = k$ avec k entier relatif

Question 38. Le développement en série de Fourier trigonométrique de f s'écrit

a) $\sum_{n=1}^{+\infty} [-((n \sin n \cos(nx))/(n^2-\pi^2)) + ((n\cos(n+1))\sin(nx)/(n^2-\pi^2))]$

b) $((\cos(\pi x))/2) + (2/\pi)\sum_{n=1}^{+\infty} [(n\sin(2nx))/(4n^2-1)]$

c) $(\cos(\pi x)) + (4/\pi)\sum_{n=1}^{+\infty} [(n\sin(2n\pi x))/(4n^2-1)]$

d) $\cos(\pi x)$

Question 39. Cette série a pour somme S_f

a) $S_f(x) = f(x) \quad \forall x \in \mathbb{R}$

b) $S_f(x) = \cos(\pi x) \quad \forall x \in [0, 2]$

c) $S_f(x) = \begin{cases} f(x) & \forall x \in \mathbb{R} - \mathbb{Z} \\ \dfrac{1}{2} & \text{si} \quad x \in \mathbb{Z} \end{cases}$

d) $S_f(x) = \begin{cases} \cos(\pi x) & \text{si} \quad x \in \ ]2k, 2k+1[\\ 0 & \text{si} \quad x \in \ ]2k+1, 2k+2[\\ \dfrac{1}{2} & \text{si} \quad x = 2k \quad \text{et} \quad x = 2k+2 \\ -\dfrac{1}{2} & \text{si} \quad x = 2k+1 \end{cases} \qquad \forall k \in \mathbb{N}$

Question 40. La formule de Parseval appliquée à cette fonction donne

a) $\dfrac{1}{2} \displaystyle\int_0^2 f^2(x)dx = \left(\frac{1}{2}\right)^2 + \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{16n^2}{(16n^4 - 8n^2 + 1)\pi^2}$

b) $\displaystyle\int_0^2 f^2(x)dx = \frac{1}{4} + \frac{4}{\pi^2} \sum_{k=1}^{+\infty} \frac{k^2}{(4k^2-1)^2}$

c) $\displaystyle\int_0^2 f^2(x)dx = \frac{\cos^2(\pi x)}{4} + \frac{16}{\pi^2} \sum_{k=1}^{+\infty} \frac{k^2 \sin^2(2kx)}{(4k^2-1)^2}$

et la série numérique $\displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{n^2}{(4n^2-1)^2}$ a pour somme

d) $\dfrac{\pi^2}{16} \left\{ \displaystyle\int_0^1 \frac{1 + \cos(2\pi x)}{2} \, dx - \frac{1}{4} \right\}$