FORMES LINÉAIRES

Dans tout le chapitre, $\mathbb{K}$ désigne $\mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$.

I. Formes linéaires et hyperplans

Déf 1:

Soit E un $\mathbb{K}$-espace vectoriel. On appelle hyperplan de E tout sous-espace vectoriel H de E qui admet une droite vectorielle pour supplémentaire.
(*Rem : Si E est de dimension finie $n \in \mathbb{N}^*$, cela équivaut à : $\dim(H) = n - 1$.*)

Prop 1:

Si H est un hyperplan de E, alors, pour tout vecteur $a \notin H$, on a : $E = H \oplus \mathbb{K}a$.

Démonstration:

H est un hyperplan donc, par définition, il existe $b \in E \setminus \{0\}$ tel que $E = H \oplus \mathbb{K}b$.
Soit $a \notin H$. Alors $H \cap \mathbb{K}a = \{0\}$ car $\lambda a \notin H$ sauf si $\lambda = 0$.
Il reste à montrer $E = H + \mathbb{K}a$. Soit $x \in E$. Il existe $h \in H$ et $\lambda \in \mathbb{K}$ tels que $x = h + \lambda b$. Et il existe aussi $h' \in H$ et $\mu \in \mathbb{K}$ tels que $a = h' + \mu b$. μ ne peut pas être nul car $a \notin H$. On a donc $b = \frac{1}{\mu}(a - h')$ puis $x = h + \frac{\lambda}{\mu}(a - h') = \underbrace{h - \frac{\lambda}{\mu}h'}_{\in H} + \underbrace{\frac{\lambda}{\mu}a}_{\in \mathbb{K}a} \in H + \mathbb{K}a$.

Rem : dans le cas où E est de dimension finie, on peut conclure directement en utilisant les deux propriétés : $H \cap \mathbb{K}a = \{0\}$ et $\dim E = \dim H + \dim(\mathbb{K}a)$.

Déf 2:

Soit E un $\mathbb{K}$-espace vectoriel. On appelle forme linéaire sur E une application linéaire de E dans le corps de base $\mathbb{K}$.
L'espace vectoriel $\mathscr{L}(E, \mathbb{K})$ des formes linéaires sur E s'appelle l'espace vectoriel dual de E, et est noté $E^\star$.

Rem: Si E est de dimension finie, on a : $\dim E = \dim E^\star$ (car $\dim \mathscr{L}(E, \mathbb{K}) = \dim E \times \dim \mathbb{K}$).

Exemples de référence

1. Soit D un ensemble non vide et $x_0 \in D$. L'application $\varphi \colon f \mapsto f(x_0)$ est une forme linéaire sur le $\mathbb{K}$-espace vectoriel $\mathcal{A}(D, \mathbb{K})$ (appelée *évaluation en un point*).

2. Soit $[a\,;b]$ un intervalle de $\mathbb{R}$. L'application $\varphi : f \mapsto \int_a^b f$ est une forme linéaire sur le $\mathbb{C}$-espace vectoriel $\mathscr{C}([a\,;b], \mathbb{C})$ des fonctions continues sur $[a\,;b]$ à valeurs dans $\mathbb{C}$.

3. Soit E un espace vectoriel de dimension finie n, rapporté à une base $\mathscr{B} = (e_1, \ldots, e_n)$.
On peut alors considérer les n applications de E dans $\mathbb{K}$, e_i^* pour $i \in [\![1\,;n]\!]$, définies par :

$$\forall\, x = \sum_{i=1}^{n} x_i e_i \in E,\ e_i^*(x) = x_i\,.$$

Alors les e_i^* sont des formes linéaires sur E, appelées formes linéaires coordonnées dans la base $\mathscr{B}$.
Il est alors facile de vérifier que la famille $\left\{e_i^*,\ 1 \leqslant i \leqslant n\right\}$ est libre ; puisque le cardinal de cette famille est $n = \dim E = \dim E^\star$, cette famille forme une base de $E^\star$, appelée base duale de $\mathscr{B}$.

Démonstration:

En effet, si $(\lambda_i)_{1 \leqslant i \leqslant n}$ est une famille de scalaires telle que $\sum_{i=1}^{n} \lambda_i e_i^* = 0_{E^\star}$ alors

$$\forall\, x \in E, \sum_{i=1}^{n} \lambda_i e_i^*(x) = 0$$

et en appliquant cette relation aux vecteurs e_j pour $j \in [\![1\,;n]\!]$, puisque $e_i^*(e_j) = \delta_{i,j}$, on obtient $\lambda_j = 0$.

Théorème 1:

1. Un sous-espace vectoriel H de E est un hyperplan si et seulement si il existe une forme linéaire $\varphi \in E^\star$, non nulle, telle que : $H = \operatorname{Ker}\varphi$.
2. Si φ et ψ sont deux formes linéaires non nulles sur E telles que $\operatorname{Ker}\varphi = \operatorname{Ker}\psi$, alors il existe $\lambda \in \mathbb{K}$ tel que $\psi = \lambda\varphi$.

Démonstration:

1. – Soit H un hyperplan de E ; par définition, il existe $a \neq 0$ tel que $E = H \oplus \mathbb{K}a$. Il existe alors une forme linéaire φ sur E telle que $\begin{cases} \varphi(h) = 0 & \text{si } h \in H \\ \varphi(\lambda a) = \lambda & \text{pour tout } \lambda \in \mathbb{K} \end{cases}$ (en effet, une application linéaire est entièrement déterminée par ses restrictions à deux sous-espaces vectoriels supplémentaires).
   Soit $x \in E$; il existe $h \in H$ et $\lambda \in \mathbb{K}$ tels que $x = h + \lambda a$.
   On a alors : $\varphi(x) = 0 \iff \varphi(h) + \lambda = 0 \iff \lambda = 0 \iff x \in H$, de sorte que l'on a bien $\operatorname{Ker}\varphi = H$.
   – Réciproquement, soit φ une forme linéaire non nulle, et $H = \operatorname{Ker}\varphi$. φ étant non nulle, il existe $b \in E$ tel que $\varphi(b) \neq 0$, puis en posant $a = \frac{1}{\varphi(b)}b$, on a $\varphi(a) = 1$. Montrons alors que $E = H \oplus \mathbb{K}a$, ce qui prouvera que H est un hyperplan.
     – Si $x \in H \cap \mathbb{K}a$, $x \in H$ et il existe $\lambda \in \mathbb{K}$ tel que $x = \lambda a$. Donc $0 = \varphi(x) = \lambda\varphi(a) = \lambda$, d'où $x = 0$: $H \cap \mathbb{K}a = \{0\}$.
     – Si $x \in E$, on a $x = \underbrace{x - \varphi(x)a}_{=h} + \underbrace{\varphi(x)a}_{\in \mathbb{K}a}$ avec $h \in H$ puisque $\varphi(x - \varphi(x)a) = \varphi(x) - \varphi(x)\varphi(a) = 0$.

     Ainsi, $E = H + \mathbb{K}a$, ce qui achève cette démonstration.
2. Soient φ et ψ deux formes linéaires non nulles telles que $\operatorname{Ker}\psi = \operatorname{Ker}\varphi$. Notons $H = \operatorname{Ker}\varphi$. D'après ce qui précède, H est un hyperplan, donc il existe $a \in E \setminus \{0\}$ tel que $E = H \oplus \mathbb{K}a$. Posons $\lambda = \dfrac{\psi(a)}{\varphi(a)}$, ce qui est possible puisque $a \notin H$ donc $\varphi(a) \neq 0$. On a alors $\psi(x) = \lambda\varphi(x)$ pour tout $x \in H$ et tout $x \in \mathbb{K}a$, donc pour tout $x \in E$. Cela prouve que $\psi = \lambda\varphi$.

II. Équations d'un hyperplan

Déf 3:

Si H est un hyperplan de E et si $\varphi \in E^\star$ (non nulle) est telle que $H = \operatorname{Ker}\varphi = \{x \in E \mid \varphi(x) = 0\}$, l'équation $\varphi(x) = 0$ s'appelle une équation de l'hyperplan H.

Dans toute la suite, E désigne un $\mathbb{K}$-espace vectoriel de dimension finie $n \in \mathbb{N}^*$.

Soit $\mathscr{B} = (e_1, \dots, e_n)$ une base de E.
On sait que toute forme linéaire φ sur E est entièrement caractérisée par la donnée des images des vecteurs d'une base, donc ici les scalaires $a_i = \varphi(e_i)$.
Si x est un vecteur de E de coordonnées $(x_1, \dots, x_n)$ dans la base $\mathscr{B}$, on a alors :

$$\varphi(x) = \varphi\left(\sum_{i=1}^{n} x_i e_i\right) = \sum_{i=1}^{n} x_i \varphi(e_i) = \sum_{i=1}^{n} a_i x_i .$$

Cette expression de $\varphi(x)$ en fonction des coordonnées de x s'appelle l'expression analytique de φ dans la base $\mathscr{B}$.

Remarques

1. L'égalité $\varphi(x) = \sum\limits_{i=1}^{n} a_i x_i$ peut aussi s'écrire $\varphi(x) = \sum\limits_{i=1}^{n} a_i e_i^*(x)$, où (e_i^*) désigne la base duale de $\mathscr{B}$.
   Ainsi, $\varphi = \sum\limits_{i=1}^{n} a_i e_i^*$, et les a_i sont les coordonnées de φ dans la base duale.
2. Réciproquement, il est facile de vérifier que toute application de ce type est bien une forme linéaire sur E, puisque, d'après le calcul ci-dessus, il s'agit d'une combinaison linéaire des e_i^*.
   On a donc obtenu ainsi *l'expression générale d'une forme linéaire sur un espace vectoriel de dimension finie* dans une base donnée.

Conséquence :

Si H est un hyperplan de E, et si $H = \operatorname{Ker}\varphi$ où φ est une forme linéaire non nulle sur E, H est l'ensemble des vecteurs x de coordonnées $(x_1,\dots,x_n)$ tels que $\sum_{i=1}^{n} a_i x_i = 0$ (où les a_i sont des scalaires non tous nuls, ce sont les images des vecteurs de $\mathscr{B}$ par φ).

L'équation $\sum_{i=1}^{n} a_i x_i = 0$ s'appelle alors une équation de H dans la base $\mathscr{B}$.

Prop 2:

Soient H et H' deux hyperplans de E, d'équations respectives dans $\mathscr{B}$: $\sum_{i=1}^{n} a_i x_i = 0$ et $\sum_{i=1}^{n} b_i x_i = 0$.

Alors $H' = H$ si et seulement si il existe un scalaire λ tel que pour tout $i \in [\![1\,;n]\!]$ on ait $b_i = \lambda a_i$.

Démonstration:

C'est une conséquence directe du théorème 1 : en effet, si l'équation de H (resp. H') s'écrit $\varphi(x) = 0$ (resp. $\psi(x) = 0$), ce théorème dit que : $H = H' \iff \exists \lambda \in \mathbb{K}$ tq $\psi = \lambda\varphi$, et la relation $\psi = \lambda\varphi$ équivaut à $\psi(e_i) = \lambda\varphi(e_i)$ pour tout i, c'est-à-dire à $b_i = \lambda a_i$.

Exemples

1. Dans $\mathbb{R}^2$ rapporté à sa base canonique (e_1,e_2), l'ensemble des couples (x,y) qui vérifient une équation de la forme $ax+by=0$ avec $(a,b) \neq (0,0)$ est une droite : c'est le noyau de la forme linéaire non nulle φ telle que $\varphi(e_1) = a$ et $\varphi(e_2) = b$.
   Un vecteur de base de cette droite est le vecteur $(-b,a)$.
   Si $a'x+b'y=0$ est une autre équation de cette droite, alors il existe $\lambda \in \mathbb{R}$ tel que : $a' = \lambda a$ et $b' = \lambda b$.
2. Dans $\mathbb{R}^3$ rapporté à sa base canonique (e_1,e_2,e_3), l'ensemble des triplets (x,y,z) qui vérifient une équation de la forme $ax+by+cz=0$ avec $(a,b,c) \neq (0,0,0)$ est un plan (c'est le noyau de la forme linéaire φ telle que $\varphi(e_1) = a$, $\varphi(e_2) = b$, $\varphi(e_3) = c$).
   Si $a'x+b'y+c'z=0$ est une autre équation de ce plan, alors il existe $\lambda \in \mathbb{R}$ tel que : $a' = \lambda a$, $b' = \lambda b$ et $c' = \lambda c$.

Rem: Ces résultats concernant l'équation d'un hyperplan, et plus particulièrement d'un plan en dimension 3, sont importants à retenir, et il faut penser à les utiliser car ils simplifient grandement certaines démonstrations.

Exercice Dans $\mathbb{R}^3$, écrire une équation du plan P engendré par les vecteurs $u = (1,-1,1)$ et $v = (1,2,3)$.

Solution:

Notons d'abord que $\operatorname{Vect}(u,v)$ est bien un plan, les vecteurs u et v étant linéairement indépendants.

1. *1ère solution :* Puisque l'on **sait** qu'une équation de P est de la forme $ax+by+cz=0$, il suffit de déterminer a,b et c (à une constante multiplicative près) tels que u et v vérifient cette équation c'est-à-dire
$$\begin{cases} a-b+c=0 \\ a+2b+3c=0 \end{cases}$$
2. *2ème solution :* On peut écrire qu'un vecteur $w = (x,y,z)$ appartient à P si et seulement si il existe des réels λ et μ tels que $w = \lambda u + \mu v$ ce qui se traduit par
$$\begin{cases} x = \lambda + \mu \\ y = -\lambda + 2\mu \\ z = \lambda + 3\mu \end{cases} \qquad \text{(équation paramétrique de } P\text{)}$$
   Il « suffit » alors d'éliminer λ et μ entre ces trois équations pour trouver une relation entre x, y et z.
3. *3ème solution :* Il est plus rapide d'écrire qu'un vecteur $w = (x,y,z)$ appartient à P si et seulement si $\det(u,v,w) = 0$ soit
$$\begin{vmatrix} 1 & 1 & x \\ -1 & 2 & y \\ 1 & 3 & z \end{vmatrix} = 0$$
   ce qui donne après calcul du déterminant (développement selon la dernière colonne) directement une équation du plan : $5x+2y-3z=0$.

III. Équations d'un sous-espace vectoriel

Théorème 2:

Soit E un $\mathbb{K}$-espace vectoriel de dimension finie $n \in \mathbb{N}^*$.
Si $(\varphi_1, \dots, \varphi_p)$ est une famille *libre* de p formes linéaires sur E ($p \in \mathbb{N}^*$), le sous-espace vectoriel

$$F = \bigcap_{i=1}^{p} \operatorname{Ker} \varphi_i = \{x \in E \mid \forall i \in [\![1\,;p]\!]\,, \varphi_i(x) = 0\}$$

est un sous-espace vectoriel de E de dimension $n - p$.
L'ensemble des p équations $\varphi_i(x) = 0$ $(1 \leqslant i \leqslant p)$ s'appelle un système d'équations de F.

Démonstration:

E étant rapporté à une certaine base $\mathscr{B}$, chaque forme linéaire φ_i a une expression analytique de la forme

$$\varphi_i(x) = \sum_{j=1}^{n} a_{i,j} x_j\,.$$

Un vecteur x de coordonnées $(x_1, \dots, x_n)$ appartient à F si et seulement si ses coordonnées sont solutions du système linéaire homogène $AX = 0$ où A est la matrice $(a_{i,j})$, de type (p, n). Cette matrice étant de rang p puisque l'on a supposé les φ_i linéairement indépendantes, l'ensemble des solutions $\operatorname{Ker} A$ est bien un sous-espace vectoriel de dimension $n - p = \dim E - \operatorname{rg} A$ d'après le théorème du rang.

Rem: La même démonstration montre que, si $(\varphi_1, \dots, \varphi_p)$ est une famille de p formes linéaires sur E , *de rang* r, alors $\dim F = n - r$.

Exercice Déterminer une base du sous-espace vectoriel F de $\mathbb{R}^5$ dont un système d'équations est :

$$\begin{cases} x_1 + 3x_2 - 2x_3 + 2x_4 + 3x_5 = 0 \\ x_1 + 4x_2 - 3x_3 + 4x_4 + 2x_5 = 0 \\ 2x_1 + 3x_2 - x_3 - 2x_4 + 9x_5 = 0 \end{cases}$$

Solution:

Tout d'abord, F est bien un sous-espace vectoriel de $\mathbb{R}^5$, comme intersection de 3 hyperplans.
Soit $x = (x_1, \dots, x_5) \in \mathbb{R}^5$. Alors

$$x \in F \iff \begin{cases} x_1 + 3x_2 - 2x_3 + 2x_4 + 3x_5 = 0 \\ x_1 + 4x_2 - 3x_3 + 4x_4 + 2x_5 = 0 \\ 2x_1 + 3x_2 - x_3 - 2x_4 + 9x_5 = 0 \end{cases}$$

$$\underset{\substack{L_2 \leftarrow L_2 - L_1 \\ L_3 \leftarrow L_3 - 2L_1}}{\iff} \begin{cases} x_1 + 3x_2 - 2x_3 + 2x_4 + 3x_5 = 0 \\ x_2 - x_3 + 2x_4 - x_5 = 0 \\ -3x_2 + 3x_3 - 6x_4 + 3x_5 = 0 \end{cases}$$

$$\iff \begin{cases} x_1 = -3x_2 + 2x_3 - 2x_4 - 3x_5 \\ x_2 = x_3 - 2x_4 + x_5 \end{cases} \iff \begin{cases} x_1 = -x_3 + 4x_4 - 6x_5 \\ x_2 = x_3 - 2x_4 + x_5 \end{cases}$$

F est donc l'intersection de 2 hyperplans distincts, c'est un sous-espace vectoriel de dimension $5 - 2 = 3$. C'est aussi l'ensemble des vecteurs de la forme :

$$x = (-x_3 + 4x_4 - 6x_5, x_3 - 2x_4 + x_5, x_3, x_4, x_5)$$

donc il admet pour base la famille formée des 3 vecteurs :

$$(-1, 1, 1, 0, 0) \quad , \quad (4, -2, 0, 1, 0) \quad \text{et} \quad (-6, 1, 0, 0, 1)\,.$$

Le théorème précédent possède une sorte de réciproque.

Théorème 3:

Soient E un $\mathbb{K}$-espace vectoriel de dimension finie $n \in \mathbb{N}^*$ et F un sous-espace vectoriel de E de dimension $p \leqslant n-1$.

Il existe $n-p$ formes linéaires indépendantes $\varphi_1, \dots, \varphi_{n-p}$ telles que

$$F = \bigcap_{i=1}^{n-p} \operatorname{Ker} \varphi_i$$

c'est-à-dire telles que, pour tout $x \in E$:

$$x \in F \iff [\varphi_1(x) = 0,\ \varphi_2(x) = 0,\ \dots,\ \varphi_{n-p}(x) = 0] \quad (S)$$

(S) est un système d'équations de F.

Démonstration:

Soit $(e_1, \dots, e_p)$ une base de F, que l'on complète en une base $\mathscr{B} = (e_1, \dots, e_n)$ de E.

On peut alors considérer la base duale $(e_1^*, \dots, e_n^*)$ de $\mathscr{B}$ dans $E^\star$. Pour tout vecteur $x = \sum\limits_{i=1}^{n} x_i e_i$ on a

$$x \in F \iff x_{p+1} = \cdots = x_n = 0 \iff e_{p+1}^*(x) = \cdots = e_n^*(x) = 0$$

donc les $n-p$ formes linéaires e_i^* pour $p+1 \leqslant i \leqslant n$ conviennent (elles sont bien indépendantes puisque extraites d'une base).

Exercice Dans $\mathbb{R}^5$, écrire un système d'équations du plan P engendré par les vecteurs $u = (1, -1, 1, -1, 0)$ et $v = (0, 1, -1, 1, -1)$.

Solution:

Un vecteur $x = (x_1, \dots, x_5)$ appartient à P si et seulement si il existe des réels λ et μ tels que $x = \lambda u + \mu v$ ce qui se traduit par le système :

$$\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \\ x_5 \end{pmatrix} = \lambda \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 1 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix} + \mu \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ -1 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix} \quad \text{soit :} \quad \begin{cases} x_1 = \lambda \\ x_2 = -\lambda + \mu \\ x_3 = \lambda - \mu \\ x_4 = -\lambda + \mu \\ x_5 = -\mu \end{cases}$$

(c'est une équation paramétrique du plan).

Le principe consiste alors à exprimer λ et μ à l'aide de 2 des équations ci-dessus puis à remplacer dans les autres. Par exemple, si l'on utilise la 1ère et la dernière équation, on obtient comme système d'équations du plan :

$$x_2 = -x_1 - x_5\ ,\ x_3 = -x_2\ ,\ x_4 = x_2\ .$$

Rem : *Les méthodes utilisées dans les exemples et exercices de ce chapitre doivent être absolument sues.*

Il faut savoir :

- reconnaître un hyperplan, et plus généralement, reconnaître un sous-espace vectoriel donné par un système d'équations linéaires ;
- trouver la dimension et une base d'un sous-espace vectoriel si l'on en connaît un système d'équations ;
- trouver un système d'équations d'un sous-espace vectoriel si l'on en connaît une base.

⋆ ⋆ ⋆ ⋆
⋆ ⋆ ⋆
⋆ ⋆
⋆