LIMITES - CONTINUITÉ

I. Limites

I.1. Définitions et premières propriétés

E et F désignent ici deux espaces vectoriels normés sur $\mathbb{K} = \mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$, munis de normes notées respectivement $\| \|_E$ et $\| \|_F$.

Déf 1:

Soit A une partie non vide de E, et f une application de A dans F. Soit $a \in \overline{A}$.
On dit que f admet une limite en a (selon A) si et seulement si il existe $\ell \in F$ tel que :

$$\forall \varepsilon > 0,\ \exists \alpha > 0 \text{ tel que } \forall x \in A,\ \|x - a\|_E < \alpha \Longrightarrow \|f(x) - \ell\|_F < \varepsilon.$$

(*on peut aussi donner cette définition avec des inégalités larges*).

Rem: La définition ci-dessus peut aussi s'écrire

$$\forall \varepsilon > 0,\ \exists \alpha > 0 \text{ tel que } \forall x \in A,\ x \in \mathcal{B}(a, \alpha) \Longrightarrow f(x) \in \mathcal{B}(\ell, \varepsilon)$$

ou encore, puisque toute boule ouverte de centre x est un voisinage de x et que tout voisinage de x contient une boule ouverte de centre x :

$$\forall V \in \mathcal{V}(\ell),\ \exists U \in \mathcal{V}(a) \text{ tq } f(U \cap A) \subset V.$$

L'avantage de cette écriture est qu'elle peut s'adapter aux cas $a = +\infty$ lorsque $E = \mathbb{R}$ et $D = \mathbb{N}$ (cas des suites), $a = \pm\infty$ lorsque $E = \mathbb{R}$ et $\ell = \pm\infty$ lorsque $F = \mathbb{R}$.

Théorème 1:

Si f admet une limite en a selon A, le vecteur ℓ de la définition est unique.

☞ *Démonstration:*

Supposons qu'il existe $\ell_1, \ell_2 \in F$ vérifiant la définition, avec $\ell_1 \neq \ell_2$.
On peut alors trouver $V_1 \in \mathcal{V}(\ell_1)$ et $V_2 \in \mathcal{V}(\ell_2)$ tels que $V_1 \cap V_2 = \varnothing$ (prendre par exemple pour V_1 la boule ouverte de centre ℓ_1 et de rayon $\dfrac{\|\ell_1 - \ell_2\|}{2}$ et pour V_2 la boule ouverte de centre ℓ_2 et de même rayon ; adapter dans le cas $F = \mathbb{R}$ et ℓ_1 ou ℓ_2 égal à $\pm\infty$).
On aurait alors, en appliquant la définition :

$$\exists U_1 \in \mathcal{V}(a) \text{ tq } f(U_1 \cap A) \subset V_1 \quad \text{et} \quad \exists U_2 \in \mathcal{V}(a) \text{ tq } f(U_2 \cap A) \subset V_2$$

Or a appartient à l'adhérence de A, et $U_1 \cap U_2$ est encore un voisinage de a, donc $U_1 \cap U_2 \cap A \neq \varnothing$, et

$$f(\underbrace{U_1 \cap U_2 \cap A}_{\neq \varnothing}) = f((U_1 \cap A) \cap (U_2 \cap A)) \subset f(U_1 \cap A) \cap f(U_2 \cap A) \subset V_1 \cap V_2 = \varnothing$$

d'où la contradiction.

Notation : Dans le cas où *la* limite de f en a selon A existe, on la note

$$\lim_{\substack{x \to a \\ x \in A}} f(x) \quad \text{ou} \quad \lim_{x \to a} f(x) \quad \text{ou} \quad \lim_a f\,.$$

Cas particuliers :

1. Si $a \in A$: si $\lim\limits_{x \to a} f(x)$ existe, ce ne peut être que $f(a)$ (en effet, compte tenu de la définition, on doit avoir $\|f(a) - \ell\| < \varepsilon$ pour tout $\varepsilon > 0$).
2. Si $a \in \overline{A} \setminus A$ (c'est le cas le plus courant), la limite, si elle existe, est notée $\lim\limits_{\substack{x \to a \\ x \neq a}} f(x)$.

   Exemple : Soit $f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ définie par $f(x) = \begin{cases} 0 & \text{si } x \neq 0 \\ 1 & \text{si } x = 0\,. \end{cases}$

   Alors $\lim\limits_{x \to 0} f(x)$ n'existe pas, mais $\lim\limits_{\substack{x \to 0 \\ x \neq 0}} f(x) = 0$.
3. Si $E = \mathbb{R}$ et $a = \pm\infty$:
   Par définition, un voisinage de $+\infty$ (resp $-\infty$) est une partie de $\mathbb{R}$ contenant un intervalle de la forme $]M ; +\infty[$ (resp. $]-\infty ; M[$).

La définition de $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)=\ell$ s'écrit alors, par exemple :

$$\forall\,\varepsilon>0,\ \exists\,M\in\mathbb{R} \text{ tel que } \forall\,x\in A,\ x>M \Longrightarrow \|f(x)-\ell\|_F<\varepsilon.$$

4. Si $F=\mathbb{R}$ et $\ell=\pm\infty$, la définition de $\lim\limits_{x\to a} f(x)=-\infty$ (par exemple) s'écrit :

$$\forall\,M\in\mathbb{R},\ \exists\,\alpha>0 \text{ tel que } \forall\,x\in A,\ \|x-a\|_E<\alpha \Longrightarrow f(x)<M$$

5. Si $E=\mathbb{R}$ et $A=\mathbb{N}$ on retrouve la définition de la limite d'une suite.

Rem: La notion de voisinage étant une notion topologique, l'écriture de la définition de la limite à l'aide des voisinages montre que l'existence de la limite (ainsi que sa valeur éventuelle) sont inchangées si on remplace l'une des normes (dans E ou F) par une norme équivalente.

Prop 1:

Soit A une partie non vide de E, et f une application de A dans F. Soit $a\in\overline{A}$.
Si f admet une limite en a, alors f est bornée sur A au voisinage de a, c'est-à-dire :

$$\exists\,M\in\mathbb{R}_+^*,\ \exists\,U\in\mathcal{V}(a) \text{ tels que } \forall\,x\in U\cap A,\ \|f(x)\|_F\leqslant M.$$

Démonstration:

Si on applique la définition de la limite avec, par exemple, $\varepsilon=1$, on obtient grâce à l'inégalité triangulaire :

$$\exists\,\alpha>0 \text{ tq } \forall\,x\in A,\ \|x-a\|_E<\alpha \Longrightarrow \|f(x)\|_F\leqslant\|\ell\|_F+1$$

ce qui est le résultat voulu avec $U=\mathcal{B}(a,\alpha)$.

Rem: Dans le cas particulier des suites, on retrouve ici le résultat : toute suite convergente est bornée.

Théorème 2: caractérisation séquentielle de la limite

Soit A une partie non vide de E, et f une application de A dans F. Soit $a\in\overline{A}$.
Les propriétés suivantes sont équivalentes :

(i) f admet la limite ℓ en a selon A.

(ii) Pour toute suite $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ d'éléments de A qui converge vers a, la suite $\big(f(a_n)\big)_{n\in\mathbb{N}}$ converge vers ℓ.

Démonstration:

- (i)$\Rightarrow$ (ii) : Supposons $\lim\limits_{x\to a} f(x)=\ell$ et soit $(a_n)\in A^{\mathbb{N}}$ telle que $\lim\limits_{n\to\infty} a_n=a$.
On écrit les deux définitions :
$$\forall\,V\in\mathcal{V}(\ell),\ \exists\,U\in\mathcal{V}(a) \text{ tq } f(U\cap A)\subset V \quad (1)$$
et
$$\forall\,W\in\mathcal{V}(a),\ \exists\,n_0\in\mathbb{N} \text{ tq } n\geqslant n_0\Longrightarrow a_n\in W \quad (2)$$
Soit $V\in\mathcal{V}(\ell)$. On utilise alors (1), puis on applique (2) avec $W=U$. On a alors :
$$\exists\,U\in\mathcal{V}(a),\ \exists\,n_0\in\mathbb{N} \text{ tq } n\geqslant n_0\Longrightarrow a_n\in U \text{ et } f(U\cap A)\subset V$$
Pour $n\geqslant n_0$, on aura donc $a_n\in U\cap A$ (car $a_n\in A$ par hypothèse) donc $f(a_n)\in V$. Finalement, on a obtenu :
$$\forall\,V\in\mathcal{V}(\ell),\ \exists\,n_0\in\mathbb{N} \text{ tq } n\geqslant n_0\Longrightarrow f(a_n)\in V$$
ce qui est exactement la définition de $\lim\limits_{n\to\infty} f(a_n)=\ell$.
- (ii)$\Rightarrow$ (i) : Supposons que, pour toute suite $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ d'éléments de A qui converge vers a, la suite $\big(f(a_n)\big)_{n\in\mathbb{N}}$ converge vers ℓ. On raisonne par l'absurde : si f ne convergeait pas vers ℓ lorsque x tend vers a, on aurait :
$$\exists\,V\in\mathcal{V}(\ell) \text{ tq } \forall\,U\in\mathcal{V}(a), \exists\,x\in U\cap A \text{ avec } f(x)\notin V$$
On prend alors pour U une boule ouverte de centre a et de rayon $\frac{1}{n}$ (avec $n\in\mathbb{N}^*$) (adapter dans le cas $E=\mathbb{R}$ et $a=\pm\infty$), on obtient l'existence pour tout $n\in\mathbb{N}^*$ de $a_n\in A$ tel que $\|a_n-a\|<\frac{1}{n}$, et $f(x_n)\notin V$, c'est-à-dire que (a_n) est une suite d'éléments de A qui converge vers a mais $f(a_n)$ ne peut converger vers ℓ : contradiction.

Exercice Montrer que l'application $x\in\mathbb{R}^*\mapsto\sin\frac{1}{x}$ n'a pas de limite en 0.

Solution:

En effet, si cette fonction avait une limite ℓ quand $x\to0$, en considérant la suite de terme général $x_n=\dfrac{1}{(n+1)\pi}$, qui tend bien vers 0, on devrait avoir par caractérisation séquentielle, $\ell=\lim\limits_{n\to+\infty} f(x_n)=0$, et en considérant la suite de terme général $y_n=\dfrac{1}{2n\pi+\frac{\pi}{2}}$, on devrait avoir $\ell=\lim\limits_{n\to+\infty} f(y_n)=1$.

I.2. Opérations sur les limites

Théorème 3:

Soient E et F deux espaces vectoriels normés. Soit A une partie non vide de E, et f et g deux applications de A dans F. Soit enfin $a \in \overline{A}$.

Si $\lim\limits_{x\to a} f(x) = \ell$ et $\lim\limits_{x\to a} g(x) = \ell'$ existent, alors $\lim\limits_{x\to a}(f+g)(x)$ existe et est égale à $\ell + \ell'$.

Démonstration:

Soit (x_n) une suite quelconque d'éléments de A qui tend vers a.
Alors, par caractérisation séquentielle de la limite, on a $\lim\limits_{n\to+\infty} f(x_n) = \ell$ et $\lim\limits_{n\to+\infty} g(x_n) = \ell'$. D'après les opérations sur les limites de suites, on a alors $\lim\limits_{n\to+\infty}(f+g)(x_n) = \ell + \ell'$.

Cela étant vrai pour toute suite $(x_n) \in A^{\mathbb{N}}$ qui tend vers a, le théorème de caractérisation séquentielle de la limite permet de conclure : $\lim\limits_{\substack{x\to a\\ x\in A}}(f+g)(x) = \ell + \ell'$.

Théorème 4:

Soient E et F deux espaces vectoriels normés. Soit A une partie non vide de E, $a \in \overline{A}$, f une application de A dans F et φ une application de A dans $\mathbb{K}$.

Si $\lim\limits_{x\to a} f(x) = \ell \in E$ et $\lim\limits_{x\to a} \varphi(x) = \lambda \in \mathbb{K}$ existent, alors $\lim\limits_{x\to a}(\varphi.f)(x)$ existe et est égale à $\lambda.\ell$.

Démonstration:

On utilise encore la caractérisation séquentielle de la limite.
Pour toute suite (x_n) d'éléments de A qui converge vers a, on a $\lim\limits_{n\to+\infty} \varphi(x_n) = \lambda$ et $\lim\limits_{n\to+\infty} f(x_n) = \ell$, donc d'après les résultats sur les limites de suites, on a $\lim\limits_{n\to+\infty} \varphi(x_n).f(x_n) = \lambda.\ell$, ce qui permet de conclure de la même façon que dans le théorème précédent.

Théorème 5: Composition des limites

Soit E, F, G trois espaces vectoriels normés, $A \subset E$, $B \subset F$, $f : A \longrightarrow F$ et $g : B \longrightarrow G$.
On suppose $f(A) \subset B$, et $\lim\limits_{x\to a} f(x) = b$.

Alors, $b \in \overline{B}$, et si $\lim\limits_{y\to b} g(y) = \ell \in G$, alors $\lim\limits_{x\to a}(g\circ f)(x) = \ell$.

Démonstration:

On utilise là encore la caractérisation séquentielle de la limite : pour toute suite (x_n) d'éléments de A qui converge vers a, la suite de terme général $y_n = f(x_n)$ est une suite d'éléments de B qui converge vers b, ce qui prouve au passage que $b \in \overline{B}$ (caractérisation séquentielle de l'adhérence), donc $\lim\limits_{n\to+\infty} g(y_n) = \ell$ c'est-à-dire $\lim\limits_{n\to+\infty} g\circ f(x_n) = \ell$, ce qui permet de conclure.

Exercices

1. L'application $f : \begin{cases} \mathbb{R}^2 \setminus (0,0) & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ (x,y) & \longmapsto & \dfrac{xy}{x^2+y^2} \end{cases}$ admet-elle une limite en $(0,0)$?

   Solution:

   Si f admettait une limite ℓ en $(0,0)$, on devrait avoir, d'après le théorème précédent : $\forall\, \lambda \in \mathbb{R}$, $\lim\limits_{x\to 0} f(x, \lambda x) = \ell$.

   Mais pour $x \neq 0$, $f(x,\lambda x) = \dfrac{\lambda}{1+\lambda^2}$, qui dépend de λ, contradiction. Il en résulte que f n'admet pas de limite en $(0,0)$.

2. Même question pour l'application $g : \begin{cases} \mathbb{R}^2 \setminus (0,0) & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ (x,y) & \longmapsto & \dfrac{xy}{\sqrt{x^2+y^2}} \end{cases}$.

   Solution:

   En posant $x = r\cos\theta$, $y = r\sin\theta$ avec $r > 0$ pour $(x,y) \neq (0,0)$, on a $f(x,y) = r\sin\theta\cos\theta$ donc $|f(x,y)| \leqslant r$ soit encore $|f(x,y)| \leqslant \|(x,y)\|_2$. Il en résulte que $\lim\limits_{(x,y)\to(0,0)} f(x,y) = 0$.

Dans le cas de fonctions à valeurs dans $\mathbb{K}$, d'autres opérations sont possibles, le produit et le quotient. Le théorème ci-dessous a été vu l'an dernier pour les fonctions définies sur une partie de $\mathbb{R}$, et s'étend sans difficultés aux fonctions définies sur un espace vectoriel normé.

Théorème 6:

Soient f, g définies sur une partie A de E, *à valeurs dans* $\mathbb{K} = \mathbb{R}$ *ou* $\mathbb{C}$, et soit $a \in \overline{A}$.
On suppose que $\lim_{x \to a} f(x) = \ell$ et que $\lim_{x \to a} g(x) = \ell'$. Alors :

1. La fonction produit fg admet en a la limite $\ell\ell'$.
2. Si $\ell' \neq 0$, il existe un voisinage V de a sur lequel g ne s'annule pas, et $\lim_{x \to a} \dfrac{f}{g}(x) = \dfrac{\ell}{\ell'}$.

I.3. Résultats spécifiques aux fonctions à valeurs réelles

Les résultats suivants ont été vus en Sup, mais seulement dans le cas des fonctions définies sur $\mathbb{R}$; ils utilisent la structure d'ordre sur $\mathbb{R}$.

On considère ici des applications définies sur une partie A d'un espace vectoriel normé E à valeurs dans $\mathbb{R}$, et a désigne un point adhérent à A. Les résultats s'étendent sans difficulté au cas où $E = \mathbb{R}$ et où $a = \pm\infty$.

Théorème 7: d'encadrement

Soient f, g, h définies sur $A \subset E$ à valeurs dans $\mathbb{R}$, et $a \in \overline{A}$.
On suppose qu'il existe un voisinage U de a tel que $\forall x \in U \cap A,\ f(x) \leqslant g(x) \leqslant h(x)$.
On suppose également que $\lim_{x \to a} f(x) = \ell$ et que $\lim_{x \to a} h(x) = \ell$.

Alors $\lim_{x \to a} g(x) = \ell$.

☞ *Démonstration:*

On écrit la définition de la limite :

$$\forall \varepsilon > 0,\ \exists V \in \mathcal{V}(a) \text{ tq } x \in V \cap A \Longrightarrow |f(x) - \ell| < \varepsilon \quad \text{et} \quad \exists W \in \mathcal{V}(a) \text{ tq } x \in W \cap A \Longrightarrow |h(x) - \ell| < \varepsilon$$

On a alors, pour tout $x \in U \cap V \cap W \cap A$ (ensemble qui n'est pas vide puisque $U \cap V \cap W$ est un voisinage de a et que $a \in \overline{A}$!) :

$$\ell - \varepsilon < f(x) \leqslant g(x) \leqslant h(x) < \ell + \varepsilon$$

donc, pour $x \in U \cap V \cap W \cap A$, $|g(x) - \ell| < \varepsilon$, ce qui prouve que la limite de g quand x tend vers a existe et est égale à ℓ.

Théorème 8: prolongement des inégalités

Soient f, g définies sur $A \subset E$ à valeurs dans $\mathbb{R}$, et $a \in \overline{A}$.
On suppose qu'il existe un voisinage U de a tel que $\forall x \in U \cap A,\ f(x) \leqslant g(x)$.
On suppose également que $\lim_{x \to a} f(x) = \ell$ et que $\lim_{x \to a} g(x) = \ell'$.

Alors : $\ell \leqslant \ell'$.

☞ *Démonstration:*

On écrit la définition de la limite :

$$\forall \varepsilon > 0,\ \exists V \in \mathcal{V}(a) \text{ tq } x \in V \cap A \Longrightarrow |f(x) - \ell| < \varepsilon \quad \text{et} \quad \exists W \in \mathcal{V}(a) \text{ tq } x \in W \cap A \Longrightarrow |g(x) - \ell'| < \varepsilon$$

On a alors, pour tout $x \in U \cap V \cap W \cap A$ (ensemble qui n'est pas vide puisque $U \cap V \cap W$ est un voisinage de a et que $a \in \overline{A}$!) :

$$\ell - \varepsilon < f(x) \leqslant g(x) < \ell' + \varepsilon$$

Donc $\ell - \varepsilon < \ell' + \varepsilon$ pour tout $\varepsilon > 0$, ce qui implique $\ell \leqslant \ell'$ (procéder par l'absurde : si $\ell > \ell'$, prendre $\varepsilon = \frac{\ell' - \ell}{2}$).

Dans le cas d'une limite infinie, on a le résultat suivant :

Prop 2:

Soient f, g définies sur A à valeurs dans $\mathbb{R}$, et $a \in \overline{A}$.
On suppose qu'il existe un voisinage U de a tel que $\forall x \in U \cap A,\ f(x) \leqslant g(x)$.
On suppose également que $\lim\limits_{x \to a} f(x) = +\infty$.

Alors $\lim\limits_{\substack{x \to a \\ x \in A}} g(x) = +\infty$.

Il y a une « réciproque » partielle **importante** au théorème de prolongement des inégalités :

Prop 3:

Soient f, g définies sur A à valeurs dans $\mathbb{R}$, et $a \in \overline{A}$.
On suppose que $\lim\limits_{x \to a} f(x) = \ell$ et que $\lim\limits_{x \to a} g(x) = \ell'$.
Si $\ell < \ell'$, il existe un voisinage U de a tel que $\forall x \in U \cap A,\ f(x) < g(x)$.

☞ *Démonstration:*

On écrit la définition de la limite :

$$\forall \varepsilon > 0,\ \exists V \in \mathscr{V}(a) \text{ tq } x \in V \cap A \Longrightarrow |f(x) - \ell| < \varepsilon \quad \text{et} \quad \exists W \in \mathscr{V}(a) \text{ tq } x \in W \cap A \Longrightarrow |g(x) - \ell'| < \varepsilon$$

On applique alors cette définition avec $\varepsilon = \dfrac{\ell' - \ell}{2}$ (qui est bien un réel > 0). On a alors, pour tout $x \in V \cap W \cap A$:

$$f(x) < \ell + \varepsilon = \frac{\ell + \ell'}{2} = \ell' - \varepsilon < g(x)$$

ce qui donne le résultat voulu avec $U = V \cap W$ (qui est bien un voisinage de a).

Enfin, pour une fonction numérique de la variable réelle, il n'est pas inutile de rappeler le théorème suivant, que l'on utilisera souvent par la suite :

Théorème 9: de la limite monotone

Soit $f :]a\,;b[\longrightarrow \mathbb{R}$ (avec $-\infty \leqslant a < b \leqslant +\infty$). On suppose f *croissante* sur $]a\,;b[$.

1. **a)** Si f est majorée, $f(x)$ admet une limite finie quand x tend vers b^-, et $\lim\limits_{x \to b^-} f(x) = \sup\limits_{]a;b[} f$.

   b) Si f n'est pas majorée, $\lim\limits_{x \to b^-} f(x) = \sup\limits_{]a;b[} f = +\infty$.

2. **a)** Si f est minorée, $f(x)$ admet une limite finie quand x tend vers a^+, et $\lim\limits_{x \to a^+} f(x) = \inf\limits_{]a;b[} f$.

   b) Si f n'est pas minorée, $\lim\limits_{x \to a^+} f(x) = \inf\limits_{]a;b[} f = -\infty$.

3. En tout point $x_0 \in]a\,;b[$, f admet une limite à droite et une limite à gauche, et $\lim\limits_{x \to x_0^-} f(x) \leqslant f(x_0) \leqslant \lim\limits_{x \to x_0^+} f(x)$.

☞ *Démonstration:*

1. **a)** Si f est majorée, l'ensemble $\{f(x) \mid x \in]a\,;b[\}$ est une partie non vide majorée de $\mathbb{R}$, donc admet une borne supérieure ℓ. Par définition de la borne sup :
$$\forall \varepsilon > 0,\ \exists x_0 \in]a\,;b[,\ \ell - \varepsilon \leqslant f(x_0) \leqslant \ell,$$
et puisque f est croissante on obtient :
$$\forall \varepsilon > 0,\ \exists x_0 \in]a\,;b[,\ x \geqslant x_0 \Longrightarrow \ell - \varepsilon \leqslant f(x) \leqslant \ell \Longrightarrow |f(x) - \ell| \leqslant \varepsilon,$$
ce qui signifie que $\lim\limits_{x \to b^-} f(x) = \ell$.

   b) Si f n'est pas majorée, alors (en écrivant la négation de « f majorée ») on a :
$$\forall M \in \mathbb{R},\ \exists x_0 \in]a\,;b[,\ f(x_0) \geqslant M,$$
et f étant croissante on en déduit :
$$\forall M \in \mathbb{R},\ \exists x_0 \in]a\,;b[,\ x \geqslant x_0 \Longrightarrow f(x) \geqslant M,$$
ce qui est exactement la définition de $\lim\limits_{x \to b^-} f(x) = +\infty$.

2. Idem.
3. En appliquant le résultat du **1.** à f sur l'intervalle $]a\,;x_0[$, puisque f est majorée sur cet intervalle par $f(x_0)$, on obtient l'existence de la limite $\lim\limits_{x \to x_0^-} f(x)$, et $\lim\limits_{x \to x_0^-} f(x) \leqslant f(x_0)$ puisque $f(x) \leqslant f(x_0)$ pour tout $x \in]a\,;x_0[$.
Idem pour la limite à droite.

Remarques

1. On obtient des résultats similaires si on suppose f *décroissante* sur $]a\,;b[$.

   Par exemple : si f est décroissante sur $]a\,;b[$, elle admet une limite à gauche en b si et seulement si elle est minorée et une limite à droite en a si et seulement si elle est majorée.
2. Ce théorème permet de calculer les bornes sup et inf d'une fonction simplement à partir de son tableau de variations.

II. Continuité

II.1. Continuité en un point

Déf 2:

Soient E et F deux espaces vectoriels normés, A une partie non vide de E, f une application de A dans F.

Soit a *appartenant à* A. On dit que f est continue en a si sa limite en a existe (et elle vaut alors nécessairement $f(a)$).

Cela équivaut à : $\lim\limits_{\substack{x\to a\\ x\neq a}} f(x) = f(a)$.

Rem: Dire que f est continue en a peut s'écrire :

$$\forall\,\varepsilon > 0,\ \exists\,\alpha > 0 \text{ tel que } \forall\,x \in A,\ \|x-a\|_E < \alpha \Longrightarrow \|f(x)-f(a)\|_F < \varepsilon$$

ou encore :

$$\forall\,V \in \mathscr{V}(f(a)),\ \exists\,U \in \mathscr{V}(a) \text{ tel que } f(U\cap A) \subset V.$$

Rem: La notion de voisinage étant une notion topologique, l'écriture précédente montre que la notion de continuité est inchangée si on remplace l'une des normes (dans E ou F) par une norme équivalente.

Mais il se peut qu'une fonction soit continue au sens de certaines normes mais pas au sens d'autres normes (voir exemples sur la feuille d'exercices).

Déf 3:

Si f est définie sur $A\setminus\{a\}$ avec $a \in \overline{A}$ et si $\ell = \lim\limits_{\substack{x\to a\\ x\neq a}} f(x)$ existe, on peut définir une application

$$\widehat{f} : \left\{ \begin{array}{ccc} A\cup\{a\} & \longrightarrow & F \\ x & \longmapsto & \begin{cases} f(x) & \text{si } x \neq a \\ \ell & \text{si } x = a \end{cases} \end{array} \right. .$$

$\widehat{f}$ est évidemment continue en a et s'appelle le prolongement par continuité de f en a

Théorème 10: caractérisation séquentielle de la continuité

Soient E et F deux espaces vectoriels normés, A une partie non vide de E, f une application de A dans F, et $a \in A$. Alors

f est continue en a si et seulement si pour toute suite (a_n) d'éléments de A qui converge vers a, la suite $f(a_n)$ converge vers $f(a)$.

Démonstration:

C'est une conséquence directe de la définition de la limite et du théorème 2 page 2 (caractérisation séquentielle de la limite).

Comme conséquences des théorèmes concernant les opérations sur les limites, on obtient directement :

Théorème 11:

1. Soient E et F deux espaces vectoriels normés, A une partie non vide de E, f et g deux applications de A dans F, et $a \in A$.
   Si f et g sont continues en a, alors $f+g$ est continue en a.
2. Soient E et F deux espaces vectoriels normés, A une partie non vide de E, f une application de A dans F, φ une application de A dans $\mathbb{K}$ et $a \in A$.
   Si f et φ sont continues en a, alors l'application $\varphi.f$ est continue en a.
3. Soit E un espace vectoriel normé, A une partie non vide de E, f et g deux applications de A dans $\mathbb{K}$ et $a \in A$.
   Si f et g sont continues en a et si $g(a) \neq 0$, alors $\dfrac{f}{g}$ est continue en a.
4. Soient E, F, G trois espaces vectoriels normés, A une partie de E et B une partie de F.
   Soit $f \in \mathcal{A}(A,F)$ telle que $f(A) \subset B$, et $g \in \mathcal{A}(B,G)$
   Si f est continue en $a \in A$ et si g est continue en $f(a)$, alors $g \circ f$ est continue en a.

II.2. Continuité globale

Déf 4:

Soient E et F deux espaces vectoriels normés, A une partie non vide de E, f une application de A dans F.
On dira que <u>f est continue sur A</u> si elle est continue en tout point $a \in A$.
L'ensemble des applications continues sur A et à valeurs dans F se note $\mathscr{C}(A,F)$.

En utilisant les théorèmes concernant les opérations sur les limites, on obtient directement le résultat suivant :

Théorème 12:

$\mathscr{C}(A,F)$ est un sous-espace vectoriel de $\mathcal{A}(A,F)$.

Un cas particulier important d'applications continues sur une partie est le suivant :

Déf 5:

Soient E et F deux espaces vectoriels normés, A une partie non vide de E, f une application de A dans F.
On dit que <u>f est lipschitzienne sur A</u> s'il existe un réel $k \geqslant 0$ tel que :

$$\forall (x,y) \in A^2 \,,\; \|f(x)-f(y)\|_F \leqslant k\,\|x-y\|_E \;.$$

On dit alors que f est k-lipschitzienne (k n'est pas unique !)

Remarques

1. Si l'on remplace l'une des normes par une norme équivalente, le fait que f est lipschitzienne est inchangé, mais le rapport k est modifié.
2. Lorsque $E = \mathbb{R}$ et f de classe $\mathscr{C}^1$, pour que f soit k-lipschitzienne sur A il faut et il suffit que f' soit bornée sur A, en vertu de l'inégalité des accroissements finis.

Prop 4:

Avec les mêmes notations, si f est lipschitzienne sur A, alors f est continue sur A.

☞ *Démonstration:*

Immédiat car, compte tenu de l'inégalité $\|f(x)-f(y)\|_F \leqslant k\,\|x-y\|_E$ on a $\lim\limits_{y\to x} f(y) = f(x)$.

Rem: Il existe cependant des applications continues et non lipschitziennes, comme le montre l'exemple de la fonction $x \mapsto \sqrt{x}$ sur $\mathbb{R}_+$.

Corollaire 4.1: *cas particulier important*

L'application « norme » $\begin{array}{ccc} E & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ x & \longmapsto & \|x\|_E \end{array}$ est continue.

Démonstration:

En effet, en vertu de l'inégalité triangulaire :

$$\forall (x,y) \in E^2, \left| \|x\| - \|y\| \right| \leqslant \|x-y\| \ ,$$

elle est donc lipschitzienne de rapport 1.

Théorème 13:

Soient E et F deux espaces vectoriels normés, et f une application *continue* de E dans F. Alors :

a) l'image réciproque par f de tout ouvert de F est un ouvert de E.

b) l'image réciproque par f de tout fermé de F est un fermé de E.

Démonstration:

- **a)** $\Longleftrightarrow$ **b)** car, si B est une partie de F, $f^{-1}(F \setminus B) = E \setminus f^{-1}(B)$; en effet :

$$x \in f^{-1}(F \setminus B) \Longleftrightarrow f(x) \in F \setminus B \Longleftrightarrow f(x) \notin B \Longleftrightarrow x \notin f^{-1}(B) \Longleftrightarrow x \in E \setminus f^{-1}(B).$$

- Démontrons **b)** : supposons donc f continue sur E, soit B un fermé de F, et $A = f^{-1}(B)$.
  - Si $A = \emptyset$, A est bien un fermé !
  - Sinon, pour prouver que A est fermé, on utilise la caractérisation séquentielle.
    Soit (a_n) une suite d'éléments de $A = f^{-1}(B)$ qui converge vers $a \in E$. Alors la suite de terme général $b_n = f(a_n)$ est une suite d'éléments de B, et elle converge vers $f(a)$ puisque f est continue.
    B étant un fermé, on a $f(a) \in B$ (caractérisation séquentielle), donc finalement $a \in f^{-1}(B) = A$, cqfd.

Exemples

1. Soit : $\mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$, continue. Alors (par exemple) :

$$\{x \in \mathbb{R} \mid f(x) > 0\} \text{ est un ouvert de } \mathbb{R}.$$
$$\{x \in \mathbb{R} \mid f(x) \geqslant 0\} \text{ est un fermé de } \mathbb{R}.$$
$$\{x \in \mathbb{R} \mid f(x) = 0\} \text{ est un fermé de } \mathbb{R}.$$

Démonstration:

En effet, le premier de ces ensembles est l'image réciproque, par l'application continue f, de l'intervalle $]0;+\infty[$ qui est un ouvert de $\mathbb{R}$, le second celle de l'intervalle $[0;+\infty[$, qui est un fermé de $\mathbb{R}$ et le troisième celle du singleton $\{0\}$ qui est un fermé de $\mathbb{R}$.

2. Soient $f, g : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$, continues. Alors (par exemple) :

$$\{x \in \mathbb{R} \mid f(x) < g(x)\} \text{ est un ouvert de } \mathbb{R}.$$
$$\{x \in \mathbb{R} \mid f(x) \leqslant g(x)\} \text{ est un fermé de } \mathbb{R}.$$

Démonstration:

En effet, le premier de ces ensembles est l'image réciproque, par l'application continue $f-g$, de l'intervalle $]-\infty;0[$ qui est un ouvert de $\mathbb{R}$, et le second celle de l'intervalle $]-\infty;0]$, qui est un fermé de $\mathbb{R}$.

3. Soit $f \in \mathscr{C}(\mathbb{R},\mathbb{R})$ et soient

$$\Gamma = \left\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \,\middle|\, y = f(x)\right\} \text{ le graphe de } f$$
$$\mathscr{E} = \left\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \,\middle|\, y \geqslant f(x)\right\} \text{ l'épigraphe de } f$$
$$\mathscr{E}' = \left\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \,\middle|\, y > f(x)\right\}$$

Alors Γ et $\mathscr{E}$ sont des parties fermées de $\mathbb{R}^2$ et $\mathscr{E}'$ est une partie ouverte de $\mathbb{R}^2$.

Démonstration:

Considérons $\varphi\colon \begin{array}{ccc} \mathbb{R}^2 & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ (x,y) & \longmapsto & y-f(x)\,. \end{array}$ Puisque les applications coordonnées $(x,y)\mapsto x$ et $(x,y)\mapsto y$ sont continues (voir un peu plus loin, prop. 5), φ est continue sur $\mathbb{R}^2$.
Pour conclure, il suffit alors d'utiliser le th. précédent, en remarquant que :

$$\Gamma=\varphi^{-1}(\{0\}),\quad , \quad \mathscr{E}=\varphi^{-1}([0\,;+\infty[\quad \text{et}\quad \mathscr{E}'=\varphi^{-1}(]0\,;+\infty[\,.$$

4. Dans un espace vectoriel normé E, toute boule fermée $\mathcal{B}_f(a,r)$ est un fermé.

Démonstration:

En effet, l'application $x\mapsto \|a-x\|$ est continue, et $\mathcal{B}_f(a,r)$ est l'image réciproque par cette application de l'intervalle réel fermé $[0\,;r]$.

5. L'ensemble $\mathrm{GL}_n(\mathbb{K})$ des matrices carrées d'ordre n inversibles est un ouvert dans $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$.

Démonstration:

car c'est l'image réciproque de $\mathbb{R}^*$, qui un ouvert de $\mathbb{R}$, par l'application continue $\det$ (la continuité du déterminant sera montrée un peu plus loin).

II.3. Cas de la dimension finie

II.3.1. Formes linéaires coordonnées

Soit E un espace vectoriel normé de dimension finie n, et $\mathscr{B}=(e_1,\ldots,e_n)$ une base de E.
On rappelle que, pour tout $i\in[\![1\,;n]\!]$ on peut considérer la *forme linéaire coordonnée* e_i^* définie par :

$$\text{si } x=\sum_{i=1}^{n}x_ie_i \text{ avec } x_i\in\mathbb{K}, \text{ alors } e_i^*(x)=x_i\,.$$

Prop 5:

Les applications $e_i^*\colon E\longrightarrow\mathbb{K}$ sont continues.

Démonstration:

Puisque toutes les normes dans E de dimension finie sont équivalentes, munissons E de la norme $\|\ \|_\infty$.
Si $x=\sum\limits_{i=1}^{n}x_ie_i$ et $y=\sum\limits_{i=1}^{n}y_ie_i$ sont deux éléments de E, on a alors

$$|e_i^*(x)-e_i^*(y)|=|x_i-y_i|\leqslant\|x-y\|_\infty$$

donc e_i^* est lipschitzienne de rapport 1, donc continue.

Une conséquence importante en est le théorème suivant :

Théorème 14:

Soit E un espace vectoriel normé de dimension finie n, rapporté à une base $\mathscr{B}$.
Si $f\colon A\subset E\to\mathbb{K}$ est une fonction polynomiale en les coordonnées, alors f est continue.

Démonstration:

L'énoncé signifie que f est combinaison linéaire d'applications de la forme :

$$x=\sum_{i=1}^{n}x_ie_i\longmapsto x_{i_1}^{k_1}x_{i_2}^{k_2}\cdots x_{i_p}^{k_p}\quad \text{avec } k_j\in\mathbb{N}^* \text{ et } i_j\in[\![1\,;n]\!]$$

et puisque les applications $x\mapsto x_{i_j}$ sont continues d'après la proposition précédente, le résultat découle de ceux sur les opérations sur les fonctions continues.

Exemple

L'application $\det : \left\{\begin{array}{ccc} \mathcal{M}_n(\mathbb{K}) & \longrightarrow & \mathbb{K} \\ M & \longmapsto & \det M \end{array}\right.$ est continue.
En effet, on a démontré dans un chapitre précédent que le déterminant d'une matrice $M=(m_{ij})$ est une somme de termes de la forme $m_{i_1,1}m_{i_2,2}\cdots m_{i_n,n}$, c'est donc une fonction polynomiale des $m_{i,j}$, qui sont les coordonnées de M dans la base canonique $(E_{i,j})$.

II.3.2. Cas d'une fonction à valeurs dans un espace vectoriel normé de dimension finie

On suppose ici que f est une application définie sur une partie A d'un espace vectoriel normé E, à valeurs dans un espace vectoriel normé F de dimension finie. Soit $\mathscr{B} = (e_1, \dots, e_n)$ une base de F.
Pour tout $x \in A$, $f(x)$ peut s'écrire, dans la base $\mathscr{B}$ sous la forme :

$$f(x) = \sum_{i=1}^{n} f_i(x) e_i$$

Les f_i, définies sur A et à valeurs dans $\mathbb{K}$, s'appellent les applications coordonnées de f. On remarque que l'on a : $f_i = e_i^* \circ f$.

Théorème 15:

Avec les mêmes notations, si $a \in \overline{A}$, pour que f admette une limite $\ell = \sum_{i=1}^{n} \ell_i e_i \in F$ quand x tend vers a , il faut et il suffit que, pour tout $i \in [\![1\,;n]\!]$, f_i admette une limite dans $\mathbb{K}$ quand x tend vers a, et on a alors : $\lim\limits_{x \to a} f_i(x) = \ell_i$.

Démonstration:

- Supposons $\lim\limits_{x\to a} f(x) = \ell$. Pour tout $i \in [\![1\,;n]\!]$, on a $f_i = e_i^* \circ f$, et puisque les e_i^* sont continues, le théorème de composition des limites donne $\lim\limits_{x\to a} f_i(x) = e_i^*(\ell) = \ell_i$.
- Supposons maintenant $\lim\limits_{x\to a} f_i(x) = \ell_i$ pour tout i. Soit $\varepsilon > 0$. Par définition de la limite, on a
$$\exists\, \alpha_i > 0 \text{ tq } \forall x \in A,\ \|x-a\| < \alpha_i \Longrightarrow |f_i(x) - \ell_i| < \varepsilon$$
Si on pose $\alpha = \min\limits_{1\leqslant i\leqslant n} \alpha_i$, on aura, pour tout $x \in A$ tel que $\|x-a\| < \alpha$, $|f_i(x) - \ell_i| < \varepsilon$ pour tout i, donc $\|f(x) - \ell\|_\infty < \varepsilon$, ce qui est exactement la définition de $\lim\limits_{x\to a} f(x) = \ell$.

Compte tenu de la définition de la continuité en un point à l'aide de la limite, il en résulte immédiatement :

Théorème 16:

Avec les mêmes notations :
f est continue en a si et seulement si pour tout $i \in [\![1\,;n]\!]$ f_i est continue en a.

II.3.3. Cas d'une fonction définie sur un espace vectoriel normé de dimension finie

On considère ici des applications définies sur une partie d'un espace vectoriel normé de dimension finie E, à valeurs dans un espace vectoriel normé F. Pour simplifier les notations, on supposera $E = \mathbb{K}^n$ (une base de E étant choisie, cela revient à identifier tout vecteur de E au n-uplet formé par ses coordonnées). Puisque toutes les normes dans un espace vectoriel normé de dimension finie sont équivalentes, on munira E de la norme $\|\ \|_\infty$.
Soit alors $a = (a_1, \dots, a_n) \in E$. Pour tout $i \in [\![1\,;n]\!]$, on notera $\omega_{a,i}$ l'application :

$$\omega_{a,i} : \left\{ \begin{array}{ccc} \mathbb{K} & \longrightarrow & E \\ x & \longmapsto & (a_1, \dots, a_{i-1}, x, a_{i+1}, \dots, a_n) \end{array} \right.$$

Alors les $\omega_{a,i}$ sont continues car :

$$\|\omega_{a,i}(x) - \omega_{a,i}(y)\|_\infty = \|(0, \dots, 0, x-y, 0, \dots, 0)\|_\infty = |x-y|$$

ce qui signifie que $\omega_{a,i}$ est lipschitzienne de rapport 1.
Si maintenant f est une application définie sur une partie A de E, à valeurs dans F, et si $a \in A$, on considérera, pour tout $i \in [\![1\,;n]\!]$, l'application $f_{a,i} = f \circ \omega_{a,i}$, c'est-à-dire

$$f_{a,i} : \left\{ \begin{array}{ccc} A_i \subset \mathbb{K} & \longrightarrow & F \\ x & \longmapsto & f(a_1, \dots, a_{i-1}, x, a_{i+1}, \dots, a_n) \end{array} \right.$$

$f_{a,i}$ s'appelle la i-ème application partielle de f en a.
Les $\omega_{a,i}$ étant continues, on a immédiatement :

Théorème 17:

Si f est continue en a, alors toutes ses applications partielles $f_{a,i}$ sont continues en a_i.

La réciproque de cette propriété est FAUSSE !

Il se peut que toutes les applications partielles de f soient continues en un point, et que f ne soit pas continue en ce point !

Exemple : $f : \left\{ \begin{array}{ccc} \mathbb{R}^2 & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ (x,y) & \longmapsto & \begin{cases} 0 & \text{si } x=y=0 \\ \frac{xy}{x^2+y^2} & \text{sinon} \end{cases} \end{array} \right.$

En effet, les applications partielles en $(0,0)$ sont égales à l'application nulle, donc sont continues, mais f n'a même pas de limite en $(0,0)$!

II.3.4. Théorème des bornes atteintes

Le théorème suivant est admis :

Théorème 18: fondamental

Soit K une partie *fermée* et *bornée* d'un espace vectoriel normé *de dimension finie*, et f une application *continue* sur K, *à valeurs réelles.*

Alors « f est bornée sur K et atteint ses bornes », c'est-à-dire :

$$\exists\, m,\ M \in \mathbb{R},\ \forall\, x \in K,\ m \leqslant f(x) \leqslant M \quad \text{et} \quad \exists\, x_0,\ x_1 \in \mathbb{K} \text{ tels que } m = f(x_0) \text{ et } M = f(x_1).$$

III. Quelques rappels du cours de Sup

On vient ici d'étudier la continuité d'applications définies sur une partie d'un espace vectoriel normé et à valeurs dans un espace vectoriel normé.

Dans le cas d'applications définies sur un intervalle I de $\mathbb{R}$, *à valeurs dans* $\mathbb{R}$ (une telle application s'appelle une fonction numérique de la variable réelle), il y a des résultats supplémentaires, vus en 1ère année, mais qu'il est important de rappeler.

Théorème 19: des valeurs intermédiaires

Soit I un *intervalle* de $\mathbb{R}$, et $f : I \to \mathbb{R}$ une application *continue*.

Alors $f(I)$ est un intervalle.

Démonstration:

Rappelons qu'une partie I de $\mathbb{R}$ est un intervalle si et seulement si c'est une partie convexe.
Démontrer que $f(I)$est un intervalle revient donc à montrer que, si y_1 et y_2 appartiennent à $f(I)$, avec par exemple $y_1 < y_2$, alors le segment $[y_1\,;y_2]$ est inclus dans $f(I)$.

Posons donc $y_1 = f(a)$ et $y_2 = f(b)$ avec $a, b \in I$, et soit $y \in [y_1\,;y_2]$ c'est-à-dire $f(a) \leqslant y \leqslant f(b)$. Il s'agit donc de montrer que $y \in f(I)$.

- *1ère méthode, par dichotomie*

  Posons $a_0 = a$ et $b_0 = b$.
  On compare y à $f\left(\frac{a+b}{2}\right)$: si $y \leqslant f\left(\frac{a+b}{2}\right)$, on pose $a_1 = a$ et $b_1 = \frac{a+b}{2}$, sinon on pose $a_1 = \frac{a+b}{2}$ et $b_1 = b$.On construit ainsi facilement par récurrence (je ne détaille pas) une suite de segments emboîtés $[a_n\,;b_n]$ tels que $b_n - a_n = \frac{b-a}{2^n}$ et $f(a_n) \leqslant f(y) \leqslant f(b_n)$ pour tout n.

  Les suites (a_n) et (b_n) sont adjacentes (facile), donc convergent vers un réel $\ell \in [a\,;b]$ et par passage à la limite dans l'inégalité ci-dessus, compte trenu de la continuité de f, on obtient $y = f(\ell)$, cqfd.

- *2ème méthode, plus savante*

  Notons $X = \{x \in [a\,;b] \mid f(x) \leqslant y\}$. L'ensemble X est non vide (car il contient a) et majoré (par b). Il admet donc une borne supérieure, c.

  Par définition de la borne supérieure, il existe une suite (x_n) d'éléments de X telle que $\lim\limits_{n\to+\infty} x_n = c$; par passage à la limite, puisque f est continue, les inégalités $f(x_n) \leqslant y$ impliquent $f(c) \leqslant y$.

  D'autre part, soit $c = b$, et dans ce cas, puisque $y \leqslant f(b)$, $y = f(b)$ donc $y \in f(I)$, soit $c < b$ et alors, pour n assez grand, $c + \frac{1}{n}$ appartient à $[a\,;b]$; par définition de la borne supérieure, $f\left(c + \frac{1}{n}\right) > y$, et par passage à la limite, on obtient $f(c) \geqslant y$ et là encore, finalement, $f(c) = y$ donc $y \in f(I)$, cqfd.

Conséquences :

1. Le théorème peut aussi s'énoncer ainsi : si f est continue sur $[a\,;b]$ à valeurs réelles, et si y est compris entre $f(a)$ et $f(b)$, il existe x compris entre a et b tel que $y = f(x)$.
2. En particulier, si f est continue sur $[a\,;b]$ à valeurs réelles, et si $f(a)f(b) < 0$, alors il existe $c \in\,]a\,;b[$ tel que $f(c) = 0$.
3. Si $f \in \mathscr{C}(I, \mathbb{R})$ ne s'annule pas sur I, alors f a un signe constant sur I.
4. L'image d'un *segment* par une application continue à valeurs réelles est un segment.

Exercices d'application

1. Soit f continue sur $[a\,;b]$, à valeurs dans $[a\,;b]$. Montrer qu'il existe c appartenant à $[a\,;b]$ tel que $f(c) = c$.

   Solution:

   On applique le théorème des valeurs intermédiaires à la fonction $g\colon x \mapsto f(x) - x$: g est continue comme différence de fonctions continues, et puisque f est à valeurs dans $[a\,;b]$ on a $g(a) \geqslant 0$ et $g(b) \leqslant 0$.

2. Soit A une partie convexe non vide d'un espace vectoriel normé E et $f\colon A \to \mathbb{R}$ une fonction continue.
   Soit a et b deux points de A et y un réel compris entre $f(a)$ et $f(b)$.
   Montrer qu'il existe $x \in A$ tel que $f(x) = y$.

   Solution:

   Soit $\varphi\colon [0\,;1] \to E$ définie par $\varphi(t) = a + t(b-a)$. φ est à valeurs dans A puisque A est convexe, donc par composition $f \circ \varphi$ est continue sur le segment $[0\,;1]$ et à valeurs réelles.
   Comme $(f\circ\varphi)(0) = f(a)$ et $(f\circ\varphi)(1) = f(b)$, par le théorème des valeurs intermédiaires, il existe $t \in [0\,;1]$ tel que $(f\circ\varphi)(t) = y$.
   Pour $x = \varphi(t) \in A$, on a alors $y = f(x)$.

Théorème 20: de bijection

Soit f une fonction définie sur un intervalle I à valeurs dans $\mathbb{R}$.
Si f est *continue* et *strictement monotone* sur I, alors f permet de définir une bijection (que l'on notera encore f) de I sur $J = f(I)$, et la bijection réciproque f^{-1} est continue sur J et de même monotonie que f.

Démonstration:

(H.P) • Il est facile de montrer que la stricte monotonie de f implique son injectivité (si $x \neq y$ on a $x < y$ ou $x > y$ donc $f(x) < f(y)$ ou $f(x) > f(y)$ et en particulier $f(x) \neq f(y)$), donc f est bijective de I *sur* $J = f(I)$, qui est bien un intervalle pâr le théorème des valeurs intermédiaires.

• Le fait que $f^{-1}\colon J :\to I$ est strictement monotone de même sens que f est facile : si par exemple f est croissante et si y_1, y_2 dans J sont tels que $y_1 < y2$ alors en posant $x_1 = f^{-1}(y_1)$ et $x_2 = f^{-1}(y_2)$ on a forcément $x_1 < x_2$ (par l'absurde).

• Il reste à montrer que f est continue sur J, c'est-à-dire continue en tout point $y_0 \in J$. Supposons par exemple f strictement croissante.
Posons alors $x_0 = f^{-1}(y_0)$ et supposons que x_0 appartienne à $\overset{\circ}{I}$ (le cas où x_0 est éventuellement une extrémité de I se traite de manière similaire). On peut donc trouver $\alpha > 0$ tel que $]x_0 - \alpha\,; x_0 + \alpha[\, \subset I$.
Soit alors $\varepsilon > 0$. Quitte à remplacer α par $\min(\alpha, \varepsilon)$ on peut supposer $\alpha < \varepsilon$. On a alors :

$$f(x_0 - \alpha) < f(x_0) = y_0 < f(x_0 + \alpha)$$

donc on peut poser

$$f(x_0 - \alpha) = y_0 - \alpha_1 \quad \text{et} \quad f(x_0 + \alpha) = y_0 + \alpha_2 \quad \text{avec } \alpha_i > 0.$$

Et puisque f^{-1} est strictement croissante on a, en posant $\beta = \min(\alpha_1, \alpha_2) > 0$:

$$\forall y \in\,]y_0 - \beta\,; y_0 + \beta[,\ y \in\,]y_0 - \alpha_1\,; y_0 - \alpha_2[\text{ donc } f^{-1}(y) \in \left]f^{-1}(y_0 - \alpha_1)\,; f^{-1}(y_0 + \alpha_2)\right[=\,]x_0 - \alpha\,; x_0 + \alpha[\, \subset\,]x_0 - \varepsilon\,; x_0 + \varepsilon[$$

et on reconnaît la définition de la continuité de f^1 en y_0, cqfd.

Il existe une sorte de réciproque au théorème précédent :

Théorème 21:

Si f est une bijection continue d'un intervalle I sur l'intervalle $J = f(I)$, alors f est strictement monotone.

Démonstration:

Supposons f non strictement monotone. Alors il existe $a, b, c \in I$ tels que $a < b < c$ et

$$\big[f(a) \leqslant f(b) \text{ et } f(c) \leqslant f(b)\big] \quad \text{ou} \quad \big[f(a) \geqslant f(b) \text{ et } f(c) \geqslant f(b)\big]$$

Quitte à changer f en $-f$, on peut supposer qu'on est dans le 1er cas. De plus, f étant injective, les inégalités larges ci-dessus sont en fait des inégalités strictes. Notons alors $M = \max\big(f(a), f(b)\big)$, de sorte que $M < f(b)$.

Le théorème des valeurs intermédiaires (et l'injectivité de f) montre alors que :

$$\exists\, x_1 \in [a\,;b[\text{ tq } f(x_1) = M \quad \text{et} \quad \exists\, x_2 \in]b\,;c] \text{ tq } f(x_2) = M.$$

On a ainsi trouvé $x_1 < x_2$ tels que $f(x_1) = f(x_2)$, contradiction.

IV. Applications linéaires continues

Théorème 22: Caractérisations d'une application linéaire continue

Soient E et F deux espaces vectoriels normés, et $u \in \mathscr{L}(E, F)$. Les propriétés suivantes sont équivalentes :

(a) u est continue ;

(b) Il existe un réel $k \geqslant 0$ tel que, pour tout $x \in E$, $\|u(x)\|_F \leqslant k\,\|x\|_E$;

(c) u est lipschitzienne.

Démonstration:

$(a) \Rightarrow (b)$ Supposons u linéaire continue ; en particulier, elle est continue en 0_E. Cela implique, en appliquant la définition avec $\varepsilon = 1$, puisque $u(0_E) = 0_F$:

$$\exists\, \alpha > 0 \text{ tq } \|x\| \leqslant \alpha \Longrightarrow \|u(x)\| \leqslant 1$$

Pour tout x non nul de E, on a alors $\left\|\frac{\alpha}{\|x\|}x\right\| = \alpha$, donc $\left\|u\left(\frac{\alpha}{\|x\|}x\right)\right\| = \left\|\frac{\alpha}{\|x\|}u(x)\right\| \leqslant 1$ puis $\|u(x)\| \leqslant \frac{1}{\alpha}\|x\|$, et cette égalité reste vraie pour $x = 0$.

$(b) \Rightarrow (c)$: Si $\|u(x)\| \leqslant k\,\|x\|$ pour tout x, on a alors, pour tout $(x, y) \in E^2$:

$$\|u(x) - u(y)\| = \|u(x - y)\| \leqslant k\,\|x - y\|$$

donc u est k-lipschitzienne.

$(c) \Rightarrow (a)$ est immédiat.

Remarques

1. Une application linéaire n'est pas nécessairement continue !
   Exemple : on munit l'espace vectoriel $\mathbb{R}[X]$ de la norme $\|\ \|_\infty$ définie par :
   $$\text{si } P = \sum a_i X^i,\ \|P\|_\infty = \max |a_i|$$
   Soit φ la forme linéaire définie sur $\mathbb{R}[X]$ par $\varphi(P) = P(1)$. Alors, pour $P_n = 1 + X + \ldots + X^n$ ($n \in \mathbb{N}$), on a $\|P_n\|_\infty = 1$, et $\varphi(P_n) = n + 1$. Il ne peut donc pas exister de constante k telle que, pour tout P on ait $|\varphi(P)| \leqslant k\,\|P\|_\infty$ donc φ n'est pas continue.

2. Une application linéaire peut être continue pour une norme, mais pas pour une autre ! (si elles ne sont pas équivalentes).
   Exemple : si l'on reprend l'exemple précédent, lorsqu'on munit $\mathbb{R}[X]$ de la norme $\|\ \|_1$ définie par $\left\|\sum a_i X^i\right\|_1 = \sum |a_i|$, alors φ est continue ! En effet, $|\varphi(P) = |P(1)| = |\sum a_i| \leqslant \sum |a_i| = \|P\|_1$, donc φ est continue en vertu de la propriété (b).

Cependant, on a le résultat (important) suivant :

Théorème 23:

Si E est de dimension finie, toute application linéaire $u \in \mathscr{L}(E, F)$ est continue.

Démonstration:

E étant de dimension finie, toutes les normes y sont équivalentes. Soit $\mathscr{B} = (e_1, \ldots, e_n)$ une base de E, que l'on munit de la norme $\|\ \|_1$ associée.

On a alors, si $u \in \mathscr{L}(E,F)$ et $x = \sum_{i=1}^{n} x_i e_i$

$$\begin{aligned}\|u(x)\|_F = \left\|\sum_{i=1}^{n} x_i u(e_i)\right\|_F &\leqslant \sum_{i=1}^{n} |x_i|\, \|u(e_i)\|_F \\ &\leqslant k \sum_{i=1}^{n} |x_i| \qquad \text{avec } k = \max_{1\leqslant i\leqslant n} \|u(e_i)\|_F\end{aligned}$$

Ainsi, $\|u(x)\|_F \leqslant k\,\|x\|_1$, ce qui prouve que u est continue.

Exemples

1. L'application « trace » est une forme linéaire continue sur $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$.
2. L'application « transposée » est une application linéaire continue de $\mathcal{M}_{p,q}(\mathbb{K})$ sur $\mathcal{M}_{q,p}(\mathbb{K})$.
3. Soit $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ fixée. L'application $M \mapsto AM$ est un endomorphisme continu de $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$.

V. Applications multilinéaires continues

Théorème 24:

Soient $(E_i)_{1\leqslant i\leqslant p}$ p espaces vectoriels normés, muni chacun d'une norme notée $\|\ \|_i$.

On munit l'espace vectoriel produit $E = \prod_{i=1}^{p} E_i$ de la norme $\|\ \|_\infty$ définie par

$$\forall\, x = (x_1,\dots,x_p) \in E,\quad \|x\|_\infty = \max_{1\leqslant i\leqslant p} \|x_i\|_i$$

Soit F un espace vectoriel normé, et $u : E \longrightarrow F$ une application p-linéaire. Alors, les propriétés suivantes sont équivalentes :

(a) u est continue.

(b) Il existe un réel $k \geqslant 0$ tel que, pour tout $x = (x_1,\dots,x_p) \in E$, on ait
$$\|u(x_1,\dots,x_p)\| \leqslant k\,\|x_1\|_1 \cdot \|x_2\|_2 \cdots \|x_p\|_p.$$

Démonstration:

$(a) \Rightarrow (b)$:
Supposons u continue ; en particulier, elle est continue en 0, ce qui s'écrit :
$$\exists\, \alpha > 0 \text{ tq } \|x\|_\infty \leqslant \alpha \Longrightarrow \|u(x)\|_F \leqslant 1$$
Soit $x = (x_1,\dots,x_p) \in E$ tel qu'aucun des x_i ne soit nul. Si l'on pose $x'_i = \frac{\alpha}{\|x_i\|_i} x_i$ pour tout $i \in [\![1\,;p]\!]$ et $x' = (x'_1,\dots,x'_p)$, alors $\|x'\|_\infty = \alpha$ donc $\|u(x')\|_F \leqslant 1$.
Par multilinéarité on en déduit $\|u(x)\|_F \leqslant \dfrac{1}{\alpha^p}\,\|x_1\|_1 \cdot \|x_2\|_2 \cdots \|x_p\|_p$, et ce résultat subsiste si l'un des x_i est nul.

$(b) \Rightarrow (a)$:
Supposons (c) vérifiée, et soit $a \in E$. Montrons que u est continue en a.
Pour simplifier l'écriture, on supposera ici $p = 2$. Soit donc $x = (x_1,x_2)$ et $a = (a_1,a_2)$ dans E. On a

$$\begin{aligned}u(x) - u(a) &= u(x_1,x_2) - u(a_1,a_2)\\ &= u(x_1,x_2) - u(a_1,x_2) + u(a_1,x_2) - u(a_1,a_2)\\ &= u(x_1 - a_1, x_2) + u(a_1, x_2 - a_2)\end{aligned}$$

donc

$$\begin{aligned}\|u(x) - u(a)\| &\leqslant \|u(x_1 - a_1, x_2)\| + \|u(a_1, x_2 - a_2)\|\\ &\leqslant k\,\|x_1 - a_1\|\,\|x_2\| + k\,\|a_1\|\,\|x_2 - a_2\|\\ &\leqslant k\big(\|x_2\| + \|a_1\|\big)\,\|x - a\|_\infty\end{aligned}$$

ce qui montre que $\lim_{x\to a} u(x) = u(a)$.

Exemple

Si E est un espace préhilbertien réel, c'est-à-dire un $\mathbb{R}$-espace vectoriel muni d'un produit scalaire $\varphi : \begin{cases} E \times E & \longrightarrow \mathbb{R} \\ (x,y) & \longmapsto \langle x|y\rangle \end{cases}$, alors φ est une forme bilinéaire continue.
Cela découle de l'inégalité de Cauchy-Schwarz et du théorème précédent.

Théorème 25:

Si $E_1, \ldots, E_p$ sont des espaces vectoriels de dimension finie, alors toute application p-linéaire sur $E_1 \times \cdots \times E_p$ est continue.

Démonstration:

Là encore, pour simplifier l'écriture, on supposera ici $p = 2$.
Soit $(e_1, \ldots, e_n)$ une base de E_1 et $(e'_1, \ldots, e'_m)$ une base de E_2. Toutes les normes sur un espace vectoriel de dimension finie étant équivalentes, on supposera E_1 et E_2 munis chacun de la norme $\| \ \|_\infty$.
Soient $x = \sum\limits_{i=1}^{n} x_i e_i \in E_1$ et $y = \sum\limits_{j=1}^{m} y_j e'_j \in E_2$. On a

$$u(x,y) = u\left(\sum_{i=1}^{n} x_i e_i, \sum_{j=1}^{m} y_j e'_j\right) = \sum_{i,j} x_i y_j u(e_i, e'_j)$$

d'où, d'après l'inégalité triangulaire :

$$\|u(x,y)\|_F \leqslant \sum_{i,j} |x_i| \left|y_j\right| \left\|u(e_i, e'_j)\right\|_F.$$

Si on note alors $k = \sum\limits_{i,j} \left\|u(e_i, e'_j)\right\|_F$, puisque $|x_i| \leqslant \|x\|_\infty$ et $\left|y_j\right| \leqslant \|y\|_\infty$, on aura $\|u(x,y)\|_F \leqslant k \|x\|_\infty \cdot \|y\|_\infty$.

Exemples

1. Si E est un espace vectoriel de dimension n rapporté à une base $\mathscr{B}$, l'application $\det_{\mathscr{B}}$ qui à toute famille de n vecteurs de E associe son déterminant dans la base $\mathscr{B}$ est continue.
2. Dans $\mathcal{M}_p(\mathbb{K})$, l'application qui à deux matrices A et B associe leur produit AB est bilinéaire continue.

   Cela permet alors de dire, en utilisant la caractérisation séquentielle de la continuité, que si deux suites $(A_n)_{n\in\mathbb{N}}$ et $(B_n)_{n\in\mathbb{N}}$ de matrices de $\mathcal{M}_p(\mathbb{K})$ convergent vers deux matrices A et B respectivement, alors la suite $\left(A_n B_n\right)$ converge vers AB.

   Cela permet aussi, par exemple, de démontrer que l'application $A \mapsto A^2$ est continue sur $\mathcal{M}_p(\mathbb{K})$, comme composée de l'application « produit » et de l'application linéaire continue $A \mapsto (A, A)$.

⋆ ⋆ ⋆ ⋆
⋆ ⋆ ⋆
⋆ ⋆
⋆