Chapitre VIII : Limites et continuité dans un espace vectoriel normé

PSI*

Octobre 2022

Lycée d'Arsonval

Dans tout le chapitre, $\mathbb{K}$ désigne $\mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$.

LIMITES

Définitions et premières propriétés

E et F désignent ici deux espaces vectoriels normés sur $\mathbb{K} = \mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$, munis de normes notées respectivement $\| \|_E$ et $\| \|_F$.

Définitions et premières propriétés

E et F désignent ici deux espaces vectoriels normés sur $\mathbb{K} = \mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$, munis de normes notées respectivement $\| \ \|_E$ et $\| \ \|_F$.

Définition 1

Soit A une partie non vide de E, et f une application de A dans F. Soit $a \in \overline{A}$.

On dit que f admet une limite en a (selon A) si et seulement si il existe $\ell \in F$ tel que :

$$\forall \varepsilon > 0,\ \exists \alpha > 0 \text{ tel que } \forall x \in A,\ \|x - a\|_E < \alpha \Longrightarrow \|f(x) - \ell\|_F < \varepsilon.$$

(*on peut aussi donner cette définition avec des inégalités larges*).

Définitions et premières propriétés

E et F désignent ici deux espaces vectoriels normés sur $\mathbb{K} = \mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$, munis de normes notées respectivement $\| \, \|_E$ et $\| \, \|_F$.

Définition 1

Soit A une partie non vide de E, et f une application de A dans F. Soit $a \in \overline{A}$.

On dit que f admet une limite en a (selon A) si et seulement si il existe $\ell \in F$ tel que :

$$\forall \varepsilon > 0, \ \exists \alpha > 0 \text{ tel que } \forall x \in A, \ \|x - a\|_E < \alpha \Longrightarrow \|f(x) - \ell\|_F < \varepsilon.$$

(*on peut aussi donner cette définition avec des inégalités larges*).

Remarque

La définition ci-dessus peut aussi s'écrire :

Définitions et premières propriétés

E et F désignent ici deux espaces vectoriels normés sur $\mathbb{K} = \mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$, munis de normes notées respectivement $\| \, \|_E$ et $\| \, \|_F$.

Définition 1

Soit A une partie non vide de E, et f une application de A dans F. Soit $a \in \overline{A}$.

On dit que f admet une limite en a (selon A) si et seulement si il existe $\ell \in F$ tel que :

$$\forall \varepsilon > 0, \ \exists \alpha > 0 \text{ tel que } \forall x \in A, \ \|x - a\|_E < \alpha \Longrightarrow \|f(x) - \ell\|_F < \varepsilon.$$

(*on peut aussi donner cette définition avec des inégalités larges*).

Remarque

La définition ci-dessus peut aussi s'écrire :

$$\forall \varepsilon > 0, \ \exists \alpha > 0 \text{ tel que } \forall x \in A, \ x \in \mathcal{B}(a, \alpha) \Longrightarrow f(x) \in \mathcal{B}(\ell, \varepsilon)$$

ou encore, puisque toute boule ouverte de centre x est un voisinage de x et que tout voisinage de x contient une boule ouverte de centre x :

$$\forall V \in \mathscr{V}(\ell), \ \exists U \in \mathscr{V}(a) \text{ tq } f(U \cap A) \subset V.$$

Définitions et premières propriétés

E et F désignent ici deux espaces vectoriels normés sur $\mathbb{K} = \mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$, munis de normes notées respectivement $\|\ \|_E$ et $\|\ \|_F$.

Définition 1

Soit A une partie non vide de E, et f une application de A dans F. Soit $a \in \overline{A}$.

On dit que f admet une limite en a (selon A) si et seulement si il existe $\ell \in F$ tel que :

$$\forall \varepsilon > 0,\ \exists \alpha > 0 \text{ tel que } \forall x \in A,\ \|x - a\|_E < \alpha \Longrightarrow \|f(x) - \ell\|_F < \varepsilon.$$

(*on peut aussi donner cette définition avec des inégalités larges*).

Remarque

La définition ci-dessus peut aussi s'écrire :

$$\forall \varepsilon > 0,\ \exists \alpha > 0 \text{ tel que } \forall x \in A,\ x \in \mathcal{B}(a, \alpha) \Longrightarrow f(x) \in \mathcal{B}(\ell, \varepsilon)$$

ou encore, puisque toute boule ouverte de centre x est un voisinage de x et que tout voisinage de x contient une boule ouverte de centre x :

$$\forall V \in \mathscr{V}(\ell),\ \exists U \in \mathscr{V}(a) \text{ tq } f(U \cap A) \subset V.$$

L'avantage de cette écriture est qu'elle peut s'adapter aux cas $a = +\infty$ lorsque $E = \mathbb{R}$ et $D = \mathbb{N}$ (cas des suites), $a = \pm\infty$ lorsque $E = \mathbb{R}$ et $\ell = \pm\infty$ lorsque $F = \mathbb{R}$.

Théorème 1

Si f admet une limite en a selon A, le vecteur ℓ de la définition est unique.

Théorème 1

Si f admet une limite en a selon A, le vecteur ℓ de la définition est unique.

Démonstration

Supposons qu'il existe $\ell_1, \ell_2 \in F$ vérifiant la définition, avec $\ell_1 \neq \ell_2$.

Théorème 1

Si f admet une limite en a selon A, le vecteur ℓ de la définition est unique.

Démonstration

Supposons qu'il existe $\ell_1, \ell_2 \in F$ vérifiant la définition, avec $\ell_1 \neq \ell_2$.
On peut alors trouver $V_1 \in \mathscr{V}(\ell_1)$ et $V_2 \in \mathscr{V}(\ell_2)$ tels que $V_1 \cap V_2 = \emptyset$ (prendre par exemple pour V_1 la boule ouverte de centre ℓ_1 et de rayon $\frac{\|\ell_1 - \ell_2\|}{2}$ et pour V_2 la boule ouverte de centre ℓ_2 et de même rayon ; adapter dans le cas $F = \mathbb{R}$ et ℓ_1 ou ℓ_2 égal à $\pm\infty$).

Théorème 1

Si f admet une limite en a selon A, le vecteur ℓ de la définition est unique.

Démonstration

Supposons qu'il existe $\ell_1, \ell_2 \in F$ vérifiant la définition, avec $\ell_1 \neq \ell_2$.

On peut alors trouver $V_1 \in \mathscr{V}(\ell_1)$ et $V_2 \in \mathscr{V}(\ell_2)$ tels que $V_1 \cap V_2 = \emptyset$ (prendre par exemple pour V_1 la boule ouverte de centre ℓ_1 et de rayon $\frac{\|\ell_1 - \ell_2\|}{2}$ et pour V_2 la boule ouverte de centre ℓ_2 et de même rayon ; adapter dans le cas $F = \mathbb{R}$ et ℓ_1 ou ℓ_2 égal à $\pm\infty$).

On aurait alors, en appliquant la définition :

$$\exists U_1 \in \mathscr{V}(a) \text{ tq } f(U_1 \cap A) \subset V_1 \quad \text{et} \quad \exists U_2 \in \mathscr{V}(a) \text{ tq } f(U_2 \cap A) \subset V_2$$

Théorème 1

Si f admet une limite en a selon A, le vecteur ℓ de la définition est unique.

Démonstration

Supposons qu'il existe $\ell_1, \ell_2 \in F$ vérifiant la définition, avec $\ell_1 \neq \ell_2$.
On peut alors trouver $V_1 \in \mathscr{V}(\ell_1)$ et $V_2 \in \mathscr{V}(\ell_2)$ tels que $V_1 \cap V_2 = \emptyset$ (prendre par exemple pour V_1 la boule ouverte de centre ℓ_1 et de rayon $\frac{\|\ell_1 - \ell_2\|}{2}$ et pour V_2 la boule ouverte de centre ℓ_2 et de même rayon ; adapter dans le cas $F = \mathbb{R}$ et ℓ_1 ou ℓ_2 égal à $\pm\infty$).
On aurait alors, en appliquant la définition :

$$\exists U_1 \in \mathscr{V}(a) \text{ tq } f(U_1 \cap A) \subset V_1 \quad \text{et} \quad \exists U_2 \in \mathscr{V}(a) \text{ tq } f(U_2 \cap A) \subset V_2$$

Or a appartient à l'adhérence de A, et $U_1 \cap U_2$ est encore un voisinage de a, donc $U_1 \cap U_2 \cap A \neq \emptyset$, et

$$f(\underbrace{U_1 \cap U_2 \cap A}_{\neq \emptyset}) = f\big((U_1 \cap A) \cap (U_2 \cap A)\big) \subset f(U_1 \cap A) \cap f(U_2 \cap A) \subset V_1 \cap V_2 = \emptyset$$

Théorème 1

Si f admet une limite en a selon A, le vecteur ℓ de la définition est unique.

Démonstration

Supposons qu'il existe $\ell_1, \ell_2 \in F$ vérifiant la définition, avec $\ell_1 \neq \ell_2$.

On peut alors trouver $V_1 \in \mathscr{V}(\ell_1)$ et $V_2 \in \mathscr{V}(\ell_2)$ tels que $V_1 \cap V_2 = \emptyset$ (prendre par exemple pour V_1 la boule ouverte de centre ℓ_1 et de rayon $\frac{\|\ell_1 - \ell_2\|}{2}$ et pour V_2 la boule ouverte de centre ℓ_2 et de même rayon ; adapter dans le cas $F = \mathbb{R}$ et ℓ_1 ou ℓ_2 égal à $\pm\infty$).

On aurait alors, en appliquant la définition :

$$\exists U_1 \in \mathscr{V}(a) \text{ tq } f(U_1 \cap A) \subset V_1 \quad \text{et} \quad \exists U_2 \in \mathscr{V}(a) \text{ tq } f(U_2 \cap A) \subset V_2$$

Or a appartient à l'adhérence de A, et $U_1 \cap U_2$ est encore un voisinage de a, donc $U_1 \cap U_2 \cap A \neq \emptyset$, et

$$f(\underbrace{U_1 \cap U_2 \cap A}_{\neq \emptyset}) = f\big((U_1 \cap A) \cap (U_2 \cap A)\big) \subset f(U_1 \cap A) \cap f(U_2 \cap A) \subset V_1 \cap V_2 = \emptyset$$

d'où la contradiction.

Théorème 1

Si f admet une limite en a selon A, le vecteur ℓ de la définition est unique.

Démonstration

Supposons qu'il existe $\ell_1, \ell_2 \in F$ vérifiant la définition, avec $\ell_1 \neq \ell_2$.
On peut alors trouver $V_1 \in \mathscr{V}(\ell_1)$ et $V_2 \in \mathscr{V}(\ell_2)$ tels que $V_1 \cap V_2 = \emptyset$ (prendre par exemple pour V_1 la boule ouverte de centre ℓ_1 et de rayon $\frac{\|\ell_1 - \ell_2\|}{2}$ et pour V_2 la boule ouverte de centre ℓ_2 et de même rayon ; adapter dans le cas $F = \mathbb{R}$ et ℓ_1 ou ℓ_2 égal à $\pm\infty$).
On aurait alors, en appliquant la définition :

$$\exists U_1 \in \mathscr{V}(a) \text{ tq } f(U_1 \cap A) \subset V_1 \quad \text{et} \quad \exists U_2 \in \mathscr{V}(a) \text{ tq } f(U_2 \cap A) \subset V_2$$

Or a appartient à l'adhérence de A, et $U_1 \cap U_2$ est encore un voisinage de a, donc $U_1 \cap U_2 \cap A \neq \emptyset$, et

$$f(\underbrace{U_1 \cap U_2 \cap A}_{\neq \emptyset}) = f\big((U_1 \cap A) \cap (U_2 \cap A)\big) \subset f(U_1 \cap A) \cap f(U_2 \cap A) \subset V_1 \cap V_2 = \emptyset$$

d'où la contradiction.

Ce résultat justifie la notation suivante, dans le cas où **la** limite de f en a (selon A) existe, on la note

$$\lim_{\substack{x \to a \\ x \in A}} f(x) \quad \text{ou} \quad \lim_{x \to a} f(x) \quad \text{ou} \quad \lim_a f\,.$$

Cas particuliers

1. <u>Si $a \in A$</u> : si $\lim\limits_{x \to a} f(x)$ existe, ce ne peut être que $f(a)$ (en effet, compte tenu de la définition, on doit avoir $\|f(a) - \ell\| < \varepsilon$ pour tout $\varepsilon > 0$).

Cas particuliers

1. Si $a \in A$: si $\lim_{x \longrightarrow a} f(x)$ existe, ce ne peut être que $f(a)$ (en effet, compte tenu de la définition, on doit avoir $\|f(a) - \ell\| < \varepsilon$ pour tout $\varepsilon > 0$).
2. Si $a \in \overline{A} \setminus A$ (c'est le cas le plus courant), la limite, si elle existe, est notée $\lim_{\substack{x \longrightarrow a \\ x \neq a}} f(x)$.

Cas particuliers

1. Si $a \in A$: si $\lim\limits_{x \to a} f(x)$ existe, ce ne peut être que $f(a)$ (en effet, compte tenu de la définition, on doit avoir $\|f(a) - \ell\| < \varepsilon$ pour tout $\varepsilon > 0$).
2. Si $a \in \overline{A} \setminus A$ (c'est le cas le plus courant), la limite, si elle existe, est notée $\lim\limits_{\substack{x \to a \\ x \neq a}} f(x)$.

Exemple : Soit $f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ définie par $f(x) = \begin{cases} 0 & \text{si } x \neq 0 \\ 1 & \text{si } x = 0 \end{cases}$.

Alors $\lim\limits_{x \to 0} f(x)$ n'existe pas, mais $\lim\limits_{\substack{x \to 0 \\ x \neq 0}} f(x) = 0$.

Cas particuliers

1. Si $a \in A$: si $\lim\limits_{x \to a} f(x)$ existe, ce ne peut être que $f(a)$ (en effet, compte tenu de la définition, on doit avoir $\|f(a) - \ell\| < \varepsilon$ pour tout $\varepsilon > 0$).
2. Si $a \in \overline{A} \setminus A$ (c'est le cas le plus courant), la limite, si elle existe, est notée $\lim\limits_{\substack{x \to a \\ x \neq a}} f(x)$.

Exemple : Soit $f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ définie par $f(x) = \begin{cases} 0 & \text{si } x \neq 0 \\ 1 & \text{si } x = 0 \end{cases}$.

Alors $\lim\limits_{x \to 0} f(x)$ n'existe pas, mais $\lim\limits_{\substack{x \to 0 \\ x \neq 0}} f(x) = 0$.

3. Si $E = \mathbb{R}$ et $a = \pm\infty$:

Par définition, un voisinage de $+\infty$ $($resp $-\infty)$ est une partie de $\mathbb{R}$ contenant un intervalle de la forme $]M\,;+\infty[$ $\big($resp. $]-\infty\,;M[\big)$.

La définition de $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x) = \ell$ s'écrit alors, par exemple :

$$\forall\, \varepsilon > 0,\ \exists\, M \in \mathbb{R} \text{ tel que } \forall\, x \in A,\ x > M \Longrightarrow \|f(x) - \ell\|_F < \varepsilon\,.$$

Cas particuliers

1. Si $a \in A$: si $\lim\limits_{x \longrightarrow a} f(x)$ existe, ce ne peut être que $f(a)$ (en effet, compte tenu de la définition, on doit avoir $\|f(a) - \ell\| < \varepsilon$ pour tout $\varepsilon > 0$).
2. Si $a \in \overline{A} \setminus A$ (c'est le cas le plus courant), la limite, si elle existe, est notée $\lim\limits_{\substack{x \longrightarrow a \\ x \neq a}} f(x)$.

Exemple : Soit $f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ définie par $f(x) = \begin{cases} 0 & \text{si } x \neq 0 \\ 1 & \text{si } x = 0 \end{cases}$.

Alors $\lim\limits_{x \longrightarrow 0} f(x)$ n'existe pas, mais $\lim\limits_{\substack{x \longrightarrow 0 \\ x \neq 0}} f(x) = 0$.

3. Si $E = \mathbb{R}$ et $a = \pm\infty$:

Par définition, un voisinage de $+\infty$ $\big($resp $-\infty\big)$ est une partie de $\mathbb{R}$ contenant un intervalle de la forme $]M\,;+\infty[$ $\big($resp. $]-\infty\,;M[\big)$.

La définition de $\lim\limits_{x \longrightarrow +\infty} f(x) = \ell$ s'écrit alors, par exemple :

$$\forall\, \varepsilon > 0,\ \exists\, M \in \mathbb{R} \text{ tel que } \forall\, x \in A,\ \ x > M \Longrightarrow \|f(x) - \ell\|_F < \varepsilon\,.$$

4. Si $F = \mathbb{R}$ et $\ell = \pm\infty$, la définition de $\lim\limits_{x \longrightarrow a} f(x) = -\infty$ (par exemple) s'écrit :

$$\forall\, M \in \mathbb{R},\ \exists\, \alpha > 0 \text{ tel que } \forall\, x \in A,\ \ \|x - a\|_E < \alpha \Longrightarrow f(x) < M$$

Cas particuliers

1. <u>Si $a \in A$</u> : si $\lim\limits_{x \to a} f(x)$ existe, ce ne peut être que $f(a)$ (en effet, compte tenu de la définition, on doit avoir $\|f(a) - \ell\| < \varepsilon$ pour tout $\varepsilon > 0$).
2. <u>Si $a \in \overline{A} \setminus A$</u> (c'est le cas le plus courant), la limite, si elle existe, est notée $\lim\limits_{\substack{x \to a \\ x \neq a}} f(x)$.

   Exemple : Soit $f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ définie par $f(x) = \begin{cases} 0 & \text{si } x \neq 0 \\ 1 & \text{si } x = 0 \end{cases}$.

   Alors $\lim\limits_{x \to 0} f(x)$ n'existe pas, mais $\lim\limits_{\substack{x \to 0 \\ x \neq 0}} f(x) = 0$.

3. <u>Si $E = \mathbb{R}$ et $a = \pm\infty$:</u>

   Par définition, un voisinage de $+\infty$ $\big($resp $-\infty\big)$ est une partie de $\mathbb{R}$ contenant un intervalle de la forme $]M\,; +\infty[$ $\big($resp. $]-\infty\,; M[\big)$.

   La définition de $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x) = \ell$ s'écrit alors, par exemple :

   $$\forall\, \varepsilon > 0,\ \exists\, M \in \mathbb{R} \text{ tel que } \forall\, x \in A,\ x > M \Longrightarrow \|f(x) - \ell\|_F < \varepsilon\,.$$

4. <u>Si $F = \mathbb{R}$ et $\ell = \pm\infty$</u>, la définition de $\lim\limits_{x \to a} f(x) = -\infty$ (par exemple) s'écrit :

   $$\forall\, M \in \mathbb{R},\ \exists\, \alpha > 0 \text{ tel que } \forall\, x \in A,\ \|x - a\|_E < \alpha \Longrightarrow f(x) < M$$

5. <u>Si $E = \mathbb{R}$ et $A = \mathbb{N}$</u> on retrouve la définition de la limite d'une suite.

Cas particuliers

1. Si $a \in A$: si $\lim\limits_{x \to a} f(x)$ existe, ce ne peut être que $f(a)$ (en effet, compte tenu de la définition, on doit avoir $\|f(a) - \ell\| < \varepsilon$ pour tout $\varepsilon > 0$).
2. Si $a \in \overline{A} \setminus A$ (c'est le cas le plus courant), la limite, si elle existe, est notée $\lim\limits_{\substack{x \to a \\ x \neq a}} f(x)$.

Exemple : Soit $f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ définie par $f(x) = \begin{cases} 0 & \text{si } x \neq 0 \\ 1 & \text{si } x = 0 \end{cases}$.

Alors $\lim\limits_{x \to 0} f(x)$ n'existe pas, mais $\lim\limits_{\substack{x \to 0 \\ x \neq 0}} f(x) = 0$.

3. Si $E = \mathbb{R}$ et $a = \pm\infty$:
   Par définition, un voisinage de $+\infty$ $\big($resp $-\infty\big)$ est une partie de $\mathbb{R}$ contenant un intervalle de la forme $]M\,;+\infty[$ $\big($resp. $]-\infty\,;M[\big)$.
   La définition de $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x) = \ell$ s'écrit alors, par exemple :
   $$\forall\, \varepsilon > 0,\ \exists\, M \in \mathbb{R} \text{ tel que } \forall\, x \in A,\ \ x > M \Longrightarrow \|f(x) - \ell\|_F < \varepsilon\,.$$
4. Si $F = \mathbb{R}$ et $\ell = \pm\infty$, la définition de $\lim\limits_{x \to a} f(x) = -\infty$ (par exemple) s'écrit :
   $$\forall\, M \in \mathbb{R},\ \exists\, \alpha > 0 \text{ tel que } \forall\, x \in A,\ \ \|x - a\|_E < \alpha \Longrightarrow f(x) < M$$
5. Si $E = \mathbb{R}$ et $A = \mathbb{N}$ on retrouve la définition de la limite d'une suite.

Remarque : La notion de voisinage étant une notion topologique, l'écriture de la définition de la limite à l'aide des voisinages montre que l'existence de la limite (ainsi que sa valeur éventuelle) sont inchangées si on remplace l'une des normes (dans E ou F) par une norme équivalente.

Proposition 1

Soit A une partie non vide de E, et f une application de A dans F. Soit $a \in \overline{A}$.

Si f admet une limite en a, alors f est bornée sur A au voisinage de a, c'est-à-dire :

$$\exists\, M \in \mathbb{R}_+^*,\ \exists\, U \in \mathscr{V}(a) \text{ tels que } \forall\, x \in U \cap A,\ \|f(x)\|_F \leqslant M.$$

Proposition 1

Soit A une partie non vide de E, et f une application de A dans F. Soit $a \in \overline{A}$.

Si f admet une limite en a, alors f est bornée sur A au voisinage de a, c'est-à-dire :

$$\exists\, M \in \mathbb{R}_+^*,\ \exists\, U \in \mathscr{V}(a) \text{ tels que } \forall\, x \in U \cap A,\ \|f(x)\|_F \leqslant M.$$

Démonstration

Si on applique la définition de la limite avec, par exemple, $\varepsilon = 1$, on obtient grâce à l'inégalité triangulaire :

$$\exists\, \alpha > 0 \text{ tq } \forall\, x \in A,\ \ \|x - a\|_E < \alpha \Longrightarrow \|f(x)\|_F \leqslant \|\ell\|_F + 1$$

ce qui est le résultat voulu avec $U = \mathcal{B}(a, \alpha)$.

Proposition 1

Soit A une partie non vide de E, et f une application de A dans F. Soit $a \in \overline{A}$.

Si f admet une limite en a, alors f est bornée sur A au voisinage de a, c'est-à-dire :

$$\exists\, M \in \mathbb{R}_+^*,\ \exists\, U \in \mathscr{V}(a) \text{ tels que } \forall\, x \in U \cap A,\ \|f(x)\|_F \leqslant M.$$

Démonstration

Si on applique la définition de la limite avec, par exemple, $\varepsilon = 1$, on obtient grâce à l'inégalité triangulaire :

$$\exists\, \alpha > 0 \text{ tq } \forall\, x \in A,\ \ \|x - a\|_E < \alpha \Longrightarrow \|f(x)\|_F \leqslant \|\ell\|_F + 1$$

ce qui est le résultat voulu avec $U = \mathcal{B}(a, \alpha)$.

Remarque : Dans le cas particulier des suites, on retrouve ici le résultat : toute suite convergente est bornée.

Proposition 1

Soit A une partie non vide de E, et f une application de A dans F. Soit $a \in \overline{A}$.

Si f admet une limite en a, alors f est bornée sur A au voisinage de a, c'est-à-dire :

$$\exists\, M \in \mathbb{R}_+^*,\ \exists\, U \in \mathcal{V}(a) \text{ tels que } \forall\, x \in U \cap A,\ \|f(x)\|_F \leqslant M.$$

Démonstration

Si on applique la définition de la limite avec, par exemple, $\varepsilon = 1$, on obtient grâce à l'inégalité triangulaire :

$$\exists\, \alpha > 0 \text{ tq } \forall\, x \in A,\ \ \|x - a\|_E < \alpha \Longrightarrow \|f(x)\|_F \leqslant \|\ell\|_F + 1$$

ce qui est le résultat voulu avec $U = \mathcal{B}(a, \alpha)$.

Remarque : Dans le cas particulier des suites, on retrouve ici le résultat : toute suite convergente est bornée.

Théorème 2: caractérisation séquentielle de la limite

Soit A une partie non vide de E, et f une application de A dans F. Soit $a \in \overline{A}$.

Les propriétés suivantes sont équivalentes :

(i) f admet la limite ℓ en a selon A.

(ii) Pour toute suite $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ d'éléments de A qui converge vers a, la suite $\big(f(a_n)\big)_{n\in\mathbb{N}}$ converge vers ℓ.

Théorème 3: caractérisation séquentielle de la limite

Soit A une partie non vide de E, et f une application de A dans F. Soit $a \in \overline{A}$.
Les propriétés suivantes sont équivalentes :

(i) f admet la limite ℓ en a selon A.

(ii) Pour toute suite $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ d'éléments de A qui converge vers a, la suite $\big(f(a_n)\big)_{n\in\mathbb{N}}$ converge vers ℓ.

Théorème 3: caractérisation séquentielle de la limite

Soit A une partie non vide de E, et f une application de A dans F. Soit $a \in \overline{A}$.
Les propriétés suivantes sont équivalentes :

(i) f admet la limite ℓ en a selon A.

(ii) Pour toute suite $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ d'éléments de A qui converge vers a, la suite $\big(f(a_n)\big)_{n\in\mathbb{N}}$ converge vers ℓ.

Démonstration

- (i)$\Rightarrow$ (ii) : Supposons $\lim\limits_{x\to a} f(x) = \ell$ et soit $(a_n) \in A^{\mathbb{N}}$ telle que $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = a$.

Théorème 3: caractérisation séquentielle de la limite

Soit A une partie non vide de E, et f une application de A dans F. Soit $a \in \overline{A}$.
Les propriétés suivantes sont équivalentes :

(i) f admet la limite ℓ en a selon A.

(ii) Pour toute suite $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ d'éléments de A qui converge vers a, la suite $\big(f(a_n)\big)_{n\in\mathbb{N}}$ converge vers ℓ.

Démonstration

- (i)$\Rightarrow$ (ii) : Supposons $\lim\limits_{x\to a} f(x) = \ell$ et soit $(a_n) \in A^{\mathbb{N}}$ telle que $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = a$. On écrit les deux définitions :

$$\forall\, V \in \mathscr{V}(\ell),\ \exists\, U \in \mathscr{V}(a) \text{ tq } f(U \cap A) \subset V \quad (1)$$

et

$$\forall\, W \in \mathscr{V}(a),\ \exists\, n_0 \in \mathbb{N} \text{ tq } n \geqslant n_0 \Longrightarrow a_n \in W \quad (2)$$

Théorème 3: caractérisation séquentielle de la limite

Soit A une partie non vide de E, et f une application de A dans F. Soit $a \in \overline{A}$.
Les propriétés suivantes sont équivalentes :

(i) f admet la limite ℓ en a selon A.

(ii) Pour toute suite $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ d'éléments de A qui converge vers a, la suite $\big(f(a_n)\big)_{n\in\mathbb{N}}$ converge vers ℓ.

Démonstration

- (i)$\Rightarrow$ (ii) : Supposons $\lim\limits_{x\to a} f(x) = \ell$ et soit $(a_n) \in A^{\mathbb{N}}$ telle que $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = a$. On écrit les deux définitions :

$$\forall\, V \in \mathcal{V}(\ell),\ \exists\, U \in \mathcal{V}(a) \text{ tq } f(U\cap A) \subset V \quad (1)$$

et

$$\forall\, W \in \mathcal{V}(a),\ \exists\, n_0 \in \mathbb{N} \text{ tq } n \geqslant n_0 \Longrightarrow a_n \in W \quad (2)$$

Soit $V \in \mathcal{V}(\ell)$. On utilise alors (1), puis on applique (2) avec $W = U$. On a alors :

$$\exists\, U \in \mathcal{V}(a),\ \exists\, n_0 \in \mathbb{N} \text{ tq } n \geqslant n_0 \Longrightarrow a_n \in U \text{ et } f(U\cap A) \subset V$$

Théorème 3: caractérisation séquentielle de la limite

Soit A une partie non vide de E, et f une application de A dans F. Soit $a \in \overline{A}$.
Les propriétés suivantes sont équivalentes :

(i) f admet la limite ℓ en a selon A.

(ii) Pour toute suite $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ d'éléments de A qui converge vers a, la suite $\big(f(a_n)\big)_{n\in\mathbb{N}}$ converge vers ℓ.

Démonstration

- (i)$\Rightarrow$ (ii) : Supposons $\lim\limits_{x\to a} f(x) = \ell$ et soit $(a_n) \in A^{\mathbb{N}}$ telle que $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = a$. On écrit les deux définitions :

$$\forall\, V \in \mathscr{V}(\ell),\ \exists\, U \in \mathscr{V}(a) \text{ tq } f(U \cap A) \subset V \quad (1)$$

et

$$\forall\, W \in \mathscr{V}(a),\ \exists\, n_0 \in \mathbb{N} \text{ tq } n \geqslant n_0 \Longrightarrow a_n \in W \quad (2)$$

Soit $V \in \mathscr{V}(\ell)$. On utilise alors (1), puis on applique (2) avec $W = U$. On a alors :

$$\exists\, U \in \mathscr{V}(a),\ \exists\, n_0 \in \mathbb{N} \text{ tq } n \geqslant n_0 \Longrightarrow a_n \in U \text{ et } f(U \cap A) \subset V$$

Pour $n \geqslant n_0$, on aura donc $a_n \in U \cap A$ (car $a_n \in A$ par hypothèse) donc $f(a_n) \in V$. Finalement, on a obtenu :

$$\forall\, V \in \mathscr{V}(\ell),\ \exists\, n_0 \in \mathbb{N} \text{ tq } n \geqslant n_0 \Longrightarrow f(a_n) \in V$$

ce qui est exactement la définition de $\lim\limits_{n\to\infty} f(a_n) = \ell$.

Théorème 3: caractérisation séquentielle de la limite

Soit A une partie non vide de E, et f une application de A dans F. Soit $a \in \overline{A}$.
Les propriétés suivantes sont équivalentes :

(i) f admet la limite ℓ en a selon A.

(ii) Pour toute suite $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ d'éléments de A qui converge vers a, la suite $\big(f(a_n)\big)_{n\in\mathbb{N}}$ converge vers ℓ.

Démonstration

- (ii)$\Rightarrow$ (i) : Supposons que, pour toute suite $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ d'éléments de A qui converge vers a, la suite $\big(f(a_n)\big)_{n\in\mathbb{N}}$ converge vers ℓ. On raisonne par l'absurde :

Théorème 3: caractérisation séquentielle de la limite

Soit A une partie non vide de E, et f une application de A dans F. Soit $a \in \overline{A}$.
Les propriétés suivantes sont équivalentes :

(i) f admet la limite ℓ en a selon A.

(ii) Pour toute suite $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ d'éléments de A qui converge vers a, la suite $\big(f(a_n)\big)_{n\in\mathbb{N}}$ converge vers ℓ.

Démonstration

- (ii)$\Rightarrow$ (i) : Supposons que, pour toute suite $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ d'éléments de A qui converge vers a, la suite $\big(f(a_n)\big)_{n\in\mathbb{N}}$ converge vers ℓ. On raisonne par l'absurde : si f ne convergeait pas vers ℓ lorsque x tend vers a , on aurait :
$$\exists\, V \in \mathscr{V}(\ell) \text{ tq } \forall\, U \in \mathscr{V}(a), \exists\, x \in U \cap A \text{ avec } f(x) \notin V$$

Théorème 3: caractérisation séquentielle de la limite

Soit A une partie non vide de E, et f une application de A dans F. Soit $a \in \overline{A}$.
Les propriétés suivantes sont équivalentes :

(i) f admet la limite ℓ en a selon A.

(ii) Pour toute suite $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ d'éléments de A qui converge vers a, la suite $\big(f(a_n)\big)_{n\in\mathbb{N}}$ converge vers ℓ.

Démonstration

- (ii)$\Rightarrow$ (i) : Supposons que, pour toute suite $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ d'éléments de A qui converge vers a, la suite $\big(f(a_n)\big)_{n\in\mathbb{N}}$ converge vers ℓ. On raisonne par l'absurde : si f ne convergeait pas vers ℓ lorsque x tend vers a , on aurait :
$$\exists\, V \in \mathscr{V}(\ell) \text{ tq } \forall\, U \in \mathscr{V}(a), \exists\, x \in U \cap A \text{ avec } f(x) \notin V$$
On prend alors pour U une boule ouverte de centre a et de rayon $\frac{1}{n}$ (avec $n \in \mathbb{N}^*$) (adapter dans le cas $E = \mathbb{R}$ et $a = \pm\infty$), on obtient l'existence pour tout $n \in \mathbb{N}^*$ de $a_n \in A$ tel que $\|a_n - a\| < \frac{1}{n}$, et $f(x_n) \notin V$, c'est-à-dire que (a_n) est une suite d'éléments de A qui converge vers a mais $f(a_n)$ ne peut converger vers ℓ : contradiction.

Théorème 3: caractérisation séquentielle de la limite

Soit A une partie non vide de E, et f une application de A dans F. Soit $a \in \overline{A}$.
Les propriétés suivantes sont équivalentes :

(i) f admet la limite ℓ en a selon A.

(ii) Pour toute suite $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ d'éléments de A qui converge vers a, la suite $\big(f(a_n)\big)_{n\in\mathbb{N}}$ converge vers ℓ.

Exercice

Montrer que l'application $x \in \mathbb{R}^* \mapsto \sin\frac{1}{x}$ n'a pas de limite en 0.

Théorème 3: caractérisation séquentielle de la limite

Soit A une partie non vide de E, et f une application de A dans F. Soit $a \in \overline{A}$.
Les propriétés suivantes sont équivalentes :

(i) f admet la limite ℓ en a selon A.

(ii) Pour toute suite $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ d'éléments de A qui converge vers a, la suite $\big(f(a_n)\big)_{n\in\mathbb{N}}$ converge vers ℓ.

Exercice

Montrer que l'application $x \in \mathbb{R}^* \mapsto \sin\frac{1}{x}$ n'a pas de limite en 0.

Solution

En effet, si cette fonction avait une limite ℓ quand $x \to 0$, en considérant la suite de terme général $x_n = \frac{1}{(n+1)\pi}$, qui tend bien vers 0, on devrait avoir par caractérisation séquentielle, $\ell = \lim\limits_{n\to+\infty} f(x_n) = 0$, et en considérant la suite de terme général $y_n = \frac{1}{2n\pi + \frac{\pi}{2}}$, on devrait avoir $\ell = \lim\limits_{n\to+\infty} f(y_n) = 1$.

Opérations sur les limites

Théorème 4

Soient E et F deux espaces vectoriels normés. Soit A une partie non vide de E, et f et g deux applications de A dans F. Soit enfin $a \in \overline{A}$.

Si $\lim\limits_{x \to a} f(x) = \ell$ et $\lim\limits_{x \to a} g(x) = \ell'$ existent, alors $\lim\limits_{x \to a} (f+g)(x)$ existe et est égale à $\ell + \ell'$.

Opérations sur les limites

Théorème 4

Soient E et F deux espaces vectoriels normés. Soit A une partie non vide de E, et f et g deux applications de A dans F. Soit enfin $a \in \overline{A}$.

Si $\lim\limits_{x \to a} f(x) = \ell$ et $\lim\limits_{x \to a} g(x) = \ell'$ existent, alors $\lim\limits_{x \to a} (f+g)(x)$ existe et est égale à $\ell + \ell'$.

Démonstration

Soit (x_n) une suite quelconque d'éléments de A qui tend vers a.
Alors, par caractérisation séquentielle de la limite, on a $\lim\limits_{n \to +\infty} f(x_n) = \ell$ et $\lim\limits_{n \to +\infty} g(x_n) = \ell'$. D'après les opérations sur les limites de suites, on a alors $\lim\limits_{n \to +\infty} (f+g)(x_n) = \ell + \ell'$.

Cela étant vrai pour toute suite $(x_n) \in A^{\mathbb{N}}$ qui tend vers a, le théorème de caractérisation séquentielle de la limite permet de conclure : $\lim\limits_{\substack{x \to a \\ x \in A}} (f+g)(x) = \ell + \ell'$.

Opérations sur les limites

Théorème 4

Soient E et F deux espaces vectoriels normés. Soit A une partie non vide de E, et f et g deux applications de A dans F. Soit enfin $a \in \overline{A}$.

Si $\lim\limits_{x \to a} f(x) = \ell$ et $\lim\limits_{x \to a} g(x) = \ell'$ existent, alors $\lim\limits_{x \to a} (f+g)(x)$ existe et est égale à $\ell + \ell'$.

Théorème 5

Soient E et F deux espaces vectoriels normés. Soit A une partie non vide de E, $a \in \overline{A}$, f une application de A dans F et φ une application de A dans $\mathbb{K}$.

Si $\lim\limits_{x \to a} f(x) = \ell \in E$ et $\lim\limits_{x \to a} \varphi(x) = \lambda \in \mathbb{K}$ existent, alors $\lim\limits_{x \to a} (\varphi . f)(x)$ existe et est égale à $\lambda . \ell$.

Opérations sur les limites

Théorème 4

Soient E et F deux espaces vectoriels normés. Soit A une partie non vide de E, et f et g deux applications de A dans F. Soit enfin $a \in \overline{A}$.

Si $\lim\limits_{x \to a} f(x) = \ell$ et $\lim\limits_{x \to a} g(x) = \ell'$ existent, alors $\lim\limits_{x \to a} (f+g)(x)$ existe et est égale à $\ell + \ell'$.

Théorème 5

Soient E et F deux espaces vectoriels normés. Soit A une partie non vide de E, $a \in \overline{A}$, f une application de A dans F et φ une application de A dans $\mathbb{K}$.

Si $\lim\limits_{x \to a} f(x) = \ell \in E$ et $\lim\limits_{x \to a} \varphi(x) = \lambda \in \mathbb{K}$ existent, alors $\lim\limits_{x \to a} (\varphi.f)(x)$ existe et est égale à $\lambda.\ell$.

Démonstration

On utilise encore la caractérisation séquentielle de la limite.
Pour toute suite (x_n) d'éléments de A qui converge vers a, on a $\lim\limits_{n \to +\infty} \varphi(x_n) = \lambda$ et $\lim\limits_{n \to +\infty} f(x_n) = \ell$, donc d'après les résultats sur les limites de suites, on a $\lim\limits_{n \to +\infty} \varphi(x_n).f(x_n) = \lambda.\ell$, ce qui permet de conclure de la même façon que dans le théorème précédent.

Opérations sur les limites

Théorème 4

Soient E et F deux espaces vectoriels normés. Soit A une partie non vide de E, et f et g deux applications de A dans F. Soit enfin $a \in \overline{A}$.

Si $\lim\limits_{x \to a} f(x) = \ell$ et $\lim\limits_{x \to a} g(x) = \ell'$ existent, alors $\lim\limits_{x \to a} (f+g)(x)$ existe et est égale à $\ell + \ell'$.

Théorème 5

Soient E et F deux espaces vectoriels normés. Soit A une partie non vide de E, $a \in \overline{A}$, f une application de A dans F et φ une application de A dans $\mathbb{K}$.

Si $\lim\limits_{x \to a} f(x) = \ell \in E$ et $\lim\limits_{x \to a} \varphi(x) = \lambda \in \mathbb{K}$ existent, alors $\lim\limits_{x \to a} (\varphi . f)(x)$ existe et est égale à $\lambda . \ell$.

Théorème 6: Composition des limites

Soit E, F, G trois espaces vectoriels normés, $A \subset E$, $B \subset F$, $f : A \longrightarrow F$ et $g : B \longrightarrow G$.
On suppose $f(A) \subset B$, et $\lim\limits_{x \to a} f(x) = b$.

Alors, $b \in \overline{B}$, et si $\lim\limits_{y \to b} g(y) = \ell \in G$, alors $\lim\limits_{x \to a} (g \circ f)(x) = \ell$.

Opérations sur les limites

Théorème 4

Soient E et F deux espaces vectoriels normés. Soit A une partie non vide de E, et f et g deux applications de A dans F. Soit enfin $a \in \overline{A}$.

Si $\lim\limits_{x \to a} f(x) = \ell$ et $\lim\limits_{x \to a} g(x) = \ell'$ existent, alors $\lim\limits_{x \to a} (f+g)(x)$ existe et est égale à $\ell + \ell'$.

Théorème 5

Soient E et F deux espaces vectoriels normés. Soit A une partie non vide de E, $a \in \overline{A}$, f une application de A dans F et φ une application de A dans $\mathbb{K}$.

Si $\lim\limits_{x \to a} f(x) = \ell \in E$ et $\lim\limits_{x \to a} \varphi(x) = \lambda \in \mathbb{K}$ existent, alors $\lim\limits_{x \to a} (\varphi.f)(x)$ existe et est égale à $\lambda.\ell$.

Théorème 6: Composition des limites

Soit E, F, G trois espaces vectoriels normés, $A \subset E$, $B \subset F$, $f : A \longrightarrow F$ et $g : B \longrightarrow G$.
On suppose $f(A) \subset B$, et $\lim\limits_{x \to a} f(x) = b$.

Alors, $b \in \overline{B}$, et si $\lim\limits_{y \to b} g(y) = \ell \in G$, alors $\lim\limits_{x \to a} (g \circ f)(x) = \ell$.

Démonstration

On utilise là encore la caractérisation séquentielle de la limite : pour toute suite (x_n) d'éléments de A qui converge vers a, la suite de terme général $y_n = f(x_n)$ est une suite d'éléments de B qui converge vers b, ce qui prouve au passage que $b \in \overline{B}$ (caractérisation séquentielle de l'adhérence), donc $\lim\limits_{n \to +\infty} g(y_n) = \ell$ c'est-à-dire $\lim\limits_{n \to +\infty} g \circ f(x_n) = \ell$, ce qui permet de conclure.

Exercice

L'application $f : \left\{ \begin{array}{ccc} \mathbb{R}^2 \setminus (0,0) & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ (x,y) & \longmapsto & \dfrac{xy}{x^2+y^2} \end{array} \right.$ admet-elle une limite en $(0,0)$?

Exercice

L'application $f : \left\{ \begin{array}{ccc} \mathbb{R}^2 \setminus (0,0) & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ (x,y) & \longmapsto & \dfrac{xy}{x^2+y^2} \end{array} \right.$ admet-elle une limite en $(0,0)$?

Solution

Si f admettait une limite ℓ en $(0,0)$, on devrait avoir, d'après le théorème précédent :

$\forall \lambda \in \mathbb{R},\ \lim\limits_{x \to 0} f(x, \lambda x) = \ell$.

Exercice

L'application $f : \left\{ \begin{array}{rcl} \mathbb{R}^2 \setminus (0,0) & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ (x,y) & \longmapsto & \dfrac{xy}{x^2+y^2} \end{array} \right.$ admet-elle une limite en $(0,0)$?

Solution

Si f admettait une limite ℓ en $(0,0)$, on devrait avoir, d'après le théorème précédent : $\forall \lambda \in \mathbb{R},\ \lim\limits_{x\to 0} f(x,\lambda x) = \ell$. Mais pour $x \neq 0$, $f(x,\lambda x) = \dfrac{\lambda}{1+\lambda^2}$, qui dépend de λ, contradiction. Il en résulte que f n'admet pas de limite en $(0,0)$.

Exercice

L'application $f : \left\{ \begin{array}{ccc} \mathbb{R}^2 \setminus (0,0) & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ (x,y) & \longmapsto & \dfrac{xy}{x^2+y^2} \end{array} \right.$ admet-elle une limite en $(0,0)$?

Exercice

Même question pour l'application $g : \left\{ \begin{array}{ccc} \mathbb{R}^2 \setminus (0,0) & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ (x,y) & \longmapsto & \dfrac{xy}{\sqrt{x^2+y^2}} \end{array} \right.$.

Exercice

L'application $f : \begin{cases} \mathbb{R}^2 \setminus (0,0) & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ (x,y) & \longmapsto & \dfrac{xy}{x^2+y^2} \end{cases}$ admet-elle une limite en $(0,0)$?

Exercice

Même question pour l'application $g : \begin{cases} \mathbb{R}^2 \setminus (0,0) & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ (x,y) & \longmapsto & \dfrac{xy}{\sqrt{x^2+y^2}} \end{cases}$.

Solution

En posant $x = r\cos\theta,\ y = r\sin\theta$ avec $r > 0$ pour $(x,y) \neq (0,0)$, on a $f(x,y) = r\sin\theta\cos\theta$ donc $|f(x,y)| \leqslant r$ soit encore $|f(x,y)| \leqslant \|(x,y)\|_2$. Il en résulte que $\lim\limits_{(x,y)\to(0,0)} f(x,y) = 0$.

Opérations sur les limites

Dans le cas de fonctions à valeurs dans $\mathbb{K}$, d'autres opérations sont possibles, le produit et le quotient. Le théorème ci-dessous a été vu l'an dernier pour les fonctions définies sur une partie de $\mathbb{R}$, et s'étend sans difficultés aux fonctions définies sur un espace vectoriel normé.

Opérations sur les limites

Dans le cas de fonctions à valeurs dans $\mathbb{K}$, d'autres opérations sont possibles, le produit et le quotient. Le théorème ci-dessous a été vu l'an dernier pour les fonctions définies sur une partie de $\mathbb{R}$, et s'étend sans difficultés aux fonctions définies sur un espace vectoriel normé.

Théorème 7

Soient f, g définies sur une partie A de E, **à valeurs dans $\mathbb{K} = \mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$**, et soit $a \in \overline{A}$.

On suppose que $\lim\limits_{x \to a} f(x) = \ell$ et que $\lim\limits_{x \to a} g(x) = \ell'$. Alors :

1. La fonction produit fg admet en a la limite $\ell\ell'$.
2. Si $\ell' \neq 0$, il existe un voisinage V de a sur lequel g ne s'annule pas, et $\lim\limits_{x \to a} \dfrac{f}{g}(x) = \dfrac{\ell}{\ell'}$.

Résultats spécifiques aux fonctions à valeurs réelles

Les résultats suivants ont été vus en Sup, mais seulement dans le cas des fonctions définies sur $\mathbb{R}$; ils utilisent la structure d'ordre sur $\mathbb{R}$.

Résultats spécifiques aux fonctions à valeurs réelles

Les résultats suivants ont été vus en Sup, mais seulement dans le cas des fonctions définies sur $\mathbb{R}$; ils utilisent la structure d'ordre sur $\mathbb{R}$.

On considère ici des applications définies sur une partie A d'un espace vectoriel normé E à valeurs dans $\mathbb{R}$, et a désigne un point adhérent à A. Les résultats s'étendent sans difficulté au cas où $E = \mathbb{R}$ et où $a = \pm\infty$.

Résultats spécifiques aux fonctions à valeurs réelles

Les résultats suivants ont été vus en Sup, mais seulement dans le cas des fonctions définies sur $\mathbb{R}$; ils utilisent la structure d'ordre sur $\mathbb{R}$.

On considère ici des applications définies sur une partie A d'un espace vectoriel normé E à valeurs dans $\mathbb{R}$, et a désigne un point adhérent à A. Les résultats s'étendent sans difficulté au cas où $E = \mathbb{R}$ et où $a = \pm\infty$.

Théorème 8: d'encadrement

Soient f, g, h définies sur $A \subset E$ à valeurs dans $\mathbb{R}$, et $a \in \overline{A}$.

On suppose qu'il existe un voisinage U de a tel que $\forall\, x \in U \cap A,\ f(x) \leqslant g(x) \leqslant h(x)$.

On suppose également que $\lim\limits_{x \to a} f(x) = \ell$ et que $\lim\limits_{x \to a} h(x) = \ell$.

Alors $\lim\limits_{x \to a} g(x) = \ell$.

Résultats spécifiques aux fonctions à valeurs réelles

Les résultats suivants ont été vus en Sup, mais seulement dans le cas des fonctions définies sur $\mathbb{R}$; ils utilisent la structure d'ordre sur $\mathbb{R}$.

On considère ici des applications définies sur une partie A d'un espace vectoriel normé E à valeurs dans $\mathbb{R}$, et a désigne un point adhérent à A. Les résultats s'étendent sans difficulté au cas où $E = \mathbb{R}$ et où $a = \pm\infty$.

Théorème 8: d'encadrement

Soient f, g, h définies sur $A \subset E$ à valeurs dans $\mathbb{R}$, et $a \in \overline{A}$.

On suppose qu'il existe un voisinage U de a tel que $\forall\, x \in U \cap A,\ f(x) \leqslant g(x) \leqslant h(x)$.

On suppose également que $\lim\limits_{x \to a} f(x) = \ell$ et que $\lim\limits_{x \to a} h(x) = \ell$.

Alors $\lim\limits_{x \to a} g(x) = \ell$.

Démonstration

On écrit la définition de la limite :

$$\forall\, \varepsilon > 0,\ \exists\, V \in \mathscr{V}(a) \text{ tq } x \in V \cap A \Longrightarrow |f(x) - \ell| < \varepsilon \quad \text{et} \quad \exists\, W \in \mathscr{V}(a) \text{ tq } x \in W \cap A \Longrightarrow |h(x) - \ell| < \varepsilon$$

Résultats spécifiques aux fonctions à valeurs réelles

Les résultats suivants ont été vus en Sup, mais seulement dans le cas des fonctions définies sur $\mathbb{R}$; ils utilisent la structure d'ordre sur $\mathbb{R}$.

On considère ici des applications définies sur une partie A d'un espace vectoriel normé E à valeurs dans $\mathbb{R}$, et a désigne un point adhérent à A. Les résultats s'étendent sans difficulté au cas où $E = \mathbb{R}$ et où $a = \pm\infty$.

Théorème 8: d'encadrement

Soient f, g, h définies sur $A \subset E$ à valeurs dans $\mathbb{R}$, et $a \in \overline{A}$.

On suppose qu'il existe un voisinage U de a tel que $\forall x \in U \cap A,\ f(x) \leqslant g(x) \leqslant h(x)$.

On suppose également que $\lim\limits_{x \to a} f(x) = \ell$ et que $\lim\limits_{x \to a} h(x) = \ell$.

Alors $\lim\limits_{x \to a} g(x) = \ell$.

Démonstration

On écrit la définition de la limite :

$$\forall \varepsilon > 0,\ \exists V \in \mathscr{V}(a) \text{ tq } x \in V \cap A \Longrightarrow |f(x) - \ell| < \varepsilon \quad \text{et} \quad \exists W \in \mathscr{V}(a) \text{ tq } x \in W \cap A \Longrightarrow |h(x) - \ell| < \varepsilon$$

On a alors, pour tout $x \in U \cap V \cap W \cap A$ (ensemble qui n'est pas vide puisque $U \cap V \cap W$ est un voisinage de a et que $a \in \overline{A}$!) :

$$\ell - \varepsilon < f(x) \leqslant g(x) \leqslant h(x) < \ell + \varepsilon$$

Résultats spécifiques aux fonctions à valeurs réelles

Les résultats suivants ont été vus en Sup, mais seulement dans le cas des fonctions définies sur $\mathbb{R}$; ils utilisent la structure d'ordre sur $\mathbb{R}$.

On considère ici des applications définies sur une partie A d'un espace vectoriel normé E à valeurs dans $\mathbb{R}$, et a désigne un point adhérent à A. Les résultats s'étendent sans difficulté au cas où $E = \mathbb{R}$ et où $a = \pm\infty$.

Théorème 8: d'encadrement

Soient f, g, h définies sur $A \subset E$ à valeurs dans $\mathbb{R}$, et $a \in \overline{A}$.

On suppose qu'il existe un voisinage U de a tel que $\forall\, x \in U \cap A,\ f(x) \leqslant g(x) \leqslant h(x)$.

On suppose également que $\lim\limits_{x \to a} f(x) = \ell$ et que $\lim\limits_{x \to a} h(x) = \ell$.

Alors $\lim\limits_{x \to a} g(x) = \ell$.

Démonstration

On écrit la définition de la limite :

$$\forall\, \varepsilon > 0,\ \exists\, V \in \mathscr{V}(a) \text{ tq } x \in V \cap A \Longrightarrow |f(x) - \ell| < \varepsilon \quad \text{et} \quad \exists\, W \in \mathscr{V}(a) \text{ tq } x \in W \cap A \Longrightarrow |h(x) - \ell| < \varepsilon$$

On a alors, pour tout $x \in U \cap V \cap W \cap A$ (ensemble qui n'est pas vide puisque $U \cap V \cap W$ est un voisinage de a et que $a \in \overline{A}$!) :

$$\ell - \varepsilon < f(x) \leqslant g(x) \leqslant h(x) < \ell + \varepsilon$$

donc, pour $x \in U \cap V \cap W \cap A$, $|g(x) - \ell| < \varepsilon$, ce qui prouve que la limite de g quand x tend vers a existe et est égale à ℓ.

Résultats spécifiques aux fonctions à valeurs réelles

Théorème 9: prolongement des inégalités

Soient f, g définies sur $A \subset E$ à valeurs dans $\mathbb{R}$, et $a \in \overline{A}$.

On suppose qu'il existe un voisinage U de a tel que $\forall\, x \in U \cap A,\ f(x) \leqslant g(x)$.

On suppose également que $\lim\limits_{x \to a} f(x) = \ell$ et que $\lim\limits_{x \to a} g(x) = \ell'$.

Alors : $\ell \leqslant \ell'$.

Résultats spécifiques aux fonctions à valeurs réelles

Théorème 9: prolongement des inégalités

Soient f, g définies sur $A \subset E$ à valeurs dans $\mathbb{R}$, et $a \in \overline{A}$.

On suppose qu'il existe un voisinage U de a tel que $\forall\, x \in U \cap A,\ f(x) \leqslant g(x)$.

On suppose également que $\lim\limits_{x \to a} f(x) = \ell$ et que $\lim\limits_{x \to a} g(x) = \ell'$.

Alors : $\ell \leqslant \ell'$.

Démonstration

On écrit la définition de la limite :

$$\forall\, \varepsilon > 0,\ \exists\, V \in \mathscr{V}(a) \text{ tq } x \in V \cap A \Longrightarrow |f(x) - \ell| < \varepsilon \quad \text{et} \quad \exists\, W \in \mathscr{V}(a) \text{ tq } x \in W \cap A \Longrightarrow \left|g(x) - \ell'\right| < \varepsilon$$

Résultats spécifiques aux fonctions à valeurs réelles

Théorème 9: prolongement des inégalités

Soient f, g définies sur $A \subset E$ à valeurs dans $\mathbb{R}$, et $a \in \overline{A}$.

On suppose qu'il existe un voisinage U de a tel que $\forall\, x \in U \cap A,\ f(x) \leqslant g(x)$.

On suppose également que $\lim\limits_{x \to a} f(x) = \ell$ et que $\lim\limits_{x \to a} g(x) = \ell'$.

Alors : $\ell \leqslant \ell'$.

Démonstration

On écrit la définition de la limite :

$$\forall\, \varepsilon > 0,\ \exists\, V \in \mathscr{V}(a) \text{ tq } x \in V \cap A \Longrightarrow |f(x) - \ell| < \varepsilon \quad \text{et} \quad \exists\, W \in \mathscr{V}(a) \text{ tq } x \in W \cap A \Longrightarrow \left|g(x) - \ell'\right| < \varepsilon$$

On a alors, pour tout $x \in U \cap V \cap W \cap A$ (ensemble qui n'est pas vide puisque $U \cap V \cap W$ est un voisinage de a et que $a \in \overline{A}$!) :

$$\ell - \varepsilon < f(x) \leqslant g(x) < \ell' + \varepsilon$$

Résultats spécifiques aux fonctions à valeurs réelles

Théorème 9: prolongement des inégalités

Soient f, g définies sur $A \subset E$ à valeurs dans $\mathbb{R}$, et $a \in \overline{A}$.

On suppose qu'il existe un voisinage U de a tel que $\forall\, x \in U \cap A,\ f(x) \leqslant g(x)$.

On suppose également que $\lim\limits_{x \to a} f(x) = \ell$ et que $\lim\limits_{x \to a} g(x) = \ell'$.

Alors : $\ell \leqslant \ell'$.

Démonstration

On écrit la définition de la limite :

$$\forall\, \varepsilon > 0,\ \exists\, V \in \mathscr{V}(a) \text{ tq } x \in V \cap A \Longrightarrow |f(x) - \ell| < \varepsilon \quad \text{et} \quad \exists\, W \in \mathscr{V}(a) \text{ tq } x \in W \cap A \Longrightarrow \left|g(x) - \ell'\right| < \varepsilon$$

On a alors, pour tout $x \in U \cap V \cap W \cap A$ (ensemble qui n'est pas vide puisque $U \cap V \cap W$ est un voisinage de a et que $a \in \overline{A}$!) :

$$\ell - \varepsilon < f(x) \leqslant g(x) < \ell' + \varepsilon$$

Donc $\ell - \varepsilon < \ell' + \varepsilon$ pour tout $\varepsilon > 0$, ce qui implique $\ell \leqslant \ell'$ (procéder par l'absurde : si $\ell > \ell'$, prendre $\varepsilon = \frac{\ell' - \ell}{2}$).

Résultats spécifiques aux fonctions à valeurs réelles

Théorème 9: prolongement des inégalités

Soient f, g définies sur $A \subset E$ à valeurs dans $\mathbb{R}$, et $a \in \overline{A}$.

On suppose qu'il existe un voisinage U de a tel que $\forall\, x \in U \cap A,\ f(x) \leqslant g(x)$.

On suppose également que $\lim\limits_{x \to a} f(x) = \ell$ et que $\lim\limits_{x \to a} g(x) = \ell'$.

Alors : $\ell \leqslant \ell'$.

Dans le cas d'une limite infinie, on démontre de la même manière le résultat suivant :

Proposition 2

Soient f, g définies sur A à valeurs dans $\mathbb{R}$, et $a \in \overline{A}$.

On suppose qu'il existe un voisinage U de a tel que $\forall\, x \in U \cap A,\ f(x) \leqslant g(x)$.

On suppose également que $\lim\limits_{x \to a} f(x) = +\infty$.

Alors $\lim\limits_{\substack{x \to a \\ x \in A}} g(x) = +\infty$.

Résultats spécifiques aux fonctions à valeurs réelles

Il y a une « réciproque » partielle **importante** au théorème de prolongement des inégalités :

Proposition 3

Soient f, g définies sur A à valeurs dans $\mathbb{R}$, et $a \in \overline{A}$.

On suppose que $\lim\limits_{x \to a} f(x) = \ell$ et que $\lim\limits_{x \to a} g(x) = \ell'$.

Si $\ell < \ell'$, il existe un voisinage U de a tel que $\forall\, x \in U \cap A,\ f(x) < g(x)$.

Résultats spécifiques aux fonctions à valeurs réelles

Il y a une « réciproque » partielle **importante** au théorème de prolongement des inégalités :

Proposition 3

Soient f, g définies sur A à valeurs dans $\mathbb{R}$, et $a \in \overline{A}$.

On suppose que $\lim\limits_{x\to a} f(x) = \ell$ et que $\lim\limits_{x\to a} g(x) = \ell'$.

Si $\ell < \ell'$, il existe un voisinage U de a tel que $\forall\, x \in U \cap A,\ f(x) < g(x)$.

Démonstration

On écrit la définition de la limite :

$$\forall\, \varepsilon > 0,\ \exists\, V \in \mathscr{V}(a) \text{ tq } x \in V \cap A \Longrightarrow |f(x) - \ell| < \varepsilon$$

et

$$\exists\, W \in \mathscr{V}(a) \text{ tq } x \in W \cap A \Longrightarrow \left|g(x) - \ell'\right| < \varepsilon$$

Résultats spécifiques aux fonctions à valeurs réelles

Il y a une « réciproque » partielle **importante** au théorème de prolongement des inégalités :

Proposition 3

Soient f, g définies sur A à valeurs dans $\mathbb{R}$, et $a \in \overline{A}$.

On suppose que $\lim\limits_{x \to a} f(x) = \ell$ et que $\lim\limits_{x \to a} g(x) = \ell'$.

Si $\ell < \ell'$, il existe un voisinage U de a tel que $\forall\, x \in U \cap A,\ f(x) < g(x)$.

Démonstration

On écrit la définition de la limite :

$$\forall\, \varepsilon > 0,\ \exists\, V \in \mathscr{V}(a) \text{ tq } x \in V \cap A \Longrightarrow |f(x) - \ell| < \varepsilon$$

et

$$\exists\, W \in \mathscr{V}(a) \text{ tq } x \in W \cap A \Longrightarrow \left|g(x) - \ell'\right| < \varepsilon$$

On applique alors cette définition avec $\varepsilon = \frac{\ell' - \ell}{2}$ (qui est bien un réel > 0). On a alors, pour tout $x \in V \cap W \cap A$:

Résultats spécifiques aux fonctions à valeurs réelles

Il y a une « réciproque » partielle **importante** au théorème de prolongement des inégalités :

Proposition 3

Soient f, g définies sur A à valeurs dans $\mathbb{R}$, et $a \in \overline{A}$.

On suppose que $\lim_{x \to a} f(x) = \ell$ et que $\lim_{x \to a} g(x) = \ell'$.

Si $\ell < \ell'$, il existe un voisinage U de a tel que $\forall\, x \in U \cap A,\ f(x) < g(x)$.

Démonstration

On écrit la définition de la limite :

$$\forall\, \varepsilon > 0,\ \exists\, V \in \mathscr{V}(a) \text{ tq } x \in V \cap A \Longrightarrow |f(x) - \ell| < \varepsilon$$

et

$$\exists\, W \in \mathscr{V}(a) \text{ tq } x \in W \cap A \Longrightarrow \left|g(x) - \ell'\right| < \varepsilon$$

On applique alors cette définition avec $\varepsilon = \frac{\ell' - \ell}{2}$ (qui est bien un réel > 0). On a alors, pour tout $x \in V \cap W \cap A$:

$$f(x) < \ell + \varepsilon = \frac{\ell + \ell'}{2} = \ell' - \varepsilon < g(x)$$

Résultats spécifiques aux fonctions à valeurs réelles

Il y a une « réciproque » partielle **importante** au théorème de prolongement des inégalités :

Proposition 3

Soient f, g définies sur A à valeurs dans $\mathbb{R}$, et $a \in \overline{A}$.

On suppose que $\lim\limits_{x \to a} f(x) = \ell$ et que $\lim\limits_{x \to a} g(x) = \ell'$.

Si $\ell < \ell'$, il existe un voisinage U de a tel que $\forall\, x \in U \cap A,\ f(x) < g(x)$.

Démonstration

On écrit la définition de la limite :

$$\forall\, \varepsilon > 0,\ \exists\, V \in \mathscr{V}(a) \text{ tq } x \in V \cap A \Longrightarrow |f(x) - \ell| < \varepsilon$$

et

$$\exists\, W \in \mathscr{V}(a) \text{ tq } x \in W \cap A \Longrightarrow \left|g(x) - \ell'\right| < \varepsilon$$

On applique alors cette définition avec $\varepsilon = \frac{\ell' - \ell}{2}$ (qui est bien un réel > 0). On a alors, pour tout $x \in V \cap W \cap A$:

$$f(x) < \ell + \varepsilon = \frac{\ell + \ell'}{2} = \ell' - \varepsilon < g(x)$$

ce qui donne le résultat voulu avec $U = V \cap W$ (qui est bien un voisinage de a).

Résultats spécifiques aux fonctions à valeurs réelles

Enfin, pour une fonction numérique de la variable réelle, il n'est pas inutile de rappeler le théorème suivant, que l'on utilisera souvent par la suite :

Théorème 10: de la limite monotone

Soit $f :]a\,;b[\longrightarrow \mathbb{R}$ (avec $-\infty \leqslant a < b \leqslant +\infty$). On suppose f **croissante** sur $]a\,;b[$.

1. - Si f est majorée, $f(x)$ admet une limite finie quand x tend vers b^-, et $\lim\limits_{x \to b^-} f(x) = \sup\limits_{]a;b[} f$.
   - Si f n'est pas majorée, $\lim\limits_{x \to b^-} f(x) = \sup\limits_{]a;b[} f = +\infty$.
2. - Si f est minorée, $f(x)$ admet une limite finie quand x tend vers a^+, et $\lim\limits_{x \to a^+} f(x) = \inf\limits_{]a;b[} f$.
   - Si f n'est pas minorée, $\lim\limits_{x \to a^+} f(x) = \inf\limits_{]a;b[} f = -\infty$.
3. En tout point $x_0 \in]a\,;b[$, f admet une limite à droite et une limite à gauche, et $\lim\limits_{x \to x_0^-} f(x) \leqslant f(x_0) \leqslant \lim\limits_{x \to x_0^+} f(x)$.

Résultats spécifiques aux fonctions à valeurs réelles

Enfin, pour une fonction numérique de la variable réelle, il n'est pas inutile de rappeler le théorème suivant, que l'on utilisera souvent par la suite :

Théorème 10: de la limite monotone

Soit $f :]a\,;b[\longrightarrow \mathbb{R}$ (avec $-\infty \leqslant a < b \leqslant +\infty$). On suppose f **croissante** sur $]a\,;b[$.

1.
   - Si f est majorée, $f(x)$ admet une limite finie quand x tend vers b^-, et $\lim\limits_{x\to b^-} f(x) = \sup\limits_{]a;b[} f$.
   - Si f n'est pas majorée, $\lim\limits_{x\to b^-} f(x) = \sup\limits_{]a;b[} f = +\infty$.
2.
   - Si f est minorée, $f(x)$ admet une limite finie quand x tend vers a^+, et $\lim\limits_{x\to a^+} f(x) = \inf\limits_{]a;b[} f$.
   - Si f n'est pas minorée, $\lim\limits_{x\to a^+} f(x) = \inf\limits_{]a;b[} f = -\infty$.
3. En tout point $x_0 \in]a\,;b[$, f admet une limite à droite et une limite à gauche, et $\lim\limits_{x\to x_0^-} f(x) \leqslant f(x_0) \leqslant \lim\limits_{x\to x_0^+} f(x)$.

Remarques :

1. On obtient des résultats similaires si on suppose f **décroissante** sur $]a\,;b[$.

   Par exemple : si f est décroissante sur $]a\,;b[$, elle admet une limite à gauche en b si et seulement si elle est minorée et une limite à droite en a si et seulement si elle est majorée.

Résultats spécifiques aux fonctions à valeurs réelles

Enfin, pour une fonction numérique de la variable réelle, il n'est pas inutile de rappeler le théorème suivant, que l'on utilisera souvent par la suite :

Théorème 10: de la limite monotone

Soit $f :]a\,;b[\longrightarrow \mathbb{R}$ (avec $-\infty \leqslant a < b \leqslant +\infty$). On suppose f **croissante** sur $]a\,;b[$.

1. - Si f est majorée, $f(x)$ admet une limite finie quand x tend vers b^-, et $\lim\limits_{x \to b^-} f(x) = \sup\limits_{]a;b[} f$.
   - Si f n'est pas majorée, $\lim\limits_{x \to b^-} f(x) = \sup\limits_{]a;b[} f = +\infty$.
2. - Si f est minorée, $f(x)$ admet une limite finie quand x tend vers a^+, et $\lim\limits_{x \to a^+} f(x) = \inf\limits_{]a;b[} f$.
   - Si f n'est pas minorée, $\lim\limits_{x \to a^+} f(x) = \inf\limits_{]a;b[} f = -\infty$.
3. En tout point $x_0 \in]a\,;b[$, f admet une limite à droite et une limite à gauche, et $\lim\limits_{x \to x_0^-} f(x) \leqslant f(x_0) \leqslant \lim\limits_{x \to x_0^+} f(x)$.

Remarques :

1. On obtient des résultats similaires si on suppose f **décroissante** sur $]a\,;b[$.

   Par exemple : si f est décroissante sur $]a\,;b[$, elle admet une limite à gauche en b si et seulement si elle est minorée et une limite à droite en a si et seulement si elle est majorée.
2. Ce théorème permet de calculer les bornes sup et inf d'une fonction simplement à partir de son tableau de variations.

CONTINUITÉ

Continuité en un point

Définition 2

Soient E et F deux espaces vectoriels normés, A une partie non vide de E, f une application de A dans F. Soit a **appartenant à** A. On dit que $\underline{f \text{ est continue en } a}$ si sa limite en a existe (et elle vaut alors nécessairement $f(a)$). Cela équivaut à : $\lim\limits_{\substack{x \to a \\ x \neq a}} f(x) = f(a)$.

Continuité en un point

Définition 2

Soient E et F deux espaces vectoriels normés, A une partie non vide de E, f une application de A dans F. Soit a **appartenant à** A. On dit que f est continue en a si sa limite en a existe (et elle vaut alors nécessairement $f(a)$). Cela équivaut à : $\lim\limits_{\substack{x \to a \\ x \neq a}} f(x) = f(a)$.

Remarques :

1. Dire que f est continue en a peut s'écrire :

$$\forall \varepsilon > 0,\ \exists \alpha > 0 \text{ tel que } \forall x \in A,\ \|x - a\|_E < \alpha \Longrightarrow \|f(x) - f(a)\|_F < \varepsilon$$

ou encore :

$$\forall V \in \mathscr{V}(f(a)),\ \exists U \in \mathscr{V}(a) \text{ tel que } f(U \cap A) \subset V.$$

Continuité en un point

Définition 2

Soient E et F deux espaces vectoriels normés, A une partie non vide de E, f une application de A dans F. Soit a **appartenant à** A. On dit que f est continue en a si sa limite en a existe (et elle vaut alors nécessairement $f(a)$). Cela équivaut à : $\lim\limits_{\substack{x\to a\\ x\neq a}} f(x) = f(a)$.

Remarques :

1. Dire que f est continue en a peut s'écrire :
$$\forall\, \varepsilon > 0,\ \exists\, \alpha > 0 \text{ tel que } \forall\, x \in A,\ \|x-a\|_E < \alpha \Longrightarrow \|f(x)-f(a)\|_F < \varepsilon$$
ou encore :
$$\forall\, V \in \mathscr{V}(f(a)),\ \exists\, U \in \mathscr{V}(a) \text{ tel que } f(U\cap A) \subset V.$$
2. La notion de voisinage étant une notion topologique, l'écriture précédente montre que la notion de continuité est inchangée si on remplace l'une des normes (dans E ou F) par une norme équivalente.

Continuité en un point

Définition 2

Soient E et F deux espaces vectoriels normés, A une partie non vide de E, f une application de A dans F. Soit a **appartenant à** A. On dit que f est continue en a si sa limite en a existe (et elle vaut alors nécessairement $f(a)$). Cela équivaut à : $\lim\limits_{\substack{x \to a \\ x \neq a}} f(x) = f(a)$.

Remarques :

1. Dire que f est continue en a peut s'écrire :
$$\forall\, \varepsilon > 0,\ \exists\, \alpha > 0 \text{ tel que } \forall\, x \in A,\ \|x - a\|_E < \alpha \Longrightarrow \|f(x) - f(a)\|_F < \varepsilon$$
ou encore :
$$\forall\, V \in \mathscr{V}(f(a)),\ \exists\, U \in \mathscr{V}(a) \text{ tel que } f(U \cap A) \subset V.$$
2. La notion de voisinage étant une notion topologique, l'écriture précédente montre que la notion de continuité est inchangée si on remplace l'une des normes (dans E ou F) par une norme équivalente.

Définition 3

Si f est définie sur $A \setminus \{a\}$ avec $a \in \overline{A}$ et si $\ell = \lim\limits_{\substack{x \to a \\ x \neq a}} f(x)$ existe, on peut définir une application
$$\widehat{f} : \left\{ \begin{array}{ccc} A \cup \{a\} & \longrightarrow & F \\ x & \longmapsto & \begin{cases} f(x) & \text{si } x \neq a \\ \ell & \text{si } x = a \end{cases} \end{array} \right. .$$
$\widehat{f}$ est évidemment continue en a et s'appelle le prolongement par continuité de f en a

Théorème 11: caractérisation séquentielle de la continuité

Soient E et F deux espaces vectoriels normés, A une partie non vide de E, f une application de A dans F, et $a \in A$.

f est continue en a si et seulement si pour toute suite (a_n) d'éléments de A qui converge vers a, la suite $f(a_n)$ converge vers $f(a)$.

Théorème 11: caractérisation séquentielle de la continuité

Soient E et F deux espaces vectoriels normés, A une partie non vide de E, f une application de A dans F, et $a \in A$.

f est continue en a si et seulement si pour toute suite (a_n) d'éléments de A qui converge vers a, la suite $f(a_n)$ converge vers $f(a)$.

Démonstration

C'est une conséquence directe de la définition de la limite et du théorème 3 (caractérisation séquentielle de la limite).

Théorème 11: caractérisation séquentielle de la continuité

Soient E et F deux espaces vectoriels normés, A une partie non vide de E, f une application de A dans F, et $a \in A$.

f est continue en a si et seulement si pour toute suite (a_n) d'éléments de A qui converge vers a, la suite $f(a_n)$ converge vers $f(a)$.

Comme conséquences des théorèmes concernant les opérations sur les limites, on obtient directement :

Théorème 12

1. Soient E et F deux espaces vectoriels normés, A une partie non vide de E, f et g deux applications de A dans F, et $a \in A$.

   Si f et g sont continues en a, alors $f + g$ est continue en a.
2. Soient E et F deux espaces vectoriels normés, A une partie non vide de E, f une application de A dans F, φ une application de A dans $\mathbb{K}$ et $a \in A$.

   Si f et φ sont continues en a, alors l'application $\varphi.f$ est continue en a.
3. Soit E un espace vectoriel normé, A une partie non vide de E, f et g deux applications de A dans $\mathbb{K}$ et $a \in A$.

   Si f et g sont continues en a et si $g(a) \neq 0$, alors $\frac{f}{g}$ est continue en a.
4. Soient E,F,G trois espaces vectoriels normés, A une partie de E et B une partie de F.
   Soit $f \in \mathcal{A}(A, F)$ telle que $f(A) \subset B$, et $g \in \mathcal{A}(B, G)$

   Si f est continue en $a \in A$ et si g est continue en $f(a)$, alors $g \circ f$ est continue en a.

Continuité globale

Définition 4

Soient E et F deux espaces vectoriels normés, A une partie non vide de E, f une application de A dans F.

On dira que $\underline{f \text{ est continue sur } A}$ si elle est continue en tout point $a \in A$.

L'ensemble des applications continues sur A et à valeurs dans F se note $\mathscr{C}(A, F)$.

Continuité globale

Définition 4

Soient E et F deux espaces vectoriels normés, A une partie non vide de E, f une application de A dans F.

On dira que f est continue sur A si elle est continue en tout point $a \in A$.

L'ensemble des applications continues sur A et à valeurs dans F se note $\mathscr{C}(A, F)$.

En utilisant les théorèmes concernant les opérations sur les limites, on obtient directement le résultat suivant :

Théorème 13

$\mathscr{C}(A, F)$ est un sous-espace vectoriel de $\mathcal{A}(A, F)$.

Continuité globale

Définition 4

Soient E et F deux espaces vectoriels normés, A une partie non vide de E, f une application de A dans F.

On dira que f est continue sur A si elle est continue en tout point $a \in A$.

L'ensemble des applications continues sur A et à valeurs dans F se note $\mathscr{C}(A, F)$.

En utilisant les théorèmes concernant les opérations sur les limites, on obtient directement le résultat suivant :

Théorème 13

$\mathscr{C}(A, F)$ est un sous-espace vectoriel de $\mathcal{A}(A, F)$.

Un cas particulier important d'applications continues sur une partie est le suivant :

Définition 5

Soient E et F deux espaces vectoriels normés, A une partie non vide de E, f une application de A dans F.

On dit que f est lipschitzienne sur A s'il existe un réel $k \geqslant 0$ tel que :

$$\forall (x, y) \in A^2 \ , \ \|f(x) - f(y)\|_F \leqslant k \|x - y\|_E \ .$$

On dit alors que f est k-lipschitzienne (k n'est pas unique !)

Remarques :

1. Si l'on remplace l'une des normes par une norme équivalente, le fait que f est lipschitzienne est inchangé, mais le rapport k est modifié.

Remarques :

1. Si l'on remplace l'une des normes par une norme équivalente, le fait que f est lipschitzienne est inchangé, mais le rapport k est modifié.
2. Lorsque $E = \mathbb{R}$ et f de classe $\mathscr{C}^1$, pour que f soit k-lipschitzienne sur A il faut et il suffit que f' soit bornée sur A, en vertu de l'inégalité des accroissements finis.

Remarques :

1. Si l'on remplace l'une des normes par une norme équivalente, le fait que f est lipschitzienne est inchangé, mais le rapport k est modifié.
2. Lorsque $E = \mathbb{R}$ et f de classe $\mathscr{C}^1$, pour que f soit k-lipschitzienne sur A il faut et il suffit que f' soit bornée sur A, en vertu de l'inégalité des accroissements finis.

Proposition 4

Avec les mêmes notations, si f est lipschitzienne sur A, alors f est continue sur A.

Remarques :

1. Si l'on remplace l'une des normes par une norme équivalente, le fait que f est lipschitzienne est inchangé, mais le rapport k est modifié.
2. Lorsque $E = \mathbb{R}$ et f de classe $\mathscr{C}^1$, pour que f soit k-lipschitzienne sur A il faut et il suffit que f' soit bornée sur A, en vertu de l'inégalité des accroissements finis.

Proposition 4

Avec les mêmes notations, si f est lipschitzienne sur A, alors f est continue sur A.

Démonstration

Immédiat car, compte tenu de l'inégalité $\|f(x) - f(y)\|_F \leqslant k\,\|x - y\|_E$ on a $\lim\limits_{y \to x} f(y) = f(x)$.

Remarques :

1. Si l'on remplace l'une des normes par une norme équivalente, le fait que f est lipschitzienne est inchangé, mais le rapport k est modifié.
2. Lorsque $E = \mathbb{R}$ et f de classe $\mathscr{C}^1$, pour que f soit k-lipschitzienne sur A il faut et il suffit que f' soit bornée sur A, en vertu de l'inégalité des accroissements finis.

Proposition 4

Avec les mêmes notations, si f est lipschitzienne sur A, alors f est continue sur A.

Démonstration

Immédiat car, compte tenu de l'inégalité $\|f(x) - f(y)\|_F \leqslant k\,\|x - y\|_E$ on a $\lim\limits_{y \to x} f(y) = f(x)$.

Remarque : Il existe cependant des applications continues et non lipschitziennes, comme le montre l'exemple de la fonction $x \mapsto \sqrt{x}$ sur $\mathbb{R}_+$.

Remarques :

1. Si l'on remplace l'une des normes par une norme équivalente, le fait que f est lipschitzienne est inchangé, mais le rapport k est modifié.
2. Lorsque $E = \mathbb{R}$ et f de classe $\mathscr{C}^1$, pour que f soit k-lipschitzienne sur A il faut et il suffit que f' soit bornée sur A, en vertu de l'inégalité des accroissements finis.

Proposition 4

Avec les mêmes notations, si f est lipschitzienne sur A, alors f est continue sur A.

Démonstration

Immédiat car, compte tenu de l'inégalité $\|f(x) - f(y)\|_F \leqslant k \|x - y\|_E$ on a $\lim\limits_{y \to x} f(y) = f(x)$.

Remarque : Il existe cependant des applications continues et non lipschitziennes, comme le montre l'exemple de la fonction $x \mapsto \sqrt{x}$ sur $\mathbb{R}_+$.

Corollaire: *cas particulier important*

L'application « norme » $\begin{array}{rcl} E & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ x & \longmapsto & \|x\|_E \end{array}$ est continue.

Remarques :

1. Si l'on remplace l'une des normes par une norme équivalente, le fait que f est lipschitzienne est inchangé, mais le rapport k est modifié.
2. Lorsque $E = \mathbb{R}$ et f de classe $\mathscr{C}^1$, pour que f soit k-lipschitzienne sur A il faut et il suffit que f' soit bornée sur A, en vertu de l'inégalité des accroissements finis.

Proposition 4

Avec les mêmes notations, si f est lipschitzienne sur A, alors f est continue sur A.

Démonstration

Immédiat car, compte tenu de l'inégalité $\|f(x) - f(y)\|_F \leqslant k\,\|x - y\|_E$ on a $\lim\limits_{y \to x} f(y) = f(x)$.

Remarque : Il existe cependant des applications continues et non lipschitziennes, comme le montre l'exemple de la fonction $x \mapsto \sqrt{x}$ sur $\mathbb{R}_+$.

Corollaire: *cas particulier important*

> L'application « norme » $\begin{array}{rcl} E & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ x & \longmapsto & \|x\|_E \end{array}$ est continue.

Démonstration

En effet, en vertu de l'inégalité triangulaire : $\forall\,(x, y) \in E^2,\ \Big|\|x\| - \|y\|\Big| \leqslant \|x - y\|$, l'application *norme* est donc lipschitzienne de rapport 1.

Théorème 14

Soient E et F deux espaces vectoriels normés, et f une application **continue** de E dans F. Alors :

a) l'image réciproque par f de tout ouvert de F est un ouvert de E.

b) l'image réciproque par f de tout fermé de F est un fermé de E.

Théorème 14

Soient E et F deux espaces vectoriels normés, et f une application **continue** de E dans F. Alors :

a) l'image réciproque par f de tout ouvert de F est un ouvert de E.

b) l'image réciproque par f de tout fermé de F est un fermé de E.

Démonstration

- **a)** $\Longleftrightarrow$ **b)** car, si B est une partie de F, $f^{-1}(F \setminus B) = E \setminus f^{-1}(B)$;

Théorème 14

Soient E et F deux espaces vectoriels normés, et f une application **continue** de E dans F. Alors :

a) l'image réciproque par f de tout ouvert de F est un ouvert de E.

b) l'image réciproque par f de tout fermé de F est un fermé de E.

Démonstration

- **a)** $\Longleftrightarrow$ **b)** car, si B est une partie de F, $f^{-1}(F \setminus B) = E \setminus f^{-1}(B)$; en effet :
  $x \in f^{-1}(F \setminus B) \Longleftrightarrow f(x) \in F \setminus B \Longleftrightarrow f(x) \notin B \Longleftrightarrow x \notin f^{-1}(B) \Longleftrightarrow x \in E \setminus f^{-1}(B)$.

Théorème 14

Soient E et F deux espaces vectoriels normés, et f une application **continue** de E dans F. Alors :

a) l'image réciproque par f de tout ouvert de F est un ouvert de E.

b) l'image réciproque par f de tout fermé de F est un fermé de E.

Démonstration

- **a)** $\Longleftrightarrow$ **b)** car, si B est une partie de F, $f^{-1}(F \setminus B) = E \setminus f^{-1}(B)$; en effet :

  $$x \in f^{-1}(F \setminus B) \Longleftrightarrow f(x) \in F \setminus B \Longleftrightarrow f(x) \notin B \Longleftrightarrow x \notin f^{-1}(B) \Longleftrightarrow x \in E \setminus f^{-1}(B).$$

- Démontrons alors **b)** : supposons donc f continue sur E, soit B un fermé de F, et $A = f^{-1}(B)$.

Théorème 14

Soient E et F deux espaces vectoriels normés, et f une application **continue** de E dans F. Alors :

a) l'image réciproque par f de tout ouvert de F est un ouvert de E.

b) l'image réciproque par f de tout fermé de F est un fermé de E.

Démonstration

- **a)** $\Longleftrightarrow$ **b)** car, si B est une partie de F, $f^{-1}(F \setminus B) = E \setminus f^{-1}(B)$; en effet :
$$x \in f^{-1}(F \setminus B) \Longleftrightarrow f(x) \in F \setminus B \Longleftrightarrow f(x) \notin B \Longleftrightarrow x \notin f^{-1}(B) \Longleftrightarrow x \in E \setminus f^{-1}(B).$$
- Démontrons alors **b)** : supposons donc f continue sur E, soit B un fermé de F, et $A = f^{-1}(B)$.
    - Si $A = \emptyset$, A est bien un fermé !

Théorème 14

Soient E et F deux espaces vectoriels normés, et f une application **continue** de E dans F. Alors :

a) l'image réciproque par f de tout ouvert de F est un ouvert de E.

b) l'image réciproque par f de tout fermé de F est un fermé de E.

Démonstration

- **a)** $\Longleftrightarrow$ **b)** car, si B est une partie de F, $f^{-1}(F \setminus B) = E \setminus f^{-1}(B)$; en effet :
  $x \in f^{-1}(F \setminus B) \Longleftrightarrow f(x) \in F \setminus B \Longleftrightarrow f(x) \notin B \Longleftrightarrow x \notin f^{-1}(B) \Longleftrightarrow x \in E \setminus f^{-1}(B)$.
- Démontrons alors **b)** : supposons donc f continue sur E, soit B un fermé de F, et $A = f^{-1}(B)$.
  - Si $A = \emptyset$, A est bien un fermé !
  - Sinon, pour prouver que A est fermé, on utilise la caractérisation séquentielle.

Théorème 14

Soient E et F deux espaces vectoriels normés, et f une application **continue** de E dans F. Alors :

a) l'image réciproque par f de tout ouvert de F est un ouvert de E.

b) l'image réciproque par f de tout fermé de F est un fermé de E.

Démonstration

- **a)** $\iff$ **b)** car, si B est une partie de F, $f^{-1}(F \setminus B) = E \setminus f^{-1}(B)$; en effet :

  $x \in f^{-1}(F \setminus B) \iff f(x) \in F \setminus B \iff f(x) \notin B \iff x \notin f^{-1}(B) \iff x \in E \setminus f^{-1}(B).$

- Démontrons alors **b)** : supposons donc f continue sur E, soit B un fermé de F, et $A = f^{-1}(B)$.
  - Si $A = \emptyset$, A est bien un fermé !
  - Sinon, pour prouver que A est fermé, on utilise la caractérisation séquentielle.

    Soit (a_n) une suite d'éléments de $A = f^{-1}(B)$ qui converge vers $a \in E$. Alors la suite de terme général $b_n = f(a_n)$ est une suite d'éléments de B, et elle converge vers $f(a)$ puisque f est continue.

Théorème 14

Soient E et F deux espaces vectoriels normés, et f une application **continue** de E dans F. Alors :

a) l'image réciproque par f de tout ouvert de F est un ouvert de E.

b) l'image réciproque par f de tout fermé de F est un fermé de E.

Démonstration

- **a)** $\Longleftrightarrow$ **b)** car, si B est une partie de F, $f^{-1}(F \setminus B) = E \setminus f^{-1}(B)$; en effet :
  $x \in f^{-1}(F \setminus B) \Longleftrightarrow f(x) \in F \setminus B \Longleftrightarrow f(x) \notin B \Longleftrightarrow x \notin f^{-1}(B) \Longleftrightarrow x \in E \setminus f^{-1}(B)$.
- Démontrons alors **b)** : supposons donc f continue sur E, soit B un fermé de F, et $A = f^{-1}(B)$.
  - Si $A = \emptyset$, A est bien un fermé !
  - Sinon, pour prouver que A est fermé, on utilise la caractérisation séquentielle.

    Soit (a_n) une suite d'éléments de $A = f^{-1}(B)$ qui converge vers $a \in E$. Alors la suite de terme général $b_n = f(a_n)$ est une suite d'éléments de B, et elle converge vers $f(a)$ puisque f est continue. B étant un fermé, on a $f(a) \in B$ (caractérisation séquentielle), donc finalement $a \in f^{-1}(B) = A$, cqfd.

Exemples

1. Soit : $\mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$, continue. Alors (par exemple) :

$$\{x \in \mathbb{R} \mid f(x) > 0\} \text{ est un ouvert de } \mathbb{R}.$$

$$\{x \in \mathbb{R} \mid f(x) \geqslant 0\} \text{ et } \{x \in \mathbb{R} \mid f(x) = 0\} \text{ sont des fermés de } \mathbb{R}.$$

Exemples

1. Soit : $\mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$, continue. Alors (par exemple) :

$$\{x \in \mathbb{R} \mid f(x) > 0\} \text{ est un ouvert de } \mathbb{R}.$$

$$\{x \in \mathbb{R} \mid f(x) \geqslant 0\} \text{ et } \{x \in \mathbb{R} \mid f(x) = 0\} \text{ sont des fermés de } \mathbb{R}.$$

Démonstration

En effet, le premier de ces ensembles est l'image réciproque, par l'application continue f, de l'intervalle $]0\,;+\infty[$ qui est un ouvert de $\mathbb{R}$,

Exemples

1. Soit : $\mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$, continue. Alors (par exemple) :

$$\{x \in \mathbb{R} \mid f(x) > 0\} \text{ est un ouvert de } \mathbb{R}.$$

$$\{x \in \mathbb{R} \mid f(x) \geqslant 0\} \text{ et } \{x \in \mathbb{R} \mid f(x) = 0\} \text{ sont des fermés de } \mathbb{R}.$$

Démonstration

En effet, le premier de ces ensembles est l'image réciproque, par l'application continue f, de l'intervalle $]0\,;+\infty[$ qui est un ouvert de $\mathbb{R}$, le second celle de l'intervalle $[0\,;+\infty[$, qui est un fermé de $\mathbb{R}$

Exemples

1. Soit : $\mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$, continue. Alors (par exemple) :

$$\{x \in \mathbb{R} \mid f(x) > 0\} \text{ est un ouvert de } \mathbb{R}.$$

$$\{x \in \mathbb{R} \mid f(x) \geqslant 0\} \text{ et } \{x \in \mathbb{R} \mid f(x) = 0\} \text{ sont des fermés de } \mathbb{R}.$$

Démonstration

En effet, le premier de ces ensembles est l'image réciproque, par l'application continue f, de l'intervalle $]0\,;+\infty[$ qui est un ouvert de $\mathbb{R}$, le second celle de l'intervalle $[0\,;+\infty[$, qui est un fermé de $\mathbb{R}$ et le troisième celle du singleton $\{0\}$qui est un fermé de $\mathbb{R}$.

Exemples

1. Soit : $\mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$, continue. Alors (par exemple) :

$$\{x \in \mathbb{R} \mid f(x) > 0\} \text{ est un ouvert de } \mathbb{R}.$$

$$\{x \in \mathbb{R} \mid f(x) \geqslant 0\} \text{ et } \{x \in \mathbb{R} \mid f(x) = 0\} \text{ sont des fermés de } \mathbb{R}.$$

2. Soient $f, g : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$, continues. Alors (par exemple) :

$$\{x \in \mathbb{R} \mid f(x) < g(x)\} \text{ est un ouvert de } \mathbb{R} \ ; \quad \{x \in \mathbb{R} \mid f(x) \leqslant g(x)\} \text{ est un fermé de } \mathbb{R}.$$

Exemples

1. Soit : $\mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$, continue. Alors (par exemple) :
$$\{x \in \mathbb{R} \mid f(x) > 0\} \text{ est un ouvert de } \mathbb{R}.$$
$$\{x \in \mathbb{R} \mid f(x) \geqslant 0\} \text{ et } \{x \in \mathbb{R} \mid f(x) = 0\} \text{ sont des fermés de } \mathbb{R}.$$
2. Soient $f, g : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$, continues. Alors (par exemple) :
$$\{x \in \mathbb{R} \mid f(x) < g(x)\} \text{ est un ouvert de } \mathbb{R}\ ; \quad \{x \in \mathbb{R} \mid f(x) \leqslant g(x)\} \text{ est un fermé de } \mathbb{R}.$$

Démonstration

En effet, le premier de ces ensembles est l'image réciproque, par l'application continue $f - g$, de l'intervalle $]-\infty\,; 0[$ qui est un ouvert de $\mathbb{R}$,

Exemples

1. Soit : $\mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$, continue. Alors (par exemple) :
$$\{x \in \mathbb{R} \mid f(x) > 0\} \text{ est un ouvert de } \mathbb{R}.$$
$$\{x \in \mathbb{R} \mid f(x) \geqslant 0\} \text{ et } \{x \in \mathbb{R} \mid f(x) = 0\} \text{ sont des fermés de } \mathbb{R}.$$

2. Soient $f, g : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$, continues. Alors (par exemple) :
$$\{x \in \mathbb{R} \mid f(x) < g(x)\} \text{ est un ouvert de } \mathbb{R} \ ; \quad \{x \in \mathbb{R} \mid f(x) \leqslant g(x)\} \text{ est un fermé de } \mathbb{R}.$$

Démonstration

En effet, le premier de ces ensembles est l'image réciproque, par l'application continue $f - g$, de l'intervalle $]-\infty\,;0[$ qui est un ouvert de $\mathbb{R}$, et le second celle de l'intervalle $]-\infty\,;0]$, qui est un fermé de $\mathbb{R}$.

Exemples

1. Soit : $\mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$, continue. Alors (par exemple) :

$$\{x \in \mathbb{R} \mid f(x) > 0\} \text{ est un ouvert de } \mathbb{R}.$$

$$\{x \in \mathbb{R} \mid f(x) \geqslant 0\} \text{ et } \{x \in \mathbb{R} \mid f(x) = 0\} \text{ sont des fermés de } \mathbb{R}.$$

2. Soient $f, g : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$, continues. Alors (par exemple) :

$$\{x \in \mathbb{R} \mid f(x) < g(x)\} \text{ est un ouvert de } \mathbb{R} \ ; \quad \{x \in \mathbb{R} \mid f(x) \leqslant g(x)\} \text{ est un fermé de } \mathbb{R}.$$

3. Soit $f \in \mathscr{C}(\mathbb{R}, \mathbb{R})$ et soient

$$\Gamma = \left\{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \;\middle|\; y = f(x)\right\} \text{ le graphe de } f$$

$$\mathscr{E} = \left\{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \;\middle|\; y \geqslant f(x)\right\} \quad \text{et} \quad \mathscr{E}' = \left\{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \;\middle|\; y > f(x)\right\}$$

Alors Γ et $\mathscr{E}$ sont des parties fermées de $\mathbb{R}^2$ et $\mathscr{E}'$ est une partie ouverte de $\mathbb{R}^2$.

Exemples

1. Soit : $\mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$, continue. Alors (par exemple) :
$$\{x \in \mathbb{R} \mid f(x) > 0\} \text{ est un ouvert de } \mathbb{R}.$$
$$\{x \in \mathbb{R} \mid f(x) \geqslant 0\} \text{ et } \{x \in \mathbb{R} \mid f(x) = 0\} \text{ sont des fermés de } \mathbb{R}.$$
2. Soient $f, g : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$, continues. Alors (par exemple) :
$$\{x \in \mathbb{R} \mid f(x) < g(x)\} \text{ est un ouvert de } \mathbb{R} \ ; \quad \{x \in \mathbb{R} \mid f(x) \leqslant g(x)\} \text{ est un fermé de } \mathbb{R}.$$
3. Soit $f \in \mathscr{C}(\mathbb{R}, \mathbb{R})$ et soient
$$\Gamma = \left\{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \;\middle|\; y = f(x)\right\} \text{ le graphe de } f$$
$$\mathscr{E} = \left\{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \;\middle|\; y \geqslant f(x)\right\} \quad \text{et} \quad \mathscr{E}' = \left\{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \;\middle|\; y > f(x)\right\}$$

Alors Γ et $\mathscr{E}$ sont des parties fermées de $\mathbb{R}^2$ et $\mathscr{E}'$ est une partie ouverte de $\mathbb{R}^2$.

Démonstration

Considérons $\varphi : \begin{array}{rcl} \mathbb{R}^2 & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ (x, y) & \longmapsto & y - f(x) \end{array}.$

Exemples

1. Soit : $\mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$, continue. Alors (par exemple) :

$$\{x \in \mathbb{R} \mid f(x) > 0\} \text{ est un ouvert de } \mathbb{R}.$$
$$\{x \in \mathbb{R} \mid f(x) \geqslant 0\} \text{ et } \{x \in \mathbb{R} \mid f(x) = 0\} \text{ sont des fermés de } \mathbb{R}.$$

2. Soient $f, g : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$, continues. Alors (par exemple) :

$$\{x \in \mathbb{R} \mid f(x) < g(x)\} \text{ est un ouvert de } \mathbb{R} \ ; \quad \{x \in \mathbb{R} \mid f(x) \leqslant g(x)\} \text{ est un fermé de } \mathbb{R}.$$

3. Soit $f \in \mathscr{C}(\mathbb{R}, \mathbb{R})$ et soient

$$\Gamma = \left\{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \;\middle|\; y = f(x)\right\} \text{ le graphe de } f$$
$$\mathscr{E} = \left\{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \;\middle|\; y \geqslant f(x)\right\} \quad \text{et} \quad \mathscr{E}' = \left\{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \;\middle|\; y > f(x)\right\}$$

Alors Γ et $\mathscr{E}$ sont des parties fermées de $\mathbb{R}^2$ et $\mathscr{E}'$ est une partie ouverte de $\mathbb{R}^2$.

Démonstration

Considérons $\varphi : \begin{array}{ccc} \mathbb{R}^2 & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ (x, y) & \longmapsto & y - f(x) \end{array}$. Puisque les applications coordonnées $(x, y) \mapsto x$ et $(x, y) \mapsto y$ sont continues (voir un peu plus loin, prop. 5), φ est continue sur $\mathbb{R}^2$.

Exemples

1. Soit : $\mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$, continue. Alors (par exemple) :

$$\{x \in \mathbb{R} \mid f(x) > 0\} \text{ est un ouvert de } \mathbb{R}.$$
$$\{x \in \mathbb{R} \mid f(x) \geqslant 0\} \text{ et } \{x \in \mathbb{R} \mid f(x) = 0\} \text{ sont des fermés de } \mathbb{R}.$$

2. Soient $f, g : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$, continues. Alors (par exemple) :

$$\{x \in \mathbb{R} \mid f(x) < g(x)\} \text{ est un ouvert de } \mathbb{R} \ ; \quad \{x \in \mathbb{R} \mid f(x) \leqslant g(x)\} \text{ est un fermé de } \mathbb{R}.$$

3. Soit $f \in \mathscr{C}(\mathbb{R}, \mathbb{R})$ et soient

$$\Gamma = \left\{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \;\middle|\; y = f(x)\right\} \text{ le graphe de } f$$
$$\mathscr{E} = \left\{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \;\middle|\; y \geqslant f(x)\right\} \quad \text{et} \quad \mathscr{E}' = \left\{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \;\middle|\; y > f(x)\right\}$$

Alors Γ et $\mathscr{E}$ sont des parties fermées de $\mathbb{R}^2$ et $\mathscr{E}'$ est une partie ouverte de $\mathbb{R}^2$.

Démonstration

Considérons $\varphi : \begin{array}{rcl} \mathbb{R}^2 & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ (x, y) & \longmapsto & y - f(x) \end{array}$. Puisque les applications coordonnées $(x, y) \mapsto x$ et $(x, y) \mapsto y$ sont continues (voir un peu plus loin, prop. 5), φ est continue sur $\mathbb{R}^2$.

Pour conclure, il suffit alors d'utiliser le th. précédent, en remarquant que :

$$\Gamma = \varphi^{-1}(\{0\}), \quad , \quad \mathscr{E} = \varphi^{-1}([0\,;+\infty[\quad \text{et} \quad \mathscr{E}' = \varphi^{-1}(]0\,;+\infty[\,.$$

Exemples

1. Soit $: \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$, continue. Alors (par exemple) :

$$\{x \in \mathbb{R} \mid f(x) > 0\} \text{ est un ouvert de } \mathbb{R}.$$

$$\{x \in \mathbb{R} \mid f(x) \geqslant 0\} \text{ et } \{x \in \mathbb{R} \mid f(x) = 0\} \text{ sont des fermés de } \mathbb{R}.$$

2. Soient $f, g : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$, continues. Alors (par exemple) :

$$\{x \in \mathbb{R} \mid f(x) < g(x)\} \text{ est un ouvert de } \mathbb{R} \ ; \quad \{x \in \mathbb{R} \mid f(x) \leqslant g(x)\} \text{ est un fermé de } \mathbb{R}.$$

3. Soit $f \in \mathscr{C}(\mathbb{R}, \mathbb{R})$ et soient

$$\Gamma = \left\{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \;\middle|\; y = f(x)\right\} \text{ le graphe de } f$$

$$\mathscr{E} = \left\{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \;\middle|\; y \geqslant f(x)\right\} \quad \text{et} \quad \mathscr{E}' = \left\{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \;\middle|\; y > f(x)\right\}$$

Alors Γ et $\mathscr{E}$ sont des parties fermées de $\mathbb{R}^2$ et $\mathscr{E}'$ est une partie ouverte de $\mathbb{R}^2$.

4. Dans un espace vectoriel normé E, toute boule fermée $\mathcal{B}_f(a, r)$ est un fermé.

Exemples

1. Soit : $\mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$, continue. Alors (par exemple) :
$$\{x \in \mathbb{R} \mid f(x) > 0\} \text{ est un ouvert de } \mathbb{R}.$$
$$\{x \in \mathbb{R} \mid f(x) \geqslant 0\} \text{ et } \{x \in \mathbb{R} \mid f(x) = 0\} \text{ sont des fermés de } \mathbb{R}.$$
2. Soient $f, g : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$, continues. Alors (par exemple) :
$$\{x \in \mathbb{R} \mid f(x) < g(x)\} \text{ est un ouvert de } \mathbb{R} \ ; \quad \{x \in \mathbb{R} \mid f(x) \leqslant g(x)\} \text{ est un fermé de } \mathbb{R}.$$
3. Soit $f \in \mathscr{C}(\mathbb{R}, \mathbb{R})$ et soient
$$\Gamma = \left\{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \;\middle|\; y = f(x)\right\} \text{ le graphe de } f$$
$$\mathscr{E} = \left\{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \;\middle|\; y \geqslant f(x)\right\} \quad \text{et} \quad \mathscr{E}' = \left\{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \;\middle|\; y > f(x)\right\}$$
Alors Γ et $\mathscr{E}$ sont des parties fermées de $\mathbb{R}^2$ et $\mathscr{E}'$ est une partie ouverte de $\mathbb{R}^2$.
4. Dans un espace vectoriel normé E, toute boule fermée $\mathcal{B}_f(a, r)$ est un fermé.

Démonstration

En effet, l'application $x \mapsto \|a - x\|$ est continue, et $\mathcal{B}_f(a, r)$ est l'image réciproque par cette application de l'intervalle réel fermé $[0 ; r]$

Exemples

1. Soit : $\mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$, continue. Alors (par exemple) :
$$\{x \in \mathbb{R} \mid f(x) > 0\} \text{ est un ouvert de } \mathbb{R}.$$
$$\{x \in \mathbb{R} \mid f(x) \geqslant 0\} \text{ et } \{x \in \mathbb{R} \mid f(x) = 0\} \text{ sont des fermés de } \mathbb{R}.$$
2. Soient $f, g : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$, continues. Alors (par exemple) :
$$\{x \in \mathbb{R} \mid f(x) < g(x)\} \text{ est un ouvert de } \mathbb{R} \ ; \quad \{x \in \mathbb{R} \mid f(x) \leqslant g(x)\} \text{ est un fermé de } \mathbb{R}.$$
3. Soit $f \in \mathscr{C}(\mathbb{R}, \mathbb{R})$ et soient
$$\Gamma = \left\{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \,\middle|\, y = f(x)\right\} \text{ le graphe de } f$$
$$\mathscr{E} = \left\{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \,\middle|\, y \geqslant f(x)\right\} \quad \text{et} \quad \mathscr{E}' = \left\{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \,\middle|\, y > f(x)\right\}$$
Alors Γ et $\mathscr{E}$ sont des parties fermées de $\mathbb{R}^2$ et $\mathscr{E}'$ est une partie ouverte de $\mathbb{R}^2$.
4. Dans un espace vectoriel normé E, toute boule fermée $\mathcal{B}_f(a, r)$ est un fermé.
5. L'ensemble $\mathrm{GL}_n(\mathbb{K})$ des matrices carrées d'ordre n inversibles est un ouvert dans $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$

Exemples

1. Soit : $\mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$, continue. Alors (par exemple) :
$$\{x \in \mathbb{R} \mid f(x) > 0\} \text{ est un ouvert de } \mathbb{R}.$$
$$\{x \in \mathbb{R} \mid f(x) \geqslant 0\} \text{ et } \{x \in \mathbb{R} \mid f(x) = 0\} \text{ sont des fermés de } \mathbb{R}.$$

2. Soient $f, g : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$, continues. Alors (par exemple) :
$$\{x \in \mathbb{R} \mid f(x) < g(x)\} \text{ est un ouvert de } \mathbb{R} \ ; \quad \{x \in \mathbb{R} \mid f(x) \leqslant g(x)\} \text{ est un fermé de } \mathbb{R}.$$

3. Soit $f \in \mathscr{C}(\mathbb{R}, \mathbb{R})$ et soient
$$\Gamma = \left\{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \ \middle|\ y = f(x)\right\} \text{ le graphe de } f$$
$$\mathscr{E} = \left\{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \ \middle|\ y \geqslant f(x)\right\} \quad \text{et} \quad \mathscr{E}' = \left\{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \ \middle|\ y > f(x)\right\}$$
Alors Γ et $\mathscr{E}$ sont des parties fermées de $\mathbb{R}^2$ et $\mathscr{E}'$ est une partie ouverte de $\mathbb{R}^2$.

4. Dans un espace vectoriel normé E, toute boule fermée $\mathcal{B}_f(a, r)$ est un fermé.

5. L'ensemble $\mathrm{GL}_n(\mathbb{K})$ des matrices carrées d'ordre n inversibles est un ouvert dans $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$

Démonstration

car c'est l'image réciproque de $\mathbb{R}^*$, qui un ouvert de $\mathbb{R}$, par l'application continue det (la continuité du déterminant sera montrée un peu plus loin).

Formes linéaires coordonnées

Soit E un espace vectoriel normé de dimension finie n, et $\mathscr{B} = (e_1, \dots, e_n)$ une base de E.
On rappelle que, pour tout $i \in [\![1\,;n]\!]$ on peut considérer la **forme linéaire coordonnée** e_i^* définie par :

$$\text{si } x = \sum_{i=1}^{n} x_i e_i \text{ avec } x_i \in \mathbb{K}, \text{ alors } e_i^*(x) = x_i.$$

Formes linéaires coordonnées

Soit E un espace vectoriel normé de dimension finie n, et $\mathscr{B} = (e_1, \dots, e_n)$ une base de E.
On rappelle que, pour tout $i \in [\![1\,;n]\!]$ on peut considérer la **forme linéaire coordonnée** e_i^* définie par :

$$\text{si } x = \sum_{i=1}^{n} x_i e_i \text{ avec } x_i \in \mathbb{K}, \text{ alors } e_i^*(x) = x_i.$$

Proposition 5

Les applications $e_i^* : E \longrightarrow \mathbb{K}$ sont continues.

Formes linéaires coordonnées

Soit E un espace vectoriel normé de dimension finie n, et $\mathscr{B} = (e_1, \dots, e_n)$ une base de E.
On rappelle que, pour tout $i \in [\![1\,;n]\!]$ on peut considérer la **forme linéaire coordonnée** e_i^* définie par :

$$\text{si } x = \sum_{i=1}^{n} x_i e_i \text{ avec } x_i \in \mathbb{K}, \text{ alors } e_i^*(x) = x_i.$$

Proposition 5

Les applications $e_i^* : E \longrightarrow \mathbb{K}$ sont continues.

Démonstration

Puisque toutes les normes dans E de dimension finie sont équivalentes, munissons E de la norme $\| \ \|_\infty$.

Formes linéaires coordonnées

Soit E un espace vectoriel normé de dimension finie n, et $\mathscr{B} = (e_1, \dots, e_n)$ une base de E.
On rappelle que, pour tout $i \in [\![1\,;n]\!]$ on peut considérer la **forme linéaire coordonnée** e_i^* définie par :

$$\text{si } x = \sum_{i=1}^{n} x_i e_i \text{ avec } x_i \in \mathbb{K}, \text{ alors } e_i^*(x) = x_i.$$

Proposition 5

Les applications $e_i^* : E \longrightarrow \mathbb{K}$ sont continues.

Démonstration

Puisque toutes les normes dans E de dimension finie sont équivalentes, munissons E de la norme $\| \ \|_\infty$.
Si $x = \sum_{i=1}^{n} x_i e_i$ et $y = \sum_{i=1}^{n} y_i e_i$ sont deux éléments de E, on a alors

$$\left| e_i^*(x) - e_i^*(y) \right| = |x_i - y_i| \leqslant \|x - y\|_\infty$$

Formes linéaires coordonnées

Soit E un espace vectoriel normé de dimension finie n, et $\mathscr{B} = (e_1, \ldots, e_n)$ une base de E.
On rappelle que, pour tout $i \in [\![1\,;n]\!]$ on peut considérer la **forme linéaire coordonnée** e_i^* définie par :

$$\text{si } x = \sum_{i=1}^{n} x_i e_i \text{ avec } x_i \in \mathbb{K}, \text{ alors } e_i^*(x) = x_i.$$

Proposition 5

Les applications $e_i^* : E \longrightarrow \mathbb{K}$ sont continues.

Démonstration

Puisque toutes les normes dans E de dimension finie sont équivalentes, munissons E de la norme $\| \; \|_\infty$.
Si $x = \sum_{i=1}^{n} x_i e_i$ et $y = \sum_{i=1}^{n} y_i e_i$ sont deux éléments de E, on a alors

$$\left| e_i^*(x) - e_i^*(y) \right| = |x_i - y_i| \leqslant \|x - y\|_\infty$$

donc e_i^* est lipschitzienne de rapport 1, donc continue.

Formes linéaires coordonnées

Soit E un espace vectoriel normé de dimension finie n, et $\mathscr{B} = (e_1, \ldots, e_n)$ une base de E.
On rappelle que, pour tout $i \in [\![1\,;n]\!]$ on peut considérer la **forme linéaire coordonnée** e_i^* définie par :

$$\text{si } x = \sum_{i=1}^{n} x_i e_i \text{ avec } x_i \in \mathbb{K}, \text{ alors } e_i^*(x) = x_i.$$

Proposition 5

Les applications $e_i^* : E \longrightarrow \mathbb{K}$ sont continues.

Une conséquence importante en est le théorème suivant :

Théorème 15

Soit E un espace vectoriel normé de dimension finie n, rapporté à une base $\mathscr{B}$.

Si $f : A \subset E \to \mathbb{K}$ est une fonction polynomiale en les coordonnées, alors f est continue.

Formes linéaires coordonnées

Soit E un espace vectoriel normé de dimension finie n, et $\mathscr{B} = (e_1, \dots, e_n)$ une base de E.
On rappelle que, pour tout $i \in [\![1\,;n]\!]$ on peut considérer la **forme linéaire coordonnée** e_i^* définie par :

$$\text{si } x = \sum_{i=1}^{n} x_i e_i \text{ avec } x_i \in \mathbb{K}, \text{ alors } e_i^*(x) = x_i.$$

Proposition 5

Les applications $e_i^* : E \longrightarrow \mathbb{K}$ sont continues.

Une conséquence importante en est le théorème suivant :

Théorème 15

Soit E un espace vectoriel normé de dimension finie n, rapporté à une base $\mathscr{B}$.

Si $f : A \subset E \to \mathbb{K}$ est une fonction polynomiale en les coordonnées, alors f est continue.

Démonstration

L'énoncé signifie que f est combinaison linéaire d'applications de la forme :

$$x = \sum_{i=1}^{n} x_i e_i \longmapsto x_{i_1}^{k_1} x_{i_2}^{k_2} \cdots x_{i_p}^{k_p} \quad \text{avec } k_j \in \mathbb{N}^* \text{ et } i_j \in [\![1\,;n]\!]$$

Formes linéaires coordonnées

Soit E un espace vectoriel normé de dimension finie n, et $\mathscr{B} = (e_1, \dots, e_n)$ une base de E.
On rappelle que, pour tout $i \in [\![1\,;n]\!]$ on peut considérer la **forme linéaire coordonnée** e_i^* définie par :

$$\text{si } x = \sum_{i=1}^{n} x_i e_i \text{ avec } x_i \in \mathbb{K}, \text{ alors } e_i^*(x) = x_i.$$

Proposition 5

Les applications $e_i^* : E \longrightarrow \mathbb{K}$ sont continues.

Une conséquence importante en est le théorème suivant :

Théorème 15

Soit E un espace vectoriel normé de dimension finie n, rapporté à une base $\mathscr{B}$.

Si $f : A \subset E \to \mathbb{K}$ est une fonction polynomiale en les coordonnées, alors f est continue.

Démonstration

L'énoncé signifie que f est combinaison linéaire d'applications de la forme :

$$x = \sum_{i=1}^{n} x_i e_i \longmapsto x_{i_1}^{k_1} x_{i_2}^{k_2} \cdots x_{i_p}^{k_p} \quad \text{avec } k_j \in \mathbb{N}^* \text{ et } i_j \in [\![1\,;n]\!]$$

et puisque les applications $x \mapsto x_{i_j}$ sont continues d'après la proposition précédente, le résultat découle de ceux sur les opérations sur les fonctions continues.

Formes linéaires coordonnées

Soit E un espace vectoriel normé de dimension finie n, et $\mathscr{B} = (e_1, \ldots, e_n)$ une base de E.
On rappelle que, pour tout $i \in [\![1\,;n]\!]$ on peut considérer la **forme linéaire coordonnée** e_i^* définie par :

$$\text{si } x = \sum_{i=1}^{n} x_i e_i \text{ avec } x_i \in \mathbb{K}, \text{ alors } e_i^*(x) = x_i.$$

Proposition 5

Les applications $e_i^* : E \longrightarrow \mathbb{K}$ sont continues.

Une conséquence importante en est le théorème suivant :

Théorème 15

Soit E un espace vectoriel normé de dimension finie n, rapporté à une base $\mathscr{B}$.

Si $f : A \subset E \to \mathbb{K}$ est une fonction polynomiale en les coordonnées, alors f est continue.

Exemple :

L'application det : $\left\{ \begin{array}{rcl} \mathcal{M}_n(\mathbb{K}) & \longrightarrow & \mathbb{K} \\ M & \longmapsto & \det M \end{array} \right.$ est continue.

Formes linéaires coordonnées

Soit E un espace vectoriel normé de dimension finie n, et $\mathscr{B} = (e_1, \ldots, e_n)$ une base de E.
On rappelle que, pour tout $i \in [\![1\,;n]\!]$ on peut considérer la **forme linéaire coordonnée** e_i^* définie par :

$$\text{si } x = \sum_{i=1}^{n} x_i e_i \text{ avec } x_i \in \mathbb{K}, \text{ alors } e_i^*(x) = x_i.$$

Proposition 5

Les applications $e_i^* : E \longrightarrow \mathbb{K}$ sont continues.

Une conséquence importante en est le théorème suivant :

Théorème 15

Soit E un espace vectoriel normé de dimension finie n, rapporté à une base $\mathscr{B}$.

Si $f : A \subset E \to \mathbb{K}$ est une fonction polynomiale en les coordonnées, alors f est continue.

Exemple :

L'application det : $\left\{ \begin{array}{rcl} \mathcal{M}_n(\mathbb{K}) & \longrightarrow & \mathbb{K} \\ M & \longmapsto & \det M \end{array} \right.$ est continue.

En effet, on a démontré dans un chapitre précédent que le déterminant d'une matrice $M = (m_{ij})$ est une somme de termes de la forme $m_{i_1,1} m_{i_2,2} \cdots m_{i_n,n}$, c'est donc une fonction polynomiale des $m_{i,j}$, qui sont les coordonnées de M dans la base canonique $(E_{i,j})$.

Fonctions à valeurs dans un espace vectoriel normé de dimension finie

On suppose ici que f est une application définie sur une partie A d'un espace vectoriel normé E, à valeurs dans un espace vectoriel normé F de dimension finie. Soit $\mathscr{B} = (e_1, \ldots, e_n)$ une base de F.

Fonctions à valeurs dans un espace vectoriel normé de dimension finie

On suppose ici que f est une application définie sur une partie A d'un espace vectoriel normé E, à valeurs dans un espace vectoriel normé F de dimension finie. Soit $\mathscr{B} = (e_1, \ldots, e_n)$ une base de F.
Pour tout $x \in A$, $f(x)$ peut s'écrire, dans la base $\mathscr{B}$ sous la forme :

$$f(x) = \sum_{i=1}^{n} f_i(x) e_i$$

Fonctions à valeurs dans un espace vectoriel normé de dimension finie

On suppose ici que f est une application définie sur une partie A d'un espace vectoriel normé E, à valeurs dans un espace vectoriel normé F de dimension finie. Soit $\mathscr{B} = (e_1, \dots, e_n)$ une base de F.
Pour tout $x \in A$, $f(x)$ peut s'écrire, dans la base $\mathscr{B}$ sous la forme :

$$f(x) = \sum_{i=1}^{n} f_i(x) e_i$$

Les f_i, définies sur A et à valeurs dans $\mathbb{K}$, s'appellent les applications coordonnées de f. On remarque que l'on a : $f_i = e_i^* \circ f$.

Fonctions à valeurs dans un espace vectoriel normé de dimension finie

On suppose ici que f est une application définie sur une partie A d'un espace vectoriel normé E, à valeurs dans un espace vectoriel normé F de dimension finie. Soit $\mathscr{B} = (e_1, \ldots, e_n)$ une base de F.
Pour tout $x \in A$, $f(x)$ peut s'écrire, dans la base $\mathscr{B}$ sous la forme :

$$f(x) = \sum_{i=1}^{n} f_i(x) e_i$$

Les f_i, définies sur A et à valeurs dans $\mathbb{K}$, s'appellent les applications coordonnées de f. On remarque que l'on a : $f_i = e_i^* \circ f$.

Théorème 16

Avec les mêmes notations, si $a \in \overline{A}$, pour que f admette une limite $\ell = \sum_{i=1}^{n} \ell_i e_i \in F$ quand x tend vers a , il faut et il suffit que, pour tout $i \in [\![1 ; n]\!]$, f_i admette une limite dans $\mathbb{K}$ quand x tend vers a, et on a alors : $\lim_{x \to a} f_i(x) = \ell_i$.

Fonctions à valeurs dans un espace vectoriel normé de dimension finie

On suppose ici que f est une application définie sur une partie A d'un espace vectoriel normé E, à valeurs dans un espace vectoriel normé F de dimension finie. Soit $\mathscr{B} = (e_1, \dots, e_n)$ une base de F.
Pour tout $x \in A$, $f(x)$ peut s'écrire, dans la base $\mathscr{B}$ sous la forme :

$$f(x) = \sum_{i=1}^{n} f_i(x) e_i$$

Les f_i, définies sur A et à valeurs dans $\mathbb{K}$, s'appellent les <u>applications coordonnées</u> de f. On remarque que l'on a : $f_i = e_i^* \circ f$.

Théorème 16

Avec les mêmes notations, si $a \in \overline{A}$, pour que f admette une limite $\ell = \sum_{i=1}^{n} \ell_i e_i \in F$ quand x tend vers a , il faut et il suffit que, pour tout $i \in [\![1\,;n]\!]$, f_i admette une limite dans $\mathbb{K}$ quand x tend vers a, et on a alors : $\lim_{x \to a} f_i(x) = \ell_i$.

Démonstration

- Supposons $\lim_{x \to a} f(x) = \ell$. Pour tout $i \in [\![1\,;n]\!]$ on a $f_i = e_i^* \circ f$, et puisque les e_i^* sont continues, le théorème de composition des limites donne $\lim_{x \to a} f_i(x) = e_i^*(\ell) = \ell_i$.

Fonctions à valeurs dans un espace vectoriel normé de dimension finie

On suppose ici que f est une application définie sur une partie A d'un espace vectoriel normé E, à valeurs dans un espace vectoriel normé F de dimension finie. Soit $\mathscr{B} = (e_1, \ldots, e_n)$ une base de F.
Pour tout $x \in A$, $f(x)$ peut s'écrire, dans la base $\mathscr{B}$ sous la forme :

$$f(x) = \sum_{i=1}^{n} f_i(x) e_i$$

Les f_i, définies sur A et à valeurs dans $\mathbb{K}$, s'appellent les applications coordonnées de f. On remarque que l'on a : $f_i = e_i^* \circ f$.

Théorème 16

Avec les mêmes notations, si $a \in \overline{A}$, pour que f admette une limite $\ell = \sum\limits_{i=1}^{n} \ell_i e_i \in F$ quand x tend vers a , il faut et il suffit que, pour tout $i \in [\![1\,;n]\!]$, f_i admette une limite dans $\mathbb{K}$ quand x tend vers a, et on a alors : $\lim\limits_{x \to a} f_i(x) = \ell_i$.

Démonstration

- Supposons maintenant $\lim\limits_{x \to a} f_i(x) = \ell_i$ pour tout i. Soit $\varepsilon > 0$. Par définition de la limite, on a

$$\exists\, \alpha_i > 0 \text{ tq } \forall\, x \in A,\ \ \|x - a\| < \alpha_i \Longrightarrow |f_i(x) - \ell_i| < \varepsilon$$

Fonctions à valeurs dans un espace vectoriel normé de dimension finie

On suppose ici que f est une application définie sur une partie A d'un espace vectoriel normé E, à valeurs dans un espace vectoriel normé F de dimension finie. Soit $\mathscr{B} = (e_1, \dots, e_n)$ une base de F.
Pour tout $x \in A$, $f(x)$ peut s'écrire, dans la base $\mathscr{B}$ sous la forme :

$$f(x) = \sum_{i=1}^{n} f_i(x) e_i$$

Les f_i, définies sur A et à valeurs dans $\mathbb{K}$, s'appellent les applications coordonnées de f. On remarque que l'on a : $f_i = e_i^* \circ f$.

Théorème 16

Avec les mêmes notations, si $a \in \overline{A}$, pour que f admette une limite $\ell = \sum_{i=1}^{n} \ell_i e_i \in F$ quand x tend vers a , il faut et il suffit que, pour tout $i \in [\![1\,;n]\!]$, f_i admette une limite dans $\mathbb{K}$ quand x tend vers a, et on a alors : $\lim_{x \to a} f_i(x) = \ell_i$.

Démonstration

- Supposons maintenant $\lim_{x \to a} f_i(x) = \ell_i$ pour tout i. Soit $\varepsilon > 0$. Par définition de la limite, on a

$$\exists\, \alpha_i > 0 \text{ tq } \forall\, x \in A,\ \|x - a\| < \alpha_i \Longrightarrow |f_i(x) - \ell_i| < \varepsilon$$

  Si on pose $\alpha = \min_{1 \leqslant i \leqslant n} \alpha_i$, on aura, pour tout $x \in A$ tel que $\|x - a\| < \alpha$, $|f_i(x) - \ell_i| < \varepsilon$ pour tout i, donc $\|f(x) - \ell\|_\infty < \varepsilon$, ce qui est exactement la définition de $\lim_{x \to a} f(x) = \ell$.

Fonctions à valeurs dans un espace vectoriel normé de dimension finie

On suppose ici que f est une application définie sur une partie A d'un espace vectoriel normé E, à valeurs dans un espace vectoriel normé F de dimension finie. Soit $\mathscr{B} = (e_1, \ldots, e_n)$ une base de F.
Pour tout $x \in A$, $f(x)$ peut s'écrire, dans la base $\mathscr{B}$ sous la forme :

$$f(x) = \sum_{i=1}^{n} f_i(x) e_i$$

Les f_i, définies sur A et à valeurs dans $\mathbb{K}$, s'appellent les <u>applications coordonnées</u> de f. On remarque que l'on a : $f_i = e_i^* \circ f$.

Théorème 16

Avec les mêmes notations, si $a \in \overline{A}$, pour que f admette une limite $\ell = \sum_{i=1}^{n} \ell_i e_i \in F$ quand x tend vers a , il faut et il suffit que, pour tout $i \in [\![1\,;n]\!]$, f_i admette une limite dans $\mathbb{K}$ quand x tend vers a, et on a alors : $\lim\limits_{x \to a} f_i(x) = \ell_i$.

Compte tenu de la définition de la continuité en un point à l'aide de la limite, il en résulte immédiatement :

Fonctions à valeurs dans un espace vectoriel normé de dimension finie

On suppose ici que f est une application définie sur une partie A d'un espace vectoriel normé E, à valeurs dans un espace vectoriel normé F de dimension finie. Soit $\mathscr{B} = (e_1, \ldots, e_n)$ une base de F.
Pour tout $x \in A$, $f(x)$ peut s'écrire, dans la base $\mathscr{B}$ sous la forme :

$$f(x) = \sum_{i=1}^{n} f_i(x) e_i$$

Les f_i, définies sur A et à valeurs dans $\mathbb{K}$, s'appellent les applications coordonnées de f. On remarque que l'on a : $f_i = e_i^* \circ f$.

Théorème 16

Avec les mêmes notations, si $a \in \overline{A}$, pour que f admette une limite $\ell = \sum_{i=1}^{n} \ell_i e_i \in F$ quand x tend vers a , il faut et il suffit que, pour tout $i \in [\![1\,;n]\!]$, f_i admette une limite dans $\mathbb{K}$ quand x tend vers a, et on a alors : $\lim\limits_{x \to a} f_i(x) = \ell_i$.

Compte tenu de la définition de la continuité en un point à l'aide de la limite, il en résulte immédiatement :

Théorème 17

Avec les mêmes notations :

f est continue en a si et seulement si pour tout $i \in [\![1\,;n]\!]$ f_i est continue en a.

Fonctions définies sur un espace vectoriel normé de dimension finie

On considère ici des applications définies sur une partie d'un espace vectoriel normé de dimension finie E, à valeurs dans un espace vectoriel normé F.

Fonctions définies sur un espace vectoriel normé de dimension finie

On considère ici des applications définies sur une partie d'un espace vectoriel normé de dimension finie E, à valeurs dans un espace vectoriel normé F. Pour simplifier les notations, on supposera $E = \mathbb{K}^n$ (une base de E étant choisie, cela revient à identifier tout vecteur de E au n-uplet formé par ses coordonnées).

Fonctions définies sur un espace vectoriel normé de dimension finie

On considère ici des applications définies sur une partie d'un espace vectoriel normé de dimension finie E, à valeurs dans un espace vectoriel normé F. Pour simplifier les notations, on supposera $E = \mathbb{K}^n$ (une base de E étant choisie, cela revient à identifier tout vecteur de E au n-uplet formé par ses coordonnées).
Puisque toutes les normes dans un espace vectoriel normé de dimension finie sont équivalentes, on munira E de la norme $\| \ \|_\infty$.

Fonctions définies sur un espace vectoriel normé de dimension finie

On considère ici des applications définies sur une partie d'un espace vectoriel normé de dimension finie E, à valeurs dans un espace vectoriel normé F. Pour simplifier les notations, on supposera $E = \mathbb{K}^n$ (une base de E étant choisie, cela revient à identifier tout vecteur de E au n-uplet formé par ses coordonnées).
Puisque toutes les normes dans un espace vectoriel normé de dimension finie sont équivalentes, on munira E de la norme $\| \ \|_\infty$.

Soit alors $a = (a_1, \ldots, a_n) \in E$. Pour tout $i \in [\![1\,;n]\!]$, on notera $\omega_{a,i}$ l'application :

$$\omega_{a,i} : \left\{ \begin{array}{ccc} \mathbb{K} & \longrightarrow & E \\ x & \longmapsto & (a_1, \ldots, a_{i-1}, x, a_{i+1}, \ldots, a_n) \end{array} \right.$$

Fonctions définies sur un espace vectoriel normé de dimension finie

On considère ici des applications définies sur une partie d'un espace vectoriel normé de dimension finie E, à valeurs dans un espace vectoriel normé F. Pour simplifier les notations, on supposera $E = \mathbb{K}^n$ (une base de E étant choisie, cela revient à identifier tout vecteur de E au n-uplet formé par ses coordonnées).
Puisque toutes les normes dans un espace vectoriel normé de dimension finie sont équivalentes, on munira E de la norme $\| \, \|_\infty$.
Soit alors $a = (a_1, \ldots, a_n) \in E$. Pour tout $i \in [\![1\,;n]\!]$, on notera $\omega_{a,i}$ l'application :

$$\omega_{a,i} : \left\{ \begin{array}{ccc} \mathbb{K} & \longrightarrow & E \\ x & \longmapsto & (a_1, \ldots, a_{i-1}, x, a_{i+1}, \ldots, a_n) \end{array} \right.$$

Alors les $\omega_{a,i}$ sont continues car :

$$\|\omega_{a,i}(x) - \omega_{a,i}(y)\|_\infty = \|(0, \ldots, 0, x - y, 0, \ldots, 0)\|_\infty = |x - y|$$

ce qui signifie que $\omega_{a,i}$ est lipschitzienne de rapport 1.

Fonctions définies sur un espace vectoriel normé de dimension finie

On considère ici des applications définies sur une partie d'un espace vectoriel normé de dimension finie E, à valeurs dans un espace vectoriel normé F. Pour simplifier les notations, on supposera $E = \mathbb{K}^n$ (une base de E étant choisie, cela revient à identifier tout vecteur de E au n-uplet formé par ses coordonnées).
Puisque toutes les normes dans un espace vectoriel normé de dimension finie sont équivalentes, on munira E de la norme $\| \, \|_\infty$.

Soit alors $a = (a_1, \ldots, a_n) \in E$. Pour tout $i \in [\![1\,;n]\!]$, on notera $\omega_{a,i}$ l'application :

$$\omega_{a,i} : \left\{ \begin{array}{ccc} \mathbb{K} & \longrightarrow & E \\ x & \longmapsto & (a_1, \ldots, a_{i-1}, x, a_{i+1}, \ldots, a_n) \end{array} \right.$$

Alors les $\omega_{a,i}$ sont continues car :

$$\|\omega_{a,i}(x) - \omega_{a,i}(y)\|_\infty = \|(0, \ldots, 0, x-y, 0, \ldots, 0)\|_\infty = |x-y|$$

ce qui signifie que $\omega_{a,i}$ est lipschitzienne de rapport 1.

Si maintenant f est une application définie sur une partie A de E, à valeurs dans F, et si $a \in A$, on considérera, pour tout $i \in [\![1\,;n]\!]$, l'application $f_{a,i} = f \circ \omega_{a,i}$, c'est-à-dire :

$$f_{a,i} : \left\{ \begin{array}{ccc} A_i \subset \mathbb{K} & \longrightarrow & F \\ x & \longmapsto & f(a_1, \ldots, a_{i-1}, x, a_{i+1}, \ldots, a_n) \end{array} \right.$$

Fonctions définies sur un espace vectoriel normé de dimension finie

On considère ici des applications définies sur une partie d'un espace vectoriel normé de dimension finie E, à valeurs dans un espace vectoriel normé F. Pour simplifier les notations, on supposera $E = \mathbb{K}^n$ (une base de E étant choisie, cela revient à identifier tout vecteur de E au n-uplet formé par ses coordonnées).
Puisque toutes les normes dans un espace vectoriel normé de dimension finie sont équivalentes, on munira E de la norme $\| \ \|_\infty$.

Soit alors $a = (a_1, \ldots, a_n) \in E$. Pour tout $i \in [\![1\,;n]\!]$, on notera $\omega_{a,i}$ l'application :

$$\omega_{a,i} : \left\{ \begin{array}{ccc} \mathbb{K} & \longrightarrow & E \\ x & \longmapsto & (a_1, \ldots, a_{i-1}, x, a_{i+1}, \ldots, a_n) \end{array} \right.$$

Alors les $\omega_{a,i}$ sont continues car :

$$\|\omega_{a,i}(x) - \omega_{a,i}(y)\|_\infty = \|(0, \ldots, 0, x-y, 0, \ldots, 0)\|_\infty = |x-y|$$

ce qui signifie que $\omega_{a,i}$ est lipschitzienne de rapport 1.

Si maintenant f est une application définie sur une partie A de E, à valeurs dans F, et si $a \in A$, on considérera, pour tout $i \in [\![1\,;n]\!]$, l'application $f_{a,i} = f \circ \omega_{a,i}$, c'est-à-dire :

$$f_{a,i} : \left\{ \begin{array}{ccc} A_i \subset \mathbb{K} & \longrightarrow & F \\ x & \longmapsto & f(a_1, \ldots, a_{i-1}, x, a_{i+1}, \ldots, a_n) \end{array} \right.$$

$f_{a,i}$ s'appelle la i-ème application partielle de f en a.

Les $\omega_{a,i}$ étant continues, on a immédiatement :

Les $\omega_{a,i}$ étant continues, on a immédiatement :

Théorème 18

Si f est continue en a, alors toutes ses applications partielles $f_{a,i}$ sont continues en a_i.

Les $\omega_{a,i}$ étant continues, on a immédiatement :

Théorème 18

Si f est continue en a, alors toutes ses applications partielles $f_{a,i}$ sont continues en a_i.

La réciproque de cette propriété est FAUSSE !

Il se peut que toutes les applications partielles de f soient continues en un point, et que f ne soit pas continue en ce point !

Les $\omega_{a,i}$ étant continues, on a immédiatement :

Théorème 18

Si f est continue en a, alors toutes ses applications partielles $f_{a,i}$ sont continues en a_i.

La réciproque de cette propriété est FAUSSE !

Il se peut que toutes les applications partielles de f soient continues en un point, et que f ne soit pas continue en ce point !

Exemple

$$f : \left\{ \begin{array}{ccc} \mathbb{R}^2 & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ (x,y) & \longmapsto & \begin{cases} 0 & \text{si } x = y = 0 \\ \frac{xy}{x^2+y^2} & \text{sinon} \end{cases} . \end{array} \right.$$

Les $\omega_{a,i}$ étant continues, on a immédiatement :

Théorème 18

Si f est continue en a, alors toutes ses applications partielles $f_{a,i}$ sont continues en a_i.

La réciproque de cette propriété est FAUSSE !

Il se peut que toutes les applications partielles de f soient continues en un point, et que f ne soit pas continue en ce point !

Exemple

$$f : \left\{ \begin{array}{ccc} \mathbb{R}^2 & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ (x, y) & \longmapsto & \begin{cases} 0 & \text{si } x = y = 0 \\ \frac{xy}{x^2+y^2} & \text{sinon} \end{cases} \end{array} \right. .$$

En effet, les applications partielles en $(0, 0)$ sont égales à l'application nulle, donc sont continues, mais f n'a même pas de limite en $(0, 0)$!

Théorème des bornes atteintes

Le théorème suivant est admis :

Théorème des bornes atteintes

Le théorème suivant est admis :

Théorème 19: fondamental

Soit K une partie **fermée** et **bornée** d'un espace vectoriel normé **de dimension finie**, et f une application **continue** sur K, à valeurs réelles.
Alors « f est bornée sur K et atteint ses bornes », c'est-à-dire :

$$\exists\, m,\ M \in \mathbb{R},\ \forall\, x \in K,\ m \leqslant f(x) \leqslant M \quad \text{et} \quad \exists\, x_0,\ x_1 \in \mathbb{K} \text{ tels que } m = f(x_0) \text{ et } M = f(x_1).$$

QUELQUES RAPPELS DU COURS DE 1ère ANNÉE

Dans le cas d'applications définies sur un intervalle I de $\mathbb{R}$, **à valeurs dans $\mathbb{R}$** (une telle application s'appelle une fonction numérique de la variable réelle), il y a des résultats supplémentaires, vus en 1ère année, mais qu'il est important de rappeler.

Dans le cas d'applications définies sur un intervalle I de $\mathbb{R}$, **à valeurs dans** $\mathbb{R}$ (une telle application s'appelle une fonction numérique de la variable réelle), il y a des résultats supplémentaires, vus en 1ère année, mais qu'il est important de rappeler.

Théorème 20: des valeurs intermédiaires

Soit I un **intervalle** de $\mathbb{R}$, et $f : I \to \mathbb{R}$ une application **continue**.

Alors $f(I)$ est un intervalle.

Dans le cas d'applications définies sur un intervalle I de $\mathbb{R}$, **à valeurs dans $\mathbb{R}$** (une telle application s'appelle une fonction numérique de la variable réelle), il y a des résultats supplémentaires, vus en 1ère année, mais qu'il est important de rappeler.

Théorème 20: des valeurs intermédiaires

Soit I un **intervalle** de $\mathbb{R}$, et $f : I \to \mathbb{R}$ une application **continue**.

Alors $f(I)$ est un intervalle.

Conséquences

1. Le théorème peut aussi s'énoncer ainsi : si f est continue sur $[a\,;b]$ à valeurs réelles, et si y est compris entre $f(a)$ et $f(b)$, il existe x compris entre a et b tel que $y = f(x)$.

Dans le cas d'applications définies sur un intervalle I de $\mathbb{R}$, **à valeurs dans** $\mathbb{R}$ (une telle application s'appelle une fonction numérique de la variable réelle), il y a des résultats supplémentaires, vus en 1ère année, mais qu'il est important de rappeler.

Théorème 20: des valeurs intermédiaires

Soit I un **intervalle** de $\mathbb{R}$, et $f : I \to \mathbb{R}$ une application **continue**.

Alors $f(I)$ est un intervalle.

Conséquences

1. Le théorème peut aussi s'énoncer ainsi : si f est continue sur $[a\,;b]$ à valeurs réelles, et si y est compris entre $f(a)$ et $f(b)$, il existe x compris entre a et b tel que $y = f(x)$.
2. En particulier, si f est continue sur $[a\,;b]$ à valeurs réelles, et si $f(a)f(b) < 0$, alors il existe $c \in \,]a\,;b[$ tel que $f(c) = 0$.

Dans le cas d'applications définies sur un intervalle I de $\mathbb{R}$, **à valeurs dans** $\mathbb{R}$ (une telle application s'appelle une fonction numérique de la variable réelle), il y a des résultats supplémentaires, vus en 1ère année, mais qu'il est important de rappeler.

Théorème 20: des valeurs intermédiaires

Soit I un **intervalle** de $\mathbb{R}$, et $f : I \to \mathbb{R}$ une application **continue**.

Alors $f(I)$ est un intervalle.

Conséquences

1. Le théorème peut aussi s'énoncer ainsi : si f est continue sur $[a\,;b]$ à valeurs réelles, et si y est compris entre $f(a)$ et $f(b)$, il existe x compris entre a et b tel que $y = f(x)$.
2. En particulier, si f est continue sur $[a\,;b]$ à valeurs réelles, et si $f(a)f(b) < 0$, alors il existe $c \in \,]a\,;b[$ tel que $f(c) = 0$.
3. Si $f \in \mathscr{C}(I, \mathbb{R})$ ne s'annule pas sur I, alors f a un signe constant sur I.

Dans le cas d'applications définies sur un intervalle I de $\mathbb{R}$, **à valeurs dans** $\mathbb{R}$ (une telle application s'appelle une fonction numérique de la variable réelle), il y a des résultats supplémentaires, vus en 1ère année, mais qu'il est important de rappeler.

Théorème 20: des valeurs intermédiaires

Soit I un **intervalle** de $\mathbb{R}$, et $f : I \to \mathbb{R}$ une application **continue**.

Alors $f(I)$ est un intervalle.

Conséquences

1. Le théorème peut aussi s'énoncer ainsi : si f est continue sur $[a\,;b]$ à valeurs réelles, et si y est compris entre $f(a)$ et $f(b)$, il existe x compris entre a et b tel que $y = f(x)$.
2. En particulier, si f est continue sur $[a\,;b]$ à valeurs réelles, et si $f(a)f(b) < 0$, alors il existe $c \in]a\,;b[$ tel que $f(c) = 0$.
3. Si $f \in \mathscr{C}(I, \mathbb{R})$ ne s'annule pas sur I, alors f a un signe constant sur I.
4. L'image d'un **segment** par une application continue à valeurs réelles est un segment.

Exercices d'application

- Soit f continue sur $[a\,;b]$, à valeurs dans $[a\,;b]$. Montrer qu'il existe c appartenant à $[a\,;b]$ tel que $f(c)=c$.

Exercices d'application

- Soit f continue sur $[a\,;b]$, à valeurs dans $[a\,;b]$. Montrer qu'il existe c appartenant à $[a\,;b]$ tel que $f(c)=c$.

Solution

On applique le théorème des valeurs intermédiaires à la fonction $g\colon x\mapsto f(x)-x$: g est continue comme différence de fonctions continues, et puisque f est à valeurs dans $[a\,;b]$ on a $g(a)\geqslant 0$ et $g(b)\leqslant 0$.

Exercices d'application

1. Soit f continue sur $[a\,;b]$, à valeurs dans $[a\,;b]$. Montrer qu'il existe c appartenant à $[a\,;b]$ tel que $f(c) = c$.
2. Soit A une partie convexe non vide d'un espace vectoriel normé E et $f : A \to \mathbb{R}$ une fonction continue.

   Soit a et b deux points de A et y un réel compris entre $f(a)$ et $f(b)$.

   Montrer qu'il existe $x \in A$ tel que $f(x) = y$.

Exercices d'application

1. Soit f continue sur $[a\,;b]$, à valeurs dans $[a\,;b]$. Montrer qu'il existe c appartenant à $[a\,;b]$ tel que $f(c)=c$.
2. Soit A une partie convexe non vide d'un espace vectoriel normé E et $f\colon A\to\mathbb{R}$ une fonction continue.

   Soit a et b deux points de A et y un réel compris entre $f(a)$ et $f(b)$.

   Montrer qu'il existe $x\in A$ tel que $f(x)=y$.

Solution

Soit $\varphi\colon [0\,;1]\to E$ définie par $\varphi(t)=a+t(b-a)$.

Exercices d'application

1. Soit f continue sur $[a\,;b]$, à valeurs dans $[a\,;b]$. Montrer qu'il existe c appartenant à $[a\,;b]$ tel que $f(c) = c$.
2. Soit A une partie convexe non vide d'un espace vectoriel normé E et $f\colon A \to \mathbb{R}$ une fonction continue.

   Soit a et b deux points de A et y un réel compris entre $f(a)$ et $f(b)$.

   Montrer qu'il existe $x \in A$ tel que $f(x) = y$.

Solution

Soit $\varphi\colon [0\,;1] \to E$ définie par $\varphi(t) = a + t(b - a)$.

φ est à valeurs dans A puisque A est convexe, donc par composition $f \circ \varphi$ est continue sur le segment $[0\,;1]$ et à valeurs réelles.

Exercices d'application

1. Soit f continue sur $[a\,;b]$, à valeurs dans $[a\,;b]$. Montrer qu'il existe c appartenant à $[a\,;b]$ tel que $f(c)=c$.
2. Soit A une partie convexe non vide d'un espace vectoriel normé E et $f\colon A\to\mathbb{R}$ une fonction continue.

   Soit a et b deux points de A et y un réel compris entre $f(a)$ et $f(b)$.

   Montrer qu'il existe $x\in A$ tel que $f(x)=y$.

Solution

Soit $\varphi\colon [0\,;1]\to E$ définie par $\varphi(t)=a+t(b-a)$.

φ est à valeurs dans A puisque A est convexe, donc par composition $f\circ\varphi$ est continue sur le segment $[0\,;1]$ et à valeurs réelles.

Comme $(f\circ\varphi)(0)=f(a)$ et $(f\circ\varphi)(1)=f(b)$, par le théorème des valeurs intermédiaires, il existe $t\in[0\,;1]$ tel que $(f\circ\varphi)(t)=y$.

Exercices d'application

1. Soit f continue sur $[a\,;b]$, à valeurs dans $[a\,;b]$. Montrer qu'il existe c appartenant à $[a\,;b]$ tel que $f(c)=c$.
2. Soit A une partie convexe non vide d'un espace vectoriel normé E et $f\colon A\to\mathbb{R}$ une fonction continue.

   Soit a et b deux points de A et y un réel compris entre $f(a)$ et $f(b)$.

   Montrer qu'il existe $x\in A$ tel que $f(x)=y$.

Solution

Soit $\varphi\colon [0\,;1]\to E$ définie par $\varphi(t)=a+t(b-a)$.

φ est à valeurs dans A puisque A est convexe, donc par composition $f\circ\varphi$ est continue sur le segment $[0\,;1]$ et à valeurs réelles.

Comme $(f\circ\varphi)(0)=f(a)$ et $(f\circ\varphi)(1)=f(b)$, par le théorème des valeurs intermédiaires, il existe $t\in[0\,;1]$ tel que $(f\circ\varphi)(t)=y$.

Pour $x=\varphi(t)\in A$, on a alors $y=f(x)$.

Théorème 21: de bijection

Soit f une fonction définie sur un intervalle I à valeurs dans $\mathbb{R}$.
Si f est **continue** et **strictement monotone** sur I, alors f permet de définir une bijection (que l'on notera encore f) de I sur $J = f(I)$, et la bijection réciproque f^{-1} est continue sur J et de même monotonie que f.

Théorème 21: de bijection

Soit f une fonction définie sur un intervalle I à valeurs dans $\mathbb{R}$.
Si f est **continue** et **strictement monotone** sur I, alors f permet de définir une bijection (que l'on notera encore f) de I sur $J = f(I)$, et la bijection réciproque f^{-1} est continue sur J et de même monotonie que f.

Il existe une sorte de réciproque au théorème précédent :

Théorème 22

Si f est une bijection continue d'un intervalle I sur l'intervalle $J = f(I)$, alors f est strictement monotone.

APPLICATIONS LINÉAIRES CONTINUES

Théorème 23: Caractérisations d'une application linéaire continue

Soient E et F deux espaces vectoriels normés, et $u \in \mathscr{L}(E, F)$. Les propriétés suivantes sont équivalentes :

(a) u est continue ;

(b) Il existe un réel $k \geqslant 0$ tel que, pour tout $x \in E$, $\|u(x)\|_F \leqslant k \|x\|_E$;

(c) u est lipschitzienne.

Théorème 23: Caractérisations d'une application linéaire continue

Soient E et F deux espaces vectoriels normés, et $u \in \mathscr{L}(E, F)$. Les propriétés suivantes sont équivalentes :

(a) u est continue ;

(b) Il existe un réel $k \geqslant 0$ tel que, pour tout $x \in E$, $\|u(x)\|_F \leqslant k\,\|x\|_E$;

(c) u est lipschitzienne.

Démonstration

$(a) \Rightarrow (b)$:

Supposons u linéaire continue ; en particulier, elle est continue en 0_E. Cela implique, en appliquant la définition avec $\varepsilon = 1$, puisque $u(0_E) = 0_F$:

Théorème 23: Caractérisations d'une application linéaire continue

Soient E et F deux espaces vectoriels normés, et $u \in \mathscr{L}(E, F)$. Les propriétés suivantes sont équivalentes :

(a) u est continue ;

(b) Il existe un réel $k \geqslant 0$ tel que, pour tout $x \in E$, $\|u(x)\|_F \leqslant k \|x\|_E$;

(c) u est lipschitzienne.

Démonstration

$(a) \Rightarrow (b)$:

Supposons u linéaire continue ; en particulier, elle est continue en 0_E. Cela implique, en appliquant la définition avec $\varepsilon = 1$, puisque $u(0_E) = 0_F$:

$$\exists\, \alpha > 0 \text{ tq } \|x\| \leqslant \alpha \Longrightarrow \|u(x)\| \leqslant 1$$

Théorème 23: Caractérisations d'une application linéaire continue

Soient E et F deux espaces vectoriels normés, et $u \in \mathscr{L}(E, F)$. Les propriétés suivantes sont équivalentes :

(a) u est continue ;

(b) Il existe un réel $k \geqslant 0$ tel que, pour tout $x \in E$, $\|u(x)\|_F \leqslant k \|x\|_E$;

(c) u est lipschitzienne.

Démonstration

$(a) \Rightarrow (b)$:

Supposons u linéaire continue ; en particulier, elle est continue en 0_E. Cela implique, en appliquant la définition avec $\varepsilon = 1$, puisque $u(0_E) = 0_F$:

$$\exists\, \alpha > 0 \text{ tq } \|x\| \leqslant \alpha \Longrightarrow \|u(x)\| \leqslant 1$$

Pour tout x non nul de E, on a alors $\left\| \frac{\alpha}{\|x\|} x \right\| = \alpha$, donc

Théorème 23: Caractérisations d'une application linéaire continue

Soient E et F deux espaces vectoriels normés, et $u \in \mathscr{L}(E, F)$. Les propriétés suivantes sont équivalentes :

(a) u est continue ;

(b) Il existe un réel $k \geqslant 0$ tel que, pour tout $x \in E$, $\|u(x)\|_F \leqslant k\,\|x\|_E$;

(c) u est lipschitzienne.

Démonstration

$(a) \Rightarrow (b)$:

Supposons u linéaire continue ; en particulier, elle est continue en 0_E. Cela implique, en appliquant la définition avec $\varepsilon = 1$, puisque $u(0_E) = 0_F$:

$$\exists\, \alpha > 0 \text{ tq } \|x\| \leqslant \alpha \Longrightarrow \|u(x)\| \leqslant 1$$

Pour tout x non nul de E, on a alors $\left\|\frac{\alpha}{\|x\|}x\right\| = \alpha$, donc $\left\|u\left(\frac{\alpha}{\|x\|}x\right)\right\| = \left\|\frac{\alpha}{\|x\|}u(x)\right\| \leqslant 1$ puis

Théorème 23: Caractérisations d'une application linéaire continue

Soient E et F deux espaces vectoriels normés, et $u \in \mathscr{L}(E, F)$. Les propriétés suivantes sont équivalentes :

(a) u est continue ;

(b) Il existe un réel $k \geqslant 0$ tel que, pour tout $x \in E$, $\|u(x)\|_F \leqslant k \|x\|_E$;

(c) u est lipschitzienne.

Démonstration

$(a) \Rightarrow (b)$:

Supposons u linéaire continue ; en particulier, elle est continue en 0_E. Cela implique, en appliquant la définition avec $\varepsilon = 1$, puisque $u(0_E) = 0_F$:

$$\exists\, \alpha > 0 \text{ tq } \|x\| \leqslant \alpha \Longrightarrow \|u(x)\| \leqslant 1$$

Pour tout x non nul de E, on a alors $\left\|\frac{\alpha}{\|x\|} x\right\| = \alpha$, donc $\left\|u\left(\frac{\alpha}{\|x\|} x\right)\right\| = \left\|\frac{\alpha}{\|x\|} u(x)\right\| \leqslant 1$ puis $\|u(x)\| \leqslant \frac{1}{\alpha} \|x\|$, et cette égalité reste vraie pour $x = 0$.

Théorème 23: Caractérisations d'une application linéaire continue

Soient E et F deux espaces vectoriels normés, et $u \in \mathscr{L}(E, F)$. Les propriétés suivantes sont équivalentes :

(a) u est continue ;

(b) Il existe un réel $k \geqslant 0$ tel que, pour tout $x \in E$, $\|u(x)\|_F \leqslant k\,\|x\|_E$;

(c) u est lipschitzienne.

Démonstration

$(a) \Rightarrow (b)$:

Supposons u linéaire continue ; en particulier, elle est continue en 0_E. Cela implique, en appliquant la définition avec $\varepsilon = 1$, puisque $u(0_E) = 0_F$:

$$\exists\, \alpha > 0 \text{ tq } \|x\| \leqslant \alpha \Longrightarrow \|u(x)\| \leqslant 1$$

Pour tout x non nul de E, on a alors $\left\|\frac{\alpha}{\|x\|}x\right\| = \alpha$, donc $\left\|u\left(\frac{\alpha}{\|x\|}x\right)\right\| = \left\|\frac{\alpha}{\|x\|}u(x)\right\| \leqslant 1$ puis $\|u(x)\| \leqslant \frac{1}{\alpha}\,\|x\|$, et cette égalité reste vraie pour $x = 0$.

$(b) \Rightarrow (c)$:

Si $\|u(x)\| \leqslant k\,\|x\|$ pour tout x, on a alors, pour tout $(x, y) \in E^2$:

$$\|u(x) - u(y)\| = \|u(x - y)\| \leqslant k\,\|x - y\|$$

Théorème 23: Caractérisations d'une application linéaire continue

Soient E et F deux espaces vectoriels normés, et $u \in \mathscr{L}(E, F)$. Les propriétés suivantes sont équivalentes :

(a) u est continue ;

(b) Il existe un réel $k \geqslant 0$ tel que, pour tout $x \in E$, $\|u(x)\|_F \leqslant k \|x\|_E$;

(c) u est lipschitzienne.

Démonstration

$(a) \Rightarrow (b)$:

Supposons u linéaire continue ; en particulier, elle est continue en 0_E. Cela implique, en appliquant la définition avec $\varepsilon = 1$, puisque $u(0_E) = 0_F$:

$$\exists\, \alpha > 0 \text{ tq } \|x\| \leqslant \alpha \Longrightarrow \|u(x)\| \leqslant 1$$

Pour tout x non nul de E, on a alors $\left\| \frac{\alpha}{\|x\|} x \right\| = \alpha$, donc $\left\| u\left(\frac{\alpha}{\|x\|} x \right) \right\| = \left\| \frac{\alpha}{\|x\|} u(x) \right\| \leqslant 1$ puis $\|u(x)\| \leqslant \frac{1}{\alpha} \|x\|$, et cette égalité reste vraie pour $x = 0$.

$(b) \Rightarrow (c)$:

Si $\|u(x)\| \leqslant k \|x\|$ pour tout x, on a alors, pour tout $(x, y) \in E^2$:

$$\|u(x) - u(y)\| = \|u(x - y)\| \leqslant k \|x - y\|$$

donc u est k-lipschitzienne.

Théorème 23: Caractérisations d'une application linéaire continue

Soient E et F deux espaces vectoriels normés, et $u \in \mathscr{L}(E,F)$. Les propriétés suivantes sont équivalentes :

(a) u est continue ;

(b) Il existe un réel $k \geqslant 0$ tel que, pour tout $x \in E$, $\|u(x)\|_F \leqslant k\,\|x\|_E$;

(c) u est lipschitzienne.

Démonstration

$(a) \Rightarrow (b)$:

Supposons u linéaire continue ; en particulier, elle est continue en 0_E. Cela implique, en appliquant la définition avec $\varepsilon = 1$, puisque $u(0_E) = 0_F$:

$$\exists\, \alpha > 0 \text{ tq } \|x\| \leqslant \alpha \Longrightarrow \|u(x)\| \leqslant 1$$

Pour tout x non nul de E, on a alors $\left\|\frac{\alpha}{\|x\|}x\right\| = \alpha$, donc $\left\|u\left(\frac{\alpha}{\|x\|}x\right)\right\| = \left\|\frac{\alpha}{\|x\|}u(x)\right\| \leqslant 1$ puis $\|u(x)\| \leqslant \frac{1}{\alpha}\,\|x\|$, et cette égalité reste vraie pour $x = 0$.

$(b) \Rightarrow (c)$:

Si $\|u(x)\| \leqslant k\,\|x\|$ pour tout x, on a alors, pour tout $(x,y) \in E^2$:

$$\|u(x) - u(y)\| = \|u(x-y)\| \leqslant k\,\|x-y\|$$

donc u est k-lipschitzienne.

$(c) \Rightarrow (a)$ est immédiat.

Remarques

1. Une application linéaire n'est pas nécessairement continue !

Remarques

1. Une application linéaire n'est pas nécessairement continue !

Exemple

On munit l'espace vectoriel $\mathbb{R}[X]$ de la norme $\| \|_\infty$ définie par :

$$\text{si } P = \sum a_i X^i,\ \|P\|_\infty = \max |a_i| \ .$$

Remarques

1. Une application linéaire n'est pas nécessairement continue !

Exemple

On munit l'espace vectoriel $\mathbb{R}[X]$ de la norme $\| \; \|_\infty$ définie par :

$$\text{si } P = \sum a_i X^i, \; \|P\|_\infty = \max |a_i| \; .$$

Soit φ la forme linéaire définie sur $\mathbb{R}[X]$ par $\varphi(P) = P(1)$. Alors, pour $P_n = 1 + X + \ldots + X^n$ ($n \in \mathbb{N}$), on a $\|P_n\|_\infty = 1$, et $\varphi(P_n) = n + 1$.

Remarques

1. Une application linéaire n'est pas nécessairement continue !

Exemple

On munit l'espace vectoriel $\mathbb{R}[X]$ de la norme $\| \|_\infty$ définie par :

$$\text{si } P = \sum a_i X^i,\ \|P\|_\infty = \max |a_i| \,.$$

Soit φ la forme linéaire définie sur $\mathbb{R}[X]$ par $\varphi(P) = P(1)$. Alors, pour $P_n = 1 + X + \ldots + X^n$ ($n \in \mathbb{N}$), on a $\|P_n\|_\infty = 1$, et $\varphi(P_n) = n + 1$.
Il ne peut donc pas exister de constante k telle que, pour tout P on ait $|\varphi(P)| \leqslant k \|P\|_\infty$ donc φ n'est pas continue.

Remarques

1. Une application linéaire n'est pas nécessairement continue !

Exemple

On munit l'espace vectoriel $\mathbb{R}[X]$ de la norme $\| \ \|_\infty$ définie par :

$$\text{si } P = \sum a_i X^i, \ \|P\|_\infty = \max |a_i| \, .$$

Soit φ la forme linéaire définie sur $\mathbb{R}[X]$ par $\varphi(P) = P(1)$. Alors, pour $P_n = 1 + X + \ldots + X^n$ ($n \in \mathbb{N}$), on a $\|P_n\|_\infty = 1$, et $\varphi(P_n) = n + 1$.
Il ne peut donc pas exister de constante k telle que, pour tout P on ait $|\varphi(P)| \leqslant k \|P\|_\infty$ donc φ n'est pas continue.

2. Une application linéaire peut être continue pour une norme, mais pas pour une autre ! (si elles ne sont pas équivalentes).

Remarques

1. Une application linéaire n'est pas nécessairement continue !

Exemple

On munit l'espace vectoriel $\mathbb{R}[X]$ de la norme $\| \|_\infty$ définie par :

$$\text{si } P = \sum a_i X^i,\ \|P\|_\infty = \max |a_i| .$$

Soit φ la forme linéaire définie sur $\mathbb{R}[X]$ par $\varphi(P) = P(1)$. Alors, pour $P_n = 1 + X + \ldots + X^n$ ($n \in \mathbb{N}$), on a $\|P_n\|_\infty = 1$, et $\varphi(P_n) = n + 1$.
Il ne peut donc pas exister de constante k telle que, pour tout P on ait $|\varphi(P)| \leqslant k \|P\|_\infty$ donc φ n'est pas continue.

2. Une application linéaire peut être continue pour une norme, mais pas pour une autre ! (si elles ne sont pas équivalentes).

Exemple

Si l'on reprend l'exemple précédent, lorsqu'on munit $\mathbb{R}[X]$ de la norme $\| \|_1$ définie par $\left\|\sum a_i X^i\right\|_1 = \sum |a_i|$, alors φ est continue !

Remarques

1. Une application linéaire n'est pas nécessairement continue !

Exemple

On munit l'espace vectoriel $\mathbb{R}[X]$ de la norme $\| \ \|_\infty$ définie par :

$$\text{si } P = \sum a_i X^i, \ \|P\|_\infty = \max |a_i| \, .$$

Soit φ la forme linéaire définie sur $\mathbb{R}[X]$ par $\varphi(P) = P(1)$. Alors, pour $P_n = 1 + X + \ldots + X^n$ ($n \in \mathbb{N}$), on a $\|P_n\|_\infty = 1$, et $\varphi(P_n) = n + 1$.
Il ne peut donc pas exister de constante k telle que, pour tout P on ait $|\varphi(P)| \leqslant k \|P\|_\infty$ donc φ n'est pas continue.

2. Une application linéaire peut être continue pour une norme, mais pas pour une autre ! (si elles ne sont pas équivalentes).

Exemple

Si l'on reprend l'exemple précédent, lorsqu'on munit $\mathbb{R}[X]$ de la norme $\| \ \|_1$ définie par $\left\| \sum a_i X^i \right\|_1 = \sum |a_i|$, alors φ est continue !
En effet, $|\varphi(P) = |P(1)| = |\sum a_i| \leqslant \sum |a_i| = \|P\|_1$, donc φ est continue en vertu de la propriété (b).

Remarques

1. Une application linéaire n'est pas nécessairement continue !

Exemple

On munit l'espace vectoriel $\mathbb{R}[X]$ de la norme $\| \ \|_\infty$ définie par :

$$\text{si } P = \sum a_i X^i, \ \|P\|_\infty = \max |a_i| \,.$$

Soit φ la forme linéaire définie sur $\mathbb{R}[X]$ par $\varphi(P) = P(1)$. Alors, pour $P_n = 1 + X + \ldots + X^n$ ($n \in \mathbb{N}$), on a $\|P_n\|_\infty = 1$, et $\varphi(P_n) = n + 1$.
Il ne peut donc pas exister de constante k telle que, pour tout P on ait $|\varphi(P)| \leqslant k \|P\|_\infty$ donc φ n'est pas continue.

2. Une application linéaire peut être continue pour une norme, mais pas pour une autre ! (si elles ne sont pas équivalentes).

Exemple

Si l'on reprend l'exemple précédent, lorsqu'on munit $\mathbb{R}[X]$ de la norme $\| \ \|_1$ définie par $\left\|\sum a_i X^i\right\|_1 = \sum |a_i|$, alors φ est continue !
En effet, $|\varphi(P) = |P(1)| = |\sum a_i| \leqslant \sum |a_i| = \|P\|_1$, donc φ est continue en vertu de la propriété (b).

Cependant, on a le résultat (important) suivant :

Théorème 24

Si E est de dimension finie, toute application linéaire $u \in \mathscr{L}(E, F)$ est continue.

Théorème 25

Si E est de dimension finie, toute application linéaire $u \in \mathscr{L}(E, F)$ est continue.

Théorème 25

Si E est de dimension finie, toute application linéaire $u \in \mathscr{L}(E, F)$ est continue.

Démonstration

E étant de dimension finie, toutes les normes y sont équivalentes. Soit $\mathscr{B} = (e_1, \ldots, e_n)$ une base de E, que l'on munit de la norme $\| \|_1$ associée.

Théorème 25

Si E est de dimension finie, toute application linéaire $u \in \mathscr{L}(E, F)$ est continue.

Démonstration

E étant de dimension finie, toutes les normes y sont équivalentes. Soit $\mathscr{B} = (e_1, \ldots, e_n)$ une base de E, que l'on munit de la norme $\| \ \|_1$ associée.

On a alors, si $u \in \mathscr{L}(E, F)$ et $x = \sum_{i=1}^{n} x_i e_i$:

Théorème 25

Si E est de dimension finie, toute application linéaire $u \in \mathscr{L}(E, F)$ est continue.

Démonstration

E étant de dimension finie, toutes les normes y sont équivalentes. Soit $\mathscr{B} = (e_1, \dots, e_n)$ une base de E, que l'on munit de la norme $\| \ \|_1$ associée.

On a alors, si $u \in \mathscr{L}(E, F)$ et $x = \sum\limits_{i=1}^{n} x_i e_i$:

$$\|u(x)\|_F = \left\| \sum_{i=1}^{n} x_i u(e_i) \right\|_F \leqslant \sum_{i=1}^{n} |x_i| \, \|u(e_i)\|_F \leqslant k \sum_{i=1}^{n} |x_i| \qquad \text{avec } k = \max_{1 \leqslant i \leqslant n} \|u(e_i)\|_F$$

Théorème 25

Si E est de dimension finie, toute application linéaire $u \in \mathscr{L}(E, F)$ est continue.

Démonstration

E étant de dimension finie, toutes les normes y sont équivalentes. Soit $\mathscr{B} = (e_1, \ldots, e_n)$ une base de E, que l'on munit de la norme $\| \ \|_1$ associée.

On a alors, si $u \in \mathscr{L}(E, F)$ et $x = \sum_{i=1}^{n} x_i e_i$:

$$\|u(x)\|_F = \left\| \sum_{i=1}^{n} x_i u(e_i) \right\|_F \leqslant \sum_{i=1}^{n} |x_i| \, \|u(e_i)\|_F \leqslant k \sum_{i=1}^{n} |x_i| \qquad \text{avec } k = \max_{1 \leqslant i \leqslant n} \|u(e_i)\|_F$$

Ainsi, $\|u(x)\|_F \leqslant k \, \|x\|_1$, ce qui prouve que u est continue.

Théorème 25

Si E est de dimension finie, toute application linéaire $u \in \mathscr{L}(E, F)$ est continue.

Démonstration

E étant de dimension finie, toutes les normes y sont équivalentes. Soit $\mathscr{B} = (e_1, \ldots, e_n)$ une base de E, que l'on munit de la norme $\| \ \|_1$ associée.

On a alors, si $u \in \mathscr{L}(E, F)$ et $x = \sum_{i=1}^{n} x_i e_i$:

$$\|u(x)\|_F = \left\| \sum_{i=1}^{n} x_i u(e_i) \right\|_F \leqslant \sum_{i=1}^{n} |x_i| \, \|u(e_i)\|_F \leqslant k \sum_{i=1}^{n} |x_i| \qquad \text{avec } k = \max_{1 \leqslant i \leqslant n} \|u(e_i)\|_F$$

Ainsi, $\|u(x)\|_F \leqslant k \|x\|_1$, ce qui prouve que u est continue.

Exemples

1. L'application « trace » est une forme linéaire continue sur $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$.

Théorème 25

Si E est de dimension finie, toute application linéaire $u \in \mathscr{L}(E, F)$ est continue.

Démonstration

E étant de dimension finie, toutes les normes y sont équivalentes. Soit $\mathscr{B} = (e_1, \ldots, e_n)$ une base de E, que l'on munit de la norme $\| \ \|_1$ associée.

On a alors, si $u \in \mathscr{L}(E, F)$ et $x = \sum_{i=1}^{n} x_i e_i$:

$$\|u(x)\|_F = \left\| \sum_{i=1}^{n} x_i u(e_i) \right\|_F \leqslant \sum_{i=1}^{n} |x_i| \, \|u(e_i)\|_F \leqslant k \sum_{i=1}^{n} |x_i| \qquad \text{avec } k = \max_{1 \leqslant i \leqslant n} \|u(e_i)\|_F$$

Ainsi, $\|u(x)\|_F \leqslant k \, \|x\|_1$, ce qui prouve que u est continue.

Exemples

1. L'application « trace » est une forme linéaire continue sur $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$.
2. L'application « transposée » est une application linéaire continue de $\mathcal{M}_{p,q}(\mathbb{K})$ sur $\mathcal{M}_{q,p}(\mathbb{K})$.

Théorème 25

Si E est de dimension finie, toute application linéaire $u \in \mathscr{L}(E, F)$ est continue.

Démonstration

E étant de dimension finie, toutes les normes y sont équivalentes. Soit $\mathscr{B} = (e_1, \dots, e_n)$ une base de E, que l'on munit de la norme $\| \ \|_1$ associée.

On a alors, si $u \in \mathscr{L}(E, F)$ et $x = \sum_{i=1}^{n} x_i e_i$:

$$\|u(x)\|_F = \left\| \sum_{i=1}^{n} x_i u(e_i) \right\|_F \leqslant \sum_{i=1}^{n} |x_i| \, \|u(e_i)\|_F \leqslant k \sum_{i=1}^{n} |x_i| \qquad \text{avec } k = \max_{1 \leqslant i \leqslant n} \|u(e_i)\|_F$$

Ainsi, $\|u(x)\|_F \leqslant k \|x\|_1$, ce qui prouve que u est continue.

Exemples

1. L'application « trace » est une forme linéaire continue sur $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$.
2. L'application « transposée » est une application linéaire continue de $\mathcal{M}_{p,q}(\mathbb{K})$ sur $\mathcal{M}_{q,p}(\mathbb{K})$.
3. Soit $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ fixée. L'application $M \mapsto AM$ est un endomorphisme continu de $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$.

APPLICATIONS MULTILINÉAIRES CONTINUES

Théorème 26

Soient $(E_i)_{1\leqslant i\leqslant p}$ p espaces vectoriels normés, muni chacun d'une norme notée $\| \ \|_i$.

On munit l'espace vectoriel produit $E = \prod_{i=1}^{p} E_i$ de la norme $\| \ \|_\infty$ définie par :

$$\forall\, x = (x_1, \ldots, x_p) \in E, \quad \|x\|_\infty = \max_{1\leqslant i\leqslant p} \|x_i\|_i$$

Soit F un espace vectoriel normé, et $u : E \longrightarrow F$ une application p-linéaire. Alors, les propriétés suivantes sont équivalentes :

(a) u est continue.

(b) Il existe un réel $k \geqslant 0$ tel que, pour tout $x = (x_1, \ldots, x_p) \in E$, on ait

$$\|u(x_1, \ldots, x_p)\|_F \leqslant k\, \|x_1\|_1 \cdot \|x_2\|_2 \cdots \|x_p\|_p.$$

Théorème 26

Soient $(E_i)_{1\leqslant i\leqslant p}$ p espaces vectoriels normés, muni chacun d'une norme notée $\| \ \|_i$.

On munit l'espace vectoriel produit $E = \prod_{i=1}^{p} E_i$ de la norme $\| \ \|_\infty$ définie par :

$$\forall\, x = (x_1, \ldots, x_p) \in E, \quad \|x\|_\infty = \max_{1\leqslant i\leqslant p} \|x_i\|_i$$

Soit F un espace vectoriel normé, et $u : E \longrightarrow F$ une application p-linéaire. Alors, les propriétés suivantes sont équivalentes :

(a) u est continue.

(b) Il existe un réel $k \geqslant 0$ tel que, pour tout $x = (x_1, \ldots, x_p) \in E$, on ait

$$\|u(x_1, \ldots, x_p)\|_F \leqslant k\, \|x_1\|_1 \cdot \|x_2\|_2 \cdots \|x_p\|_p.$$

Exemple

Si E est un espace préhilbertien réel, c'est-à-dire un $\mathbb{R}$-espace vectoriel muni d'un produit scalaire $\varphi : \left\{ \begin{array}{ccc} E \times E & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ (x, y) & \longmapsto & \langle x|y\rangle \end{array} \right.$, alors φ est une forme bilinéaire continue.

Théorème 26

Soient $(E_i)_{1\leqslant i\leqslant p}$ p espaces vectoriels normés, muni chacun d'une norme notée $\|\ \|_i$.

On munit l'espace vectoriel produit $E = \prod_{i=1}^{p} E_i$ de la norme $\|\ \|_\infty$ définie par :

$$\forall\, x = (x_1, \ldots, x_p) \in E, \quad \|x\|_\infty = \max_{1\leqslant i\leqslant p} \|x_i\|_i$$

Soit F un espace vectoriel normé, et $u : E \longrightarrow F$ une application p-linéaire. Alors, les propriétés suivantes sont équivalentes :

(a) u est continue.

(b) Il existe un réel $k \geqslant 0$ tel que, pour tout $x = (x_1, \ldots, x_p) \in E$, on ait
$$\|u(x_1, \ldots, x_p)\|_F \leqslant k\, \|x_1\|_1 \cdot \|x_2\|_2 \cdots \|x_p\|_p.$$

Exemple

Si E est un espace préhilbertien réel, c'est-à-dire un $\mathbb{R}$-espace vectoriel muni d'un produit scalaire $\varphi : \left\{ \begin{array}{ccc} E \times E & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ (x, y) & \longmapsto & \langle x|y \rangle \end{array} \right.$, alors φ est une forme bilinéaire continue.

Cela découle de l'inégalité de Cauchy-Schwarz et du théorème précédent.

Théorème 27

Si $E_1, \dots, E_p$ sont des espaces vectoriels de dimension finie, alors toute application p-linéaire sur $E_1 \times \cdots \times E_p$ est continue.

Théorème 27

Si $E_1, \ldots, E_p$ sont des espaces vectoriels de dimension finie, alors toute application p-linéaire sur $E_1 \times \cdots \times E_p$ est continue.

Exemples

1. Si E est un espace vectoriel de dimension n rapporté à une base $\mathscr{B}$, l'application $\det_{\mathscr{B}}$ qui à toute famille de n vecteurs de E associe son déterminant dans la base $\mathscr{B}$ est continue.

Théorème 27

Si $E_1, \dots, E_p$ sont des espaces vectoriels de dimension finie, alors toute application p-linéaire sur $E_1 \times \cdots \times E_p$ est continue.

Exemples

1. Si E est un espace vectoriel de dimension n rapporté à une base $\mathscr{B}$, l'application $\det_{\mathscr{B}}$ qui à toute famille de n vecteurs de E associe son déterminant dans la base $\mathscr{B}$ est continue.
2. Dans $\mathcal{M}_p(\mathbb{K})$, l'application qui à deux matrices A et B associe leur produit AB est bilinéaire continue.

Théorème 27

Si $E_1, \ldots, E_p$ sont des espaces vectoriels de dimension finie, alors toute application p-linéaire sur $E_1 \times \cdots \times E_p$ est continue.

Exemples

1. Si E est un espace vectoriel de dimension n rapporté à une base $\mathscr{B}$, l'application $\det_{\mathscr{B}}$ qui à toute famille de n vecteurs de E associe son déterminant dans la base $\mathscr{B}$ est continue.
2. Dans $\mathcal{M}_p(\mathbb{K})$, l'application qui à deux matrices A et B associe leur produit AB est bilinéaire continue.

   Cela permet alors de dire, en utilisant la caractérisation séquentielle de la continuité, que si deux suites $(A_n)_{n\in\mathbb{N}}$ et $(B_n)_{n\in\mathbb{N}}$ de matrices de $\mathcal{M}_p(\mathbb{K})$ convergent vers deux matrices A et B respectivement, alors la suite $\big(A_nB_n\big)$ converge vers AB.

Théorème 27

Si $E_1, \ldots, E_p$ sont des espaces vectoriels de dimension finie, alors toute application p-linéaire sur $E_1 \times \cdots \times E_p$ est continue.

Exemples

1. Si E est un espace vectoriel de dimension n rapporté à une base $\mathscr{B}$, l'application $\det_{\mathscr{B}}$ qui à toute famille de n vecteurs de E associe son déterminant dans la base $\mathscr{B}$ est continue.
2. Dans $\mathcal{M}_p(\mathbb{K})$, l'application qui à deux matrices A et B associe leur produit AB est bilinéaire continue.

   Cela permet alors de dire, en utilisant la caractérisation séquentielle de la continuité, que si deux suites $(A_n)_{n\in\mathbb{N}}$ et $(B_n)_{n\in\mathbb{N}}$ de matrices de $\mathcal{M}_p(\mathbb{K})$ convergent vers deux matrices A et B respectivement, alors la suite $\left(A_nB_n\right)$ converge vers AB.

   Cela permet aussi, par exemple, de démontrer que l'application $A \mapsto A^2$ est continue sur $\mathcal{M}_p(\mathbb{K})$, comme composée de l'application « produit » et de l'application linéaire continue $A \mapsto (A, A)$.

FIN DU CHAPITRE VIII