Chapitre X : Séries de nombres réels ou complexes

PSI*

Novembre 2022

Lycée d'Arsonval

Dans tout le chapitre, $\mathbb{K}$ désigne $\mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$.

SÉRIES NUMÉRIQUES

Définitions et premières propriétés

Définition 1

Soit $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite d'éléments de $\mathbb{K}$.

On appelle <u>série de terme général u_n</u> la *suite* de terme général S_n, où $S_n = \sum_{k=0}^{n} u_k$.

Cette série se note de façon abrégée : $\sum_{n\in\mathbb{N}} u_n$; S_n s'appelle la <u>somme partielle d'indice n</u> de la série.

Définitions et premières propriétés

Définition 1

Soit $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite d'éléments de $\mathbb{K}$.

On appelle série de terme général u_n la *suite* de terme général S_n, où $S_n = \sum_{k=0}^{n} u_k$.

Cette série se note de façon abrégée : $\sum_{n\in\mathbb{N}} u_n$; S_n s'appelle la somme partielle d'indice n de la série.

Remarques

1. Si la suite (u_n) n'est définie qu'à partir d'un certain rang n_0, on posera, pour $n \geqslant n_0$, $S_n = \sum_{k=n_0}^{n} u_k$. La série se note alors $\sum_{n\geqslant n_0} u_n$.

Définitions et premières propriétés

Définition 1

Soit $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite d'éléments de $\mathbb{K}$.

On appelle série de terme général u_n la *suite* de terme général S_n, où $S_n = \sum_{k=0}^{n} u_k$.

Cette série se note de façon abrégée : $\sum_{n\in\mathbb{N}} u_n$; S_n s'appelle la somme partielle d'indice n de la série.

Remarques

1. Si la suite (u_n) n'est définie qu'à partir d'un certain rang n_0, on posera, pour $n \geqslant n_0$, $S_n = \sum_{k=n_0}^{n} u_k$. La série se note alors $\sum_{n\geqslant n_0} u_n$.

2. **Important : lien suites-séries**

   À toute série est associée, par définition, la suite de ses sommes partielles.

   Mais, réciproquement, à toute suite (S_n), on peut associer la série de terme général u_n, où : $u_0 = S_0$ et $u_n = S_n - S_{n-1}$ pour $n \geqslant 1$. Les S_n sont alors les sommes partielles de la série $\sum u_n$.

Définitions et premières propriétés

Définition 1

Soit $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite d'éléments de $\mathbb{K}$.

On appelle série de terme général u_n la *suite* de terme général S_n, où $S_n = \sum_{k=0}^{n} u_k$.

Cette série se note de façon abrégée : $\sum_{n\in\mathbb{N}} u_n$; S_n s'appelle la somme partielle d'indice n de la série.

Remarques

1. Si la suite (u_n) n'est définie qu'à partir d'un certain rang n_0, on posera, pour $n \geqslant n_0$, $S_n = \sum_{k=n_0}^{n} u_k$. La série se note alors $\sum_{n\geqslant n_0} u_n$.

2. **Important : lien suites-séries**
À toute série est associée, par définition, la suite de ses sommes partielles.

Mais, réciproquement, à toute suite (S_n), on peut associer la série de terme général u_n, où : $u_0 = S_0$ et $u_n = S_n - S_{n-1}$ pour $n \geqslant 1$. Les S_n sont alors les sommes partielles de la série $\sum u_n$.

Cela permet dans certains cas d'étudier une suite (ici la suite (S_n)) en utilisant les résultats que nous allons voir sur les séries (ici la série de terme général u_n).

Définition 2

On dit qu'une série de terme général u_n est convergente si la suite (S_n) de ses sommes partielles est convergente dans $\mathbb{K}$. On note alors $\sum_{k=0}^{+\infty} u_k$, appelée somme de la série, la limite de S_n, soit :

$$\sum_{k=0}^{+\infty} u_k = \lim_{n\to+\infty}\left(\sum_{k=0}^{n} u_k\right).$$

Une série non convergente est dite divergente.

Définition 2

On dit qu'une série de terme général u_n est convergente si la suite (S_n) de ses sommes partielles est convergente dans $\mathbb{K}$. On note alors $\sum_{k=0}^{+\infty} u_k$, appelée somme de la série, la limite de S_n, soit :

$$\sum_{k=0}^{+\infty} u_k = \lim_{n \to +\infty} \left(\sum_{k=0}^{n} u_k \right).$$

Une série non convergente est dite divergente.

L'écriture $\sum_{n \in \mathbb{N}} u_n$ est une simple notation pour désigner la série de terme général u_n.

Cependant, l'écriture $\sum_{k=0}^{+\infty} u_k$ ne doit, elle, n'être utilisée *qu'après* avoir démontré la convergence de la série !

De plus, il ne faut jamais oublier que cette dernière écriture désigne une **limite**, donc tout calcul rigoureux sur les séries doit faire appel aux théorèmes sur les limites de suites.

Définition 2

On dit qu'une série de terme général u_n est convergente si la suite (S_n) de ses sommes partielles est convergente dans $\mathbb{K}$. On note alors $\sum_{k=0}^{+\infty} u_k$, appelée somme de la série, la limite de S_n, soit :

$$\sum_{k=0}^{+\infty} u_k = \lim_{n\to+\infty} \left(\sum_{k=0}^{n} u_k \right).$$

Une série non convergente est dite divergente.

L'écriture $\sum_{n\in\mathbb{N}} u_n$ est une simple notation pour désigner la série de terme général u_n.

Cependant, l'écriture $\sum_{k=0}^{+\infty} u_k$ ne doit, elle, n'être utilisée *qu'après* avoir démontré la convergence de la série !

De plus, il ne faut jamais oublier que cette dernière écriture désigne une **limite**, donc tout calcul rigoureux sur les séries doit faire appel aux théorèmes sur les limites de suites.

Remarques

1. On ne change pas la nature d'une série (convergence ou divergence) si on considère seulement les sommes partielles à partir d'un certain rang n_0 (mais la valeur de la somme éventuelle change...).

Définition 2

On dit qu'une série de terme général u_n est convergente si la suite (S_n) de ses sommes partielles est convergente dans $\mathbb{K}$. On note alors $\sum_{k=0}^{+\infty} u_k$, appelée somme de la série, la limite de S_n, soit :

$$\sum_{k=0}^{+\infty} u_k = \lim_{n\to+\infty} \left(\sum_{k=0}^{n} u_k\right).$$

Une série non convergente est dite divergente.

L'écriture $\sum_{n\in\mathbb{N}} u_n$ est une simple notation pour désigner la série de terme général u_n.

Cependant, l'écriture $\sum_{k=0}^{+\infty} u_k$ ne doit, elle, n'être utilisée *qu'après* avoir démontré la convergence de la série !

De plus, il ne faut jamais oublier que cette dernière écriture désigne une **limite**, donc tout calcul rigoureux sur les séries doit faire appel aux théorèmes sur les limites de suites.

Remarques

1. On ne change pas la nature d'une série (convergence ou divergence) si on considère seulement les sommes partielles à partir d'un certain rang n_0 (mais la valeur de la somme éventuelle change...).
2. De même, si deux séries ne diffèrent que d'un nombre *fini* de termes, elles sont de même nature.

Définition 3

Soit $\sum\limits_{n\in\mathbb{N}} u_n$ une série **convergente**, et $S = \sum\limits_{k=0}^{+\infty} u_k$ sa somme. On appelle reste d'ordre n de cette série le nombre : $R_n = S - S_n = \sum\limits_{k=n+1}^{+\infty} u_k$.

Définition 3

Soit $\sum\limits_{n\in\mathbb{N}} u_n$ une série **convergente**, et $S = \sum\limits_{k=0}^{+\infty} u_k$ sa somme. On appelle reste d'ordre n de cette série le nombre : $R_n = S - S_n = \sum\limits_{k=n+1}^{+\infty} u_k$.

Rem : On a les relations : $\forall\, n \in \mathbb{N}^*,\ u_n = R_{n-1} - R_n$ et $\lim\limits_{n\to+\infty} R_n = 0$.

Définition 3

Soit $\sum_{n\in\mathbb{N}} u_n$ une série **convergente**, et $S = \sum_{k=0}^{+\infty} u_k$ sa somme. On appelle reste d'ordre n de cette série le nombre : $R_n = S - S_n = \sum_{k=n+1}^{+\infty} u_k$.

Rem : On a les relations : $\forall\, n \in \mathbb{N}^*,\ u_n = R_{n-1} - R_n$ et $\lim_{n\to+\infty} R_n = 0$.

Théorème 1: Condition nécessaire de convergence

Si la série de terme général u_n converge, **alors** $\lim_{n\to+\infty} u_n = 0$.

Définition 3

Soit $\sum_{n\in\mathbb{N}} u_n$ une série **convergente**, et $S = \sum_{k=0}^{+\infty} u_k$ sa somme. On appelle reste d'ordre n de cette série le nombre : $R_n = S - S_n = \sum_{k=n+1}^{+\infty} u_k$.

Rem : On a les relations : $\forall\, n \in \mathbb{N}^*,\ u_n = R_{n-1} - R_n$ et $\lim_{n\to+\infty} R_n = 0$.

Théorème 1: Condition nécessaire de convergence

Si la série de terme général u_n converge, **alors** $\lim_{n\to+\infty} u_n = 0$.

Démonstration

On sait que que $u_n = S_n - S_{n-1}$. Si $\lim S_n = S$ existe, on en déduit immédiatement que $\lim_{n\to\infty} u_n = S - S = 0$.

Définition 3

Soit $\sum_{n\in\mathbb{N}} u_n$ une série **convergente**, et $S = \sum_{k=0}^{+\infty} u_k$ sa somme. On appelle reste d'ordre n de cette série le nombre : $R_n = S - S_n = \sum_{k=n+1}^{+\infty} u_k$.

Rem : On a les relations : $\forall\, n \in \mathbb{N}^*,\ u_n = R_{n-1} - R_n$ et $\lim_{n\to+\infty} R_n = 0$.

Théorème 1: Condition nécessaire de convergence

Si la série de terme général u_n converge, **alors** $\lim_{n\to+\infty} u_n = 0$.

Démonstration

On sait que que $u_n = S_n - S_{n-1}$. Si $\lim S_n = S$ existe, on en déduit immédiatement que $\lim_{n\to\infty} u_n = S - S = 0$.

Définition 4

Une série dont le terme général ne tend pas vers 0 est dite grossièrement divergente.

Définition 3

Soit $\sum_{n\in\mathbb{N}} u_n$ une série **convergente**, et $S = \sum_{k=0}^{+\infty} u_k$ sa somme. On appelle reste d'ordre n de cette série le nombre : $R_n = S - S_n = \sum_{k=n+1}^{+\infty} u_k$.

Rem : On a les relations : $\forall\, n \in \mathbb{N}^*,\ u_n = R_{n-1} - R_n$ et $\lim_{n\to+\infty} R_n = 0$.

Théorème 1: Condition nécessaire de convergence

Si la série de terme général u_n converge, **alors** $\lim_{n\to+\infty} u_n = 0$.

Démonstration

On sait que que $u_n = S_n - S_{n-1}$. Si $\lim S_n = S$ existe, on en déduit immédiatement que $\lim_{n\to\infty} u_n = S - S = 0$.

Définition 4

Une série dont le terme général ne tend pas vers 0 est dite grossièrement divergente.

La réciproque de ce théorème *est fausse* : on peut avoir $\lim_{n\to+\infty} u_n = 0$ et la série $\sum_{n\in\mathbb{N}} u_n$ divergente ! L'exemple ci-après est à connaître absolument.

Exemple important : la série harmonique

La série harmonique $\sum_{n\in\mathbb{N}^*} \frac{1}{n}$ est divergente (cependant, son terme général tend vers 0 !)

Exemple important : la série harmonique

La série harmonique $\sum_{n\in\mathbb{N}^*} \dfrac{1}{n}$ est divergente (cependant, son terme général tend vers 0 !)

1re méthode : Soit $S_n = \sum_{k=1}^{n} \dfrac{1}{k}$. Alors : $S_{2n} - S_n = \sum_{k=n+1}^{2n} \dfrac{1}{k} \geqslant n \cdot \dfrac{1}{2n} = \dfrac{1}{2}\cdot$

Exemple important : la série harmonique

La série harmonique $\sum_{n\in\mathbb{N}^*} \frac{1}{n}$ est divergente (cependant, son terme général tend vers 0 !)

1re méthode : Soit $S_n = \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k}$. Alors : $S_{2n} - S_n = \sum_{k=n+1}^{2n} \frac{1}{k} \geqslant n \cdot \frac{1}{2n} = \frac{1}{2}$.

Si (S_n) était convergente, on devrait avoir $\lim_{n\to+\infty}(S_{2n} - S_n) = 0$ d'où la contradiction .

Exemple important : la série harmonique

La série harmonique $\sum_{n\in\mathbb{N}^*} \frac{1}{n}$ est divergente (cependant, son terme général tend vers 0 !)

1re méthode : Soit $S_n = \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k}$. Alors : $S_{2n} - S_n = \sum_{k=n+1}^{2n} \frac{1}{k} \geqslant n \cdot \frac{1}{2n} = \frac{1}{2}$.

Si (S_n) était convergente, on devrait avoir $\lim_{n\to+\infty} (S_{2n} - S_n) = 0$ d'où la contradiction .

2e méthode : Le théorème des accroissements finis appliqué à la fonction ln sur l'intervalle $[k\,;k+1]$ ($k \in \mathbb{N}^*$) donne :

$$\exists\, c \in \,]k\,;k+1[\text{ tel que } \ln(k+1) - \ln k = \frac{1}{c}\,,$$

Exemple important : la série harmonique

La série harmonique $\sum_{n\in\mathbb{N}^*} \frac{1}{n}$ est divergente (cependant, son terme général tend vers 0 !)

1re méthode : Soit $S_n = \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k}$. Alors : $S_{2n} - S_n = \sum_{k=n+1}^{2n} \frac{1}{k} \geqslant n \cdot \frac{1}{2n} = \frac{1}{2}$.

Si (S_n) était convergente, on devrait avoir $\lim_{n\to+\infty}(S_{2n} - S_n) = 0$ d'où la contradiction .

2e méthode : Le théorème des accroissements finis appliqué à la fonction ln sur l'intervalle $[k\,;k+1]$ $(k \in \mathbb{N}^*)$ donne :

$$\exists\, c \in \,]k\,;k+1[\text{ tel que } \ln(k+1) - \ln k = \frac{1}{c}\,,$$

d'où : $\forall\, k \in \mathbb{N}^*$, $\frac{1}{k+1} \leqslant \ln(k+1) - \ln k \leqslant \frac{1}{k}$, puis, pour $k \geqslant 2$: $\ln(k+1) - \ln k \leqslant \frac{1}{k} \leqslant \ln k - \ln(k-1)$.

Exemple important : la série harmonique

La série harmonique $\sum_{n\in\mathbb{N}^*}\frac{1}{n}$ est divergente (cependant, son terme général tend vers 0 !)

1re méthode : Soit $S_n=\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{k}$. Alors : $S_{2n}-S_n=\sum_{k=n+1}^{2n}\frac{1}{k}\geqslant n\cdot\frac{1}{2n}=\frac{1}{2}\,.$

Si (S_n) était convergente, on devrait avoir $\lim_{n\to+\infty}(S_{2n}-S_n)=0$ d'où la contradiction .

2e méthode : Le théorème des accroissements finis appliqué à la fonction ln sur l'intervalle $[k\,;k+1]$ ($k\in\mathbb{N}^*$) donne :

$$\exists\, c\in\,]k\,;k+1[\text{ tel que }\ln(k+1)-\ln k=\frac{1}{c}\,,$$

d'où : $\forall\, k\in\mathbb{N}^*$, $\frac{1}{k+1}\leqslant\ln(k+1)-\ln k\leqslant\frac{1}{k}$, puis, pour $k\geqslant 2$: $\ln(k+1)-\ln k\leqslant\frac{1}{k}\leqslant\ln k-\ln(k-1)$.

En additionnant ces inégalités pour $k\in[\![2\,;n]\!]$, on obtient, après télescopage :

$$\ln(n+1)-\ln 2\leqslant S_n-1\leqslant\ln n$$

et finalement : $\ln(n+1)-\ln 2+1\leqslant S_n\leqslant\ln n+1$.

Exemple important : la série harmonique

La série harmonique $\sum_{n\in\mathbb{N}^*} \frac{1}{n}$ est divergente (cependant, son terme général tend vers 0 !)

1re méthode : Soit $S_n = \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k}$. Alors : $S_{2n} - S_n = \sum_{k=n+1}^{2n} \frac{1}{k} \geqslant n \cdot \frac{1}{2n} = \frac{1}{2}$.

Si (S_n) était convergente, on devrait avoir $\lim_{n\to+\infty}(S_{2n} - S_n) = 0$ d'où la contradiction .

2e méthode : Le théorème des accroissements finis appliqué à la fonction ln sur l'intervalle $[k\,;k+1]$ ($k \in \mathbb{N}^*$) donne :

$$\exists\, c \in \,]k\,;k+1[\text{ tel que } \ln(k+1) - \ln k = \frac{1}{c}\,,$$

d'où : $\forall\, k \in \mathbb{N}^*\ ,\ \frac{1}{k+1} \leqslant \ln(k+1) - \ln k \leqslant \frac{1}{k}$, puis, pour $k \geqslant 2$: $\ln(k+1) - \ln k \leqslant \frac{1}{k} \leqslant \ln k - \ln(k-1)$.

En additionnant ces inégalités pour $k \in [\![2\,;n]\!]$, on obtient, après télescopage :

$$\ln(n+1) - \ln 2 \leqslant S_n - 1 \leqslant \ln n$$

et finalement : $\ln(n+1) - \ln 2 + 1 \leqslant S_n \leqslant \ln n + 1$. Ce dernier encadrement montre que :

- $\lim_{n\to\infty} S_n = +\infty$: la série diverge.
- $\lim_{n\to\infty} \left(\frac{S_n}{\ln n}\right) = 1$ c'est-à-dire $S_n \underset{n\to+\infty}{\sim} \ln n$.

Exemple important : la série harmonique

La série harmonique $\sum_{n\in\mathbb{N}^*} \frac{1}{n}$ est divergente (cependant, son terme général tend vers 0 !)

1re méthode : Soit $S_n = \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k}$. Alors : $S_{2n} - S_n = \sum_{k=n+1}^{2n} \frac{1}{k} \geqslant n \cdot \frac{1}{2n} = \frac{1}{2}$.

Si (S_n) était convergente, on devrait avoir $\lim_{n\to+\infty}(S_{2n} - S_n) = 0$ d'où la contradiction .

2e méthode : Le théorème des accroissements finis appliqué à la fonction ln sur l'intervalle $[k\,;k+1]$ ($k \in \mathbb{N}^*$) donne :

$$\exists\, c \in\,]k\,;k+1[\text{ tel que } \ln(k+1) - \ln k = \frac{1}{c}\,,$$

d'où : $\forall\, k \in \mathbb{N}^*$, $\frac{1}{k+1} \leqslant \ln(k+1) - \ln k \leqslant \frac{1}{k}$, puis, pour $k \geqslant 2$: $\ln(k+1) - \ln k \leqslant \frac{1}{k} \leqslant \ln k - \ln(k-1)$.

En additionnant ces inégalités pour $k \in [\![2\,;n]\!]$, on obtient, après télescopage :

$$\ln(n+1) - \ln 2 \leqslant S_n - 1 \leqslant \ln n$$

et finalement : $\ln(n+1) - \ln 2 + 1 \leqslant S_n \leqslant \ln n + 1$. Ce dernier encadrement montre que :

- $\lim_{n\to\infty} S_n = +\infty$: la série diverge.
- $\lim_{n\to\infty} \left(\frac{S_n}{\ln n}\right) = 1$ c'est-à-dire $S_n \underset{n\to+\infty}{\sim} \ln n$.

En résumé :

$$\boxed{\text{la série harmonique diverge et ses sommes partielles vérifient : } \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k} \underset{n\to+\infty}{\sim} \ln n.}$$

Exemples de séries classiques

Séries géométriques

Il s'agit de séries dont le terme général est celui d'une suite géométrique. Si $u_n = q^n$ ($q \in \mathbb{C}$), on a :

$$S_n = \sum_{k=0}^{n} q^k = \begin{cases} n+1 & \text{si } q = 1 \\ \dfrac{1-q^{n+1}}{1-q} & \text{sinon}. \end{cases}$$

Exemples de séries classiques

Séries géométriques

Il s'agit de séries dont le terme général est celui d'une suite géométrique. Si $u_n = q^n$ ($q \in \mathbb{C}$), on a :

$$S_n = \sum_{k=0}^{n} q^k = \begin{cases} n+1 & \text{si } q = 1 \\ \dfrac{1-q^{n+1}}{1-q} & \text{sinon}. \end{cases}$$

Donc : $\boxed{\text{la série géométrique } \sum_{n\in\mathbb{N}} q^n \text{ converge ssi } |q| < 1 \text{ et dans ce cas : } \sum_{n=0}^{+\infty} q^n = \dfrac{1}{1-q}\,.}$

Exemples de séries classiques

Séries géométriques

Il s'agit de séries dont le terme général est celui d'une suite géométrique. Si $u_n = q^n$ ($q \in \mathbb{C}$), on a :

$$S_n = \sum_{k=0}^{n} q^k = \begin{cases} n+1 & \text{si } q = 1 \\ \dfrac{1-q^{n+1}}{1-q} & \text{sinon}. \end{cases}$$

Donc : $\boxed{\text{la série géométrique } \sum_{n\in\mathbb{N}} q^n \text{ converge ssi } |q| < 1 \text{ et dans ce cas : } \sum_{n=0}^{+\infty} q^n = \dfrac{1}{1-q}\,.}$

Démonstration

La série diverge évidemment pour $q = 1$, puisque alors $S_n = n+1 \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} +\infty$.

Exemples de séries classiques

Séries géométriques

Il s'agit de séries dont le terme général est celui d'une suite géométrique. Si $u_n = q^n$ ($q \in \mathbb{C}$), on a :

$$S_n = \sum_{k=0}^{n} q^k = \begin{cases} n+1 & \text{si } q = 1 \\ \dfrac{1-q^{n+1}}{1-q} & \text{sinon}. \end{cases}$$

Donc : $\boxed{\text{la série géométrique } \sum_{n \in \mathbb{N}} q^n \text{ converge ssi } |q| < 1 \text{ et dans ce cas : } \sum_{n=0}^{+\infty} q^n = \dfrac{1}{1-q}\,.}$

Démonstration

La série diverge évidemment pour $q = 1$, puisque alors $S_n = n+1 \underset{n \to +\infty}{\longrightarrow} +\infty$.

Sinon, la série converge si et seulement si la suite $\left(q^n\right)$ converge.

Exemples de séries classiques

Séries géométriques

Il s'agit de séries dont le terme général est celui d'une suite géométrique. Si $u_n = q^n$ ($q \in \mathbb{C}$), on a :

$$S_n = \sum_{k=0}^{n} q^k = \begin{cases} n+1 & \text{si } q = 1 \\ \dfrac{1-q^{n+1}}{1-q} & \text{sinon}. \end{cases}$$

Donc : $\boxed{\text{la série géométrique } \sum_{n\in\mathbb{N}} q^n \text{ converge ssi } |q| < 1 \text{ et dans ce cas : } \sum_{n=0}^{+\infty} q^n = \dfrac{1}{1-q}\,.}$

Démonstration

La série diverge évidemment pour $q = 1$, puisque alors $S_n = n+1 \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} +\infty$.

Sinon, la série converge si et seulement si la suite (q^n) converge.

- Si $|q| > 1$ alors $\lim\limits_{n\to+\infty} |q^n| = +\infty$: la suite (q^n), non bornée, diverge.

Exemples de séries classiques

Séries géométriques

Il s'agit de séries dont le terme général est celui d'une suite géométrique. Si $u_n = q^n$ ($q \in \mathbb{C}$), on a :

$$S_n = \sum_{k=0}^{n} q^k = \begin{cases} n+1 & \text{si } q = 1 \\ \dfrac{1-q^{n+1}}{1-q} & \text{sinon}. \end{cases}$$

Donc : $\boxed{\text{la série géométrique } \sum_{n\in\mathbb{N}} q^n \text{ converge ssi } |q| < 1 \text{ et dans ce cas : } \sum_{n=0}^{+\infty} q^n = \dfrac{1}{1-q}\,.}$

Démonstration

La série diverge évidemment pour $q = 1$, puisque alors $S_n = n+1 \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} +\infty$.

Sinon, la série converge si et seulement si la suite (q^n) converge.

- Si $|q| > 1$ alors $\lim\limits_{n\to+\infty} |q^n| = +\infty$: la suite (q^n), non bornée, diverge.
- Si $|q| < 1$ alors $\lim\limits_{n\to+\infty} |q^n| = 0$ d'où $\lim\limits_{n\to+\infty} q^n = 0$.

Exemples de séries classiques

Séries géométriques

Il s'agit de séries dont le terme général est celui d'une suite géométrique. Si $u_n = q^n$ ($q \in \mathbb{C}$), on a :

$$S_n = \sum_{k=0}^{n} q^k = \begin{cases} n+1 & \text{si } q = 1 \\ \dfrac{1-q^{n+1}}{1-q} & \text{sinon}. \end{cases}$$

Donc : $\boxed{\text{la série géométrique } \sum\limits_{n\in\mathbb{N}} q^n \text{ converge ssi } |q| < 1 \text{ et dans ce cas : } \sum\limits_{n=0}^{+\infty} q^n = \dfrac{1}{1-q}.}$

Démonstration

La série diverge évidemment pour $q = 1$, puisque alors $S_n = n+1 \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} +\infty$.

Sinon, la série converge si et seulement si la suite (q^n) converge.

- Si $|q| > 1$ alors $\lim\limits_{n\to+\infty} |q^n| = +\infty$: la suite (q^n), non bornée, diverge.
- Si $|q| < 1$ alors $\lim\limits_{n\to+\infty} |q^n| = 0$ d'où $\lim\limits_{n\to+\infty} q^n = 0$.
- Si $|q| = 1$ et $q \neq 1$, posons $q = e^{i\theta}$, $\theta \in]0\,;2\pi[$.

Exemples de séries classiques

Séries géométriques

Il s'agit de séries dont le terme général est celui d'une suite géométrique. Si $u_n = q^n$ ($q \in \mathbb{C}$), on a :

$$S_n = \sum_{k=0}^{n} q^k = \begin{cases} n+1 & \text{si } q = 1 \\ \dfrac{1-q^{n+1}}{1-q} & \text{sinon}. \end{cases}$$

Donc : $\boxed{\text{la série géométrique } \sum_{n\in\mathbb{N}} q^n \text{ converge ssi } |q| < 1 \text{ et dans ce cas : } \sum_{n=0}^{+\infty} q^n = \dfrac{1}{1-q}\,.}$

Démonstration

La série diverge évidemment pour $q = 1$, puisque alors $S_n = n+1 \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} +\infty$.

Sinon, la série converge si et seulement si la suite (q^n) converge.

- Si $|q| > 1$ alors $\lim\limits_{n\to+\infty} |q^n| = +\infty$: la suite (q^n), non bornée, diverge.
- Si $|q| < 1$ alors $\lim\limits_{n\to+\infty} |q^n| = 0$ d'où $\lim\limits_{n\to+\infty} q^n = 0$.
- Si $|q| = 1$ et $q \neq 1$, posons $q = \mathrm{e}^{\mathrm{i}\theta}$, $\theta \in \,]0\,;2\pi[$.
  Si la suite $(\mathrm{e}^{\mathrm{i}n\theta})_{n\in\mathbb{N}}$ était convergente vers $\ell \in \mathbb{C}$, puisque $\mathrm{e}^{\mathrm{i}(n+1)\theta} = \mathrm{e}^{\mathrm{i}\theta}\mathrm{e}^{\mathrm{i}n\theta}$, on aurait $\ell = \mathrm{e}^{\mathrm{i}\theta}\ell$ d'où $\ell = 0$ puisque $\mathrm{e}^{\mathrm{i}\theta} \neq 1$.

Exemples de séries classiques

Séries géométriques

Il s'agit de séries dont le terme général est celui d'une suite géométrique. Si $u_n = q^n$ ($q \in \mathbb{C}$), on a :

$$S_n = \sum_{k=0}^{n} q^k = \begin{cases} n+1 & \text{si } q = 1 \\ \dfrac{1-q^{n+1}}{1-q} & \text{sinon}. \end{cases}$$

Donc : $\boxed{\text{la série géométrique } \sum_{n\in\mathbb{N}} q^n \text{ converge ssi } |q|<1 \text{ et dans ce cas : } \sum_{n=0}^{+\infty} q^n = \dfrac{1}{1-q}\,.}$

Démonstration

La série diverge évidemment pour $q = 1$, puisque alors $S_n = n+1 \xrightarrow[n\to+\infty]{} +\infty$.

Sinon, la série converge si et seulement si la suite (q^n) converge.

- Si $|q| > 1$ alors $\lim\limits_{n\to+\infty} |q^n| = +\infty$: la suite (q^n), non bornée, diverge.
- Si $|q| < 1$ alors $\lim\limits_{n\to+\infty} |q^n| = 0$ d'où $\lim\limits_{n\to+\infty} q^n = 0$.
- Si $|q| = 1$ et $q \neq 1$, posons $q = \mathrm{e}^{\mathrm{i}\theta}$, $\theta \in]0\,;2\pi[$.
  Si la suite $(\mathrm{e}^{\mathrm{i}n\theta})_{n\in\mathbb{N}}$ était convergente vers $\ell \in \mathbb{C}$, puisque $\mathrm{e}^{\mathrm{i}(n+1)\theta} = \mathrm{e}^{\mathrm{i}\theta}\mathrm{e}^{\mathrm{i}n\theta}$, on aurait $\ell = \mathrm{e}^{\mathrm{i}\theta}\ell$ d'où $\ell = 0$ puisque $\mathrm{e}^{\mathrm{i}\theta} \neq 1$. Mais cela n'est pas possible car $|\mathrm{e}^{\mathrm{i}n\theta}| = 1 \Longrightarrow |\ell| = 1$!

Exemples de séries classiques

Séries géométriques

Il s'agit de séries dont le terme général est celui d'une suite géométrique. Si $u_n = q^n$ ($q \in \mathbb{C}$), on a :

$$S_n = \sum_{k=0}^{n} q^k = \begin{cases} n+1 & \text{si } q = 1 \\ \dfrac{1-q^{n+1}}{1-q} & \text{sinon}. \end{cases}$$

Donc : $\boxed{\text{la série géométrique } \sum_{n\in\mathbb{N}} q^n \text{ converge ssi } |q| < 1 \text{ et dans ce cas : } \sum_{n=0}^{+\infty} q^n = \dfrac{1}{1-q}\cdot}$

Remarque :

Plus généralement, si (u_n) est le terme général d'une suite géométrique de raison q avec $|q| < 1$, et si $n_0 \in \mathbb{N}$, on a la formule :

$$\sum_{k=n_0}^{+\infty} u_k = \frac{u_{n_0}}{1-q} = \text{premier terme} \times \frac{1}{1-q}\cdot$$

Séries télescopiques

Il s'agit de séries de la forme $\sum_{n\in\mathbb{N}^*} v_n$, où $v_n = u_n - u_{n-1}$ $(n \geqslant 1)$.

On a alors : $S_n = \sum_{k=1}^{n} v_k = u_n - u_0$ donc :

Séries télescopiques

Il s'agit de séries de la forme $\sum\limits_{n\in\mathbb{N}^*} v_n$, où $v_n = u_n - u_{n-1}$ $(n \geqslant 1)$.

On a alors : $S_n = \sum\limits_{k=1}^{n} v_k = u_n - u_0$ donc :

la série télescopique $\sum\limits_{n\in\mathbb{N}^*} (u_n - u_{n-1})$ converge si et seulement si la **suite** (u_n) converge,

et, dans ce cas : $\displaystyle\sum_{k=1}^{+\infty} (u_k - u_{k-1}) = \lim_{n\to+\infty} u_n - u_0$

Séries télescopiques

Il s'agit de séries de la forme $\sum_{n\in\mathbb{N}^*} v_n$, où $v_n = u_n - u_{n-1}$ $(n \geqslant 1)$.

On a alors : $S_n = \sum_{k=1}^{n} v_k = u_n - u_0$ donc :

> la série télescopique $\sum_{n\in\mathbb{N}^*} (u_n - u_{n-1})$ converge si et seulement si la **suite** (u_n) converge,
>
> et, dans ce cas : $\sum_{k=1}^{+\infty} (u_k - u_{k-1}) = \lim_{n\to+\infty} u_n - u_0$

Exemple 1 : $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n(n+1)} = 1.$

Séries télescopiques

Il s'agit de séries de la forme $\sum\limits_{n\in\mathbb{N}^*} v_n$, où $v_n = u_n - u_{n-1}$ $(n \geqslant 1)$.

On a alors : $S_n = \sum\limits_{k=1}^{n} v_k = u_n - u_0$ donc :

$$\boxed{\begin{array}{c}\text{la série télescopique } \sum\limits_{n\in\mathbb{N}^*} (u_n - u_{n-1}) \text{ converge si et seulement si la } \textbf{suite } (u_n) \text{ converge,} \\ \text{et, dans ce cas : } \sum\limits_{k=1}^{+\infty} (u_k - u_{k-1}) = \lim\limits_{n\to+\infty} u_n - u_0\end{array}}$$

Exemple 1 : $\sum\limits_{n=1}^{+\infty} \dfrac{1}{n(n+1)} = 1.$

Démonstration

On calcule les sommes partielles : $S_n = \sum\limits_{k=1}^{n} \dfrac{1}{k(k+1)} = \sum\limits_{k=1}^{n} \left(\dfrac{1}{k} - \dfrac{1}{k+1}\right) = 1 - \dfrac{1}{n+1} \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} 1\,.$

Séries télescopiques

Il s'agit de séries de la forme $\sum\limits_{n\in\mathbb{N}^*} v_n$, où $v_n = u_n - u_{n-1}$ $(n \geqslant 1)$.

On a alors : $S_n = \sum\limits_{k=1}^{n} v_k = u_n - u_0$ donc :

> la série télescopique $\sum\limits_{n\in\mathbb{N}^*} (u_n - u_{n-1})$ converge si et seulement si la **suite** (u_n) converge,
>
> et, dans ce cas : $\sum\limits_{k=1}^{+\infty} (u_k - u_{k-1}) = \lim\limits_{n\to+\infty} u_n - u_0$

Exemple 1 : $\sum\limits_{n=1}^{+\infty} \dfrac{1}{n(n+1)} = 1.$

Démonstration

On calcule les sommes partielles : $S_n = \sum\limits_{k=1}^{n} \dfrac{1}{k(k+1)} = \sum\limits_{k=1}^{n} \left(\dfrac{1}{k} - \dfrac{1}{k+1}\right) = 1 - \dfrac{1}{n+1} \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} 1.$

L'écriture $\underbrace{\sum\limits_{n=1}^{+\infty} \dfrac{1}{n(n+1)}}_{\text{CV}} = \underbrace{\sum\limits_{n=1}^{+\infty} \dfrac{1}{n}}_{\text{DV}} - \underbrace{\sum\limits_{n=1}^{+\infty} \dfrac{1}{n+1}}_{\text{DV}}$ N'A AUCUN SENS !!! (cf. théorème 2)

Exemple 2 :

Étudier la suite de terme général $u_n = 1 + \dfrac{1}{\sqrt{2}} + \cdots + \dfrac{1}{\sqrt{n}} - 2\sqrt{n}$ $(n \geqslant 1)$.

Exemple 2 :

Étudier la suite de terme général $u_n = 1 + \dfrac{1}{\sqrt{2}} + \cdots + \dfrac{1}{\sqrt{n}} - 2\sqrt{n}$ $(n \geqslant 1)$.

Cet exemple est important, car il montre comment utiliser le lien suites-séries.

Exemple 2 :

Étudier la suite de terme général $u_n = 1 + \dfrac{1}{\sqrt{2}} + \cdots + \dfrac{1}{\sqrt{n}} - 2\sqrt{n}$ $(n \geqslant 1)$.

Cet exemple est important, car il montre comment utiliser le lien suites-séries.

Démonstration

Posons $v_n = u_{n+1} - u_n$. Alors, à l'aide d'un petit développement limité :

Exemple 2 :

Étudier la suite de terme général $u_n = 1 + \dfrac{1}{\sqrt{2}} + \cdots + \dfrac{1}{\sqrt{n}} - 2\sqrt{n}$ $(n \geqslant 1)$.

Cet exemple est important, car il montre comment utiliser le lien suites-séries.

Démonstration

Posons $v_n = u_{n+1} - u_n$. Alors, à l'aide d'un petit développement limité :

$$\begin{aligned} v_n &= \frac{1}{\sqrt{n+1}} - 2\left(\sqrt{n+1} - \sqrt{n}\right) \\ &= \frac{1}{\sqrt{n}}\left(1 + \frac{1}{n}\right)^{-1/2} - 2\sqrt{n}\left(\left(1 + \frac{1}{n}\right)^{1/2} - 1\right) \\ &= \frac{1}{\sqrt{n}}\left(1 + O\left(\frac{1}{n}\right)\right) - 2\sqrt{n}\left(\frac{1}{2n} + O\left(\frac{1}{n^2}\right)\right) = O\left(\frac{1}{n^{3/2}}\right), \end{aligned}$$

Exemple 2 :

Étudier la suite de terme général $u_n = 1 + \frac{1}{\sqrt{2}} + \cdots + \frac{1}{\sqrt{n}} - 2\sqrt{n}$ ($n \geqslant 1$).

Cet exemple est important, car il montre comment utiliser le lien suites-séries.

Démonstration

Posons $v_n = u_{n+1} - u_n$. Alors, à l'aide d'un petit développement limité :

$$\begin{aligned} v_n &= \frac{1}{\sqrt{n+1}} - 2\left(\sqrt{n+1} - \sqrt{n}\right) \\ &= \frac{1}{\sqrt{n}}\left(1 + \frac{1}{n}\right)^{-1/2} - 2\sqrt{n}\left(\left(1 + \frac{1}{n}\right)^{1/2} - 1\right) \\ &= \frac{1}{\sqrt{n}}\left(1 + O\left(\frac{1}{n}\right)\right) - 2\sqrt{n}\left(\frac{1}{2n} + O\left(\frac{1}{n^2}\right)\right) = O\left(\frac{1}{n^{3/2}}\right), \end{aligned}$$

ce qui montre, par comparaison à la série de terme général positif $\frac{1}{n^{3/2}}$ qui est convergente (série de Riemann, voir plus loin), que la série de terme général v_n est absolument convergente donc convergente (voir les règles de comparaison plus loin).

Exemple 2 :

Étudier la suite de terme général $u_n = 1 + \dfrac{1}{\sqrt{2}} + \cdots + \dfrac{1}{\sqrt{n}} - 2\sqrt{n}$ $(n \geqslant 1)$.

Cet exemple est important, car il montre comment utiliser le lien suites-séries.

Démonstration

Posons $v_n = u_{n+1} - u_n$. Alors, à l'aide d'un petit développement limité :

$$\begin{aligned}
v_n &= \frac{1}{\sqrt{n+1}} - 2\left(\sqrt{n+1} - \sqrt{n}\right) \\
&= \frac{1}{\sqrt{n}}\left(1 + \frac{1}{n}\right)^{-1/2} - 2\sqrt{n}\left(\left(1 + \frac{1}{n}\right)^{1/2} - 1\right) \\
&= \frac{1}{\sqrt{n}}\left(1 + O\left(\frac{1}{n}\right)\right) - 2\sqrt{n}\left(\frac{1}{2n} + O\left(\frac{1}{n^2}\right)\right) = O\left(\frac{1}{n^{3/2}}\right),
\end{aligned}$$

ce qui montre, par comparaison à la série de terme général positif $\dfrac{1}{n^{3/2}}$ qui est convergente (série de Riemann, voir plus loin), que la série de terme général v_n est absolument convergente donc convergente (voir les règles de comparaison plus loin).

Ainsi la série de terme général $u_{n+1} - u_n$ converge, donc la suite (u_n) converge.

La série harmonique alternée

Il s'agit de la série $\displaystyle\sum_{n\in\mathbb{N}^*} \frac{(-1)^{n-1}}{n}$.

La série harmonique alternée

Il s'agit de la série $\displaystyle\sum_{n\in\mathbb{N}^*} \frac{(-1)^{n-1}}{n}$.

Notons $S_n = \displaystyle\sum_{k=1}^{n} \frac{(-1)^{k-1}}{k}$ la n-ième somme partielle $(n \geqslant 1)$. On écrit : $\displaystyle\frac{1}{k} = \int_0^1 t^{k-1}\,\mathrm{d}t$.

La série harmonique alternée

Il s'agit de la série $\displaystyle\sum_{n\in\mathbb{N}^*} \frac{(-1)^{n-1}}{n}$.

Notons $S_n = \displaystyle\sum_{k=1}^{n} \frac{(-1)^{k-1}}{k}$ la n-ième somme partielle ($n \geqslant 1$). On écrit : $\displaystyle\frac{1}{k} = \int_0^1 t^{k-1}\,\mathrm{d}t$.

Alors :

$$S_n = \sum_{k=1}^{n} \int_0^1 (-t)^{k-1}\,\mathrm{d}t = \int_0^1 \left(\sum_{k=1}^{n}(-t)^{k-1}\right)\,\mathrm{d}t$$

$$= \int_0^1 \frac{1-(-t)^n}{1+t}\,\mathrm{d}t = \underbrace{\int_0^1 \frac{\mathrm{d}t}{1+t}}_{=\ln 2} - \underbrace{\int_0^1 \frac{(-t)^n}{1+t}\,\mathrm{d}t}_{=R_n}$$

La série harmonique alternée

Il s'agit de la série $\displaystyle\sum_{n\in\mathbb{N}^*} \frac{(-1)^{n-1}}{n}$.

Notons $S_n = \displaystyle\sum_{k=1}^{n} \frac{(-1)^{k-1}}{k}$ la n-ième somme partielle ($n \geqslant 1$). On écrit : $\displaystyle\frac{1}{k} = \int_0^1 t^{k-1}\,\mathrm{d}t$.

Alors :

$$S_n = \sum_{k=1}^{n} \int_0^1 (-t)^{k-1}\,\mathrm{d}t = \int_0^1 \left(\sum_{k=1}^{n} (-t)^{k-1}\right)\,\mathrm{d}t$$
$$= \int_0^1 \frac{1-(-t)^n}{1+t}\,\mathrm{d}t = \underbrace{\int_0^1 \frac{\mathrm{d}t}{1+t}}_{=\ln 2} - \underbrace{\int_0^1 \frac{(-t)^n}{1+t}\,\mathrm{d}t}_{=R_n}$$

avec $|R_n| \leqslant \displaystyle\int_0^1 \frac{t^n}{1+t}\,\mathrm{d}t \leqslant \int_0^1 t^n\,\mathrm{d}t = \frac{1}{n+1}\cdot$

La série harmonique alternée

Il s'agit de la série $\displaystyle\sum_{n\in\mathbb{N}^*} \frac{(-1)^{n-1}}{n}$.

Notons $S_n = \displaystyle\sum_{k=1}^{n} \frac{(-1)^{k-1}}{k}$ la n-ième somme partielle ($n \geqslant 1$). On écrit : $\dfrac{1}{k} = \displaystyle\int_0^1 t^{k-1}\,\mathrm{d}t$.

Alors :

$$\begin{aligned} S_n &= \sum_{k=1}^{n} \int_0^1 (-t)^{k-1}\,\mathrm{d}t = \int_0^1 \left(\sum_{k=1}^{n} (-t)^{k-1} \right) \mathrm{d}t \\ &= \int_0^1 \frac{1-(-t)^n}{1+t}\,\mathrm{d}t = \underbrace{\int_0^1 \frac{\mathrm{d}t}{1+t}}_{=\ln 2} - \underbrace{\int_0^1 \frac{(-t)^n}{1+t}\,\mathrm{d}t}_{=R_n} \end{aligned}$$

avec $|R_n| \leqslant \displaystyle\int_0^1 \frac{t^n}{1+t}\,\mathrm{d}t \leqslant \int_0^1 t^n\,\mathrm{d}t = \frac{1}{n+1}\cdot$ Donc $\displaystyle\lim_{n\to\infty} R_n = 0$ puis $\displaystyle\lim_{n\to\infty} S_n = \ln 2$. Ainsi :

La série harmonique alternée

Il s'agit de la série $\displaystyle\sum_{n\in\mathbb{N}^*} \frac{(-1)^{n-1}}{n}$.

Notons $S_n = \displaystyle\sum_{k=1}^{n} \frac{(-1)^{k-1}}{k}$ la n-ième somme partielle ($n \geqslant 1$). On écrit : $\dfrac{1}{k} = \displaystyle\int_0^1 t^{k-1}\,\mathrm{d}t$.

Alors :

$$S_n = \sum_{k=1}^{n} \int_0^1 (-t)^{k-1}\,\mathrm{d}t = \int_0^1 \left(\sum_{k=1}^{n} (-t)^{k-1}\right)\mathrm{d}t$$

$$= \int_0^1 \frac{1-(-t)^n}{1+t}\,\mathrm{d}t = \underbrace{\int_0^1 \frac{\mathrm{d}t}{1+t}}_{=\ln 2} - \underbrace{\int_0^1 \frac{(-t)^n}{1+t}\,\mathrm{d}t}_{=R_n}$$

avec $|R_n| \leqslant \displaystyle\int_0^1 \frac{t^n}{1+t}\,\mathrm{d}t \leqslant \int_0^1 t^n\,\mathrm{d}t = \frac{1}{n+1}\cdot$ Donc $\displaystyle\lim_{n\to\infty} R_n = 0$ puis $\displaystyle\lim_{n\to\infty} S_n = \ln 2$. Ainsi :

$$\boxed{\text{la série harmonique alternée converge et } \sum_{k=1}^{+\infty} \frac{(-1)^{k-1}}{k} = \ln 2\,.}$$

Opérations sur les séries convergentes

Théorème 2

Soient $\sum_{n\in\mathbb{N}} u_n$ et $\sum_{n\in\mathbb{N}} v_n$ deux séries convergentes, de sommes respectives U et V, et soit $\lambda \in \mathbb{K}$.

Alors la série $\sum_{n\in\mathbb{N}} (\lambda u_n + v_n)$ est convergente, de somme $\lambda U + V$.

Opérations sur les séries convergentes

Théorème 2

Soient $\sum_{n\in\mathbb{N}} u_n$ et $\sum_{n\in\mathbb{N}} v_n$ deux séries convergentes, de sommes respectives U et V, et soit $\lambda \in \mathbb{K}$.

Alors la série $\sum_{n\in\mathbb{N}} (\lambda u_n + v_n)$ est convergente, de somme $\lambda U + V$.

Démonstration

Posons $U_n = \sum_{k=0}^{n} u_k$, $V_n = \sum_{k=0}^{n} v_k$, $w_n = \lambda u_n + v_n$ et $W_n = \sum_{k=0}^{n} w_k$.

Opérations sur les séries convergentes

Théorème 2

Soient $\sum\limits_{n\in\mathbb{N}} u_n$ et $\sum\limits_{n\in\mathbb{N}} v_n$ deux séries convergentes, de sommes respectives U et V, et soit $\lambda \in \mathbb{K}$.

Alors la série $\sum\limits_{n\in\mathbb{N}} (\lambda u_n + v_n)$ est convergente, de somme $\lambda U + V$.

Démonstration

Posons $U_n = \sum\limits_{k=0}^{n} u_k$, $V_n = \sum\limits_{k=0}^{n} v_k$, $w_n = \lambda u_n + v_n$ et $W_n = \sum\limits_{k=0}^{n} w_k$.

Puisqu'il s'agit de sommes finies, on a $W_n = \lambda U_n + V_n$ et le théorème résulte alors des théorèmes sur les limites.

Opérations sur les séries convergentes

Théorème 2

Soient $\sum_{n\in\mathbb{N}} u_n$ et $\sum_{n\in\mathbb{N}} v_n$ deux séries convergentes, de sommes respectives U et V, et soit $\lambda \in \mathbb{K}$.

Alors la série $\sum_{n\in\mathbb{N}} (\lambda u_n + v_n)$ est convergente, de somme $\lambda U + V$.

Remarques

1. Si $\sum_{n\in\mathbb{N}} u_n$ est convergente et $\sum_{n\in\mathbb{N}} v_n$ divergente, alors $\sum_{n\in\mathbb{N}} (u_n + v_n)$ est divergente.

Opérations sur les séries convergentes

Théorème 2

Soient $\sum_{n\in\mathbb{N}} u_n$ et $\sum_{n\in\mathbb{N}} v_n$ deux séries convergentes, de sommes respectives U et V, et soit $\lambda \in \mathbb{K}$.

Alors la série $\sum_{n\in\mathbb{N}} (\lambda u_n + v_n)$ est convergente, de somme $\lambda U + V$.

Remarques

1. Si $\sum_{n\in\mathbb{N}} u_n$ est convergente et $\sum_{n\in\mathbb{N}} v_n$ divergente, alors $\sum_{n\in\mathbb{N}} (u_n + v_n)$ est divergente.

Démonstration

En effet, si par l'absurde la série $\sum_{n\in\mathbb{N}} (u_n + v_n)$ était convergente, d'après le théorème précédent, il en serait de même de la série de terme général $(u_n + v_n) - u_n$, ce qui n'est pas.

Opérations sur les séries convergentes

Théorème 2

Soient $\sum_{n\in\mathbb{N}} u_n$ et $\sum_{n\in\mathbb{N}} v_n$ deux séries convergentes, de sommes respectives U et V, et soit $\lambda \in \mathbb{K}$.

Alors la série $\sum_{n\in\mathbb{N}} (\lambda u_n + v_n)$ est convergente, de somme $\lambda U + V$.

Remarques

1. Si $\sum_{n\in\mathbb{N}} u_n$ est convergente et $\sum_{n\in\mathbb{N}} v_n$ divergente, alors $\sum_{n\in\mathbb{N}} (u_n + v_n)$ est divergente.
2. Si $\sum_{n\in\mathbb{N}} u_n$ et $\sum_{n\in\mathbb{N}} v_n$ sont divergentes, on ne peut rien dire a priori de $\sum_{n\in\mathbb{N}} (u_n + v_n)$.

Opérations sur les séries convergentes

Théorème 2

Soient $\sum_{n\in\mathbb{N}} u_n$ et $\sum_{n\in\mathbb{N}} v_n$ deux séries convergentes, de sommes respectives U et V, et soit $\lambda \in \mathbb{K}$.

Alors la série $\sum_{n\in\mathbb{N}} (\lambda u_n + v_n)$ est convergente, de somme $\lambda U + V$.

Remarques

1. Si $\sum_{n\in\mathbb{N}} u_n$ est convergente et $\sum_{n\in\mathbb{N}} v_n$ divergente, alors $\sum_{n\in\mathbb{N}} (u_n + v_n)$ est divergente.
2. Si $\sum_{n\in\mathbb{N}} u_n$ et $\sum_{n\in\mathbb{N}} v_n$ sont divergentes, on ne peut rien dire a priori de $\sum_{n\in\mathbb{N}} (u_n + v_n)$.

   Par exemple, si $u_n = \dfrac{1}{n}$ pour $n \geqslant 1$ et $v_n = \dfrac{1}{n+1}$, la série de terme général $u_n - v_n$ converge mais celle de terme général $u_n + v_n$ diverge.

Proposition 1

Soit $\sum_{n\in\mathbb{N}} u_n$ une série de nombres complexes. La série $\sum_{n\in\mathbb{N}} u_n$ converge si et seulement si les deux séries $\sum_{n\in\mathbb{N}} \mathcal{R}e\,(u_n)$ et $\sum_{n\in\mathbb{N}} \mathcal{I}m\,(u_n)$ convergent et, dans ce cas :

$$\sum_{n=0}^{+\infty} u_n = \sum_{n=0}^{+\infty} \mathcal{R}e\,(u_n) + \mathrm{i} \sum_{n=0}^{+\infty} \mathcal{I}m\,(u_n)\,.$$

Proposition 1

Soit $\sum_{n\in\mathbb{N}} u_n$ une série de nombres complexes. La série $\sum_{n\in\mathbb{N}} u_n$ converge si et seulement si les deux séries $\sum_{n\in\mathbb{N}} \mathcal{Re}\,(u_n)$ et $\sum_{n\in\mathbb{N}} \mathcal{Im}\,(u_n)$ convergent et, dans ce cas :

$$\sum_{n=0}^{+\infty} u_n = \sum_{n=0}^{+\infty} \mathcal{Re}\,(u_n) + \mathrm{i} \sum_{n=0}^{+\infty} \mathcal{Im}\,(u_n)\,.$$

Démonstration

Résulte directement du théorème similaire sur la limite d'une suite à valeurs dans $\mathbb{C}$, en considérant les sommes partielles.

Proposition 1

Soit $\sum\limits_{n\in\mathbb{N}} u_n$ une série de nombres complexes. La série $\sum\limits_{n\in\mathbb{N}} u_n$ converge si et seulement si les deux séries $\sum\limits_{n\in\mathbb{N}} \mathcal{R}e\,(u_n)$ et $\sum\limits_{n\in\mathbb{N}} \mathcal{I}m\,(u_n)$ convergent et, dans ce cas :

$$\sum_{n=0}^{+\infty} u_n = \sum_{n=0}^{+\infty} \mathcal{R}e\,(u_n) + \mathrm{i} \sum_{n=0}^{+\infty} \mathcal{I}m\,(u_n)\,.$$

Exemple : Justifier l'existence et calculer : $\displaystyle\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{\sin nx}{2^n}$.

Proposition 1

Soit $\sum_{n\in\mathbb{N}} u_n$ une série de nombres complexes. La série $\sum_{n\in\mathbb{N}} u_n$ converge si et seulement si les deux séries $\sum_{n\in\mathbb{N}} \mathcal{Re}(u_n)$ et $\sum_{n\in\mathbb{N}} \mathcal{Im}(u_n)$ convergent et, dans ce cas :

$$\sum_{n=0}^{+\infty} u_n = \sum_{n=0}^{+\infty} \mathcal{Re}(u_n) + \mathrm{i} \sum_{n=0}^{+\infty} \mathcal{Im}(u_n).$$

Exemple : Justifier l'existence et calculer : $\displaystyle\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{\sin nx}{2^n}$.

Démonstration

Soit $N \in \mathbb{N}$. Notons $S_N = \sum_{n=0}^{N} \frac{\sin nx}{2^n}$ la somme partielle d'indice N. Alors :

Proposition 1

Soit $\sum_{n\in\mathbb{N}} u_n$ une série de nombres complexes. La série $\sum_{n\in\mathbb{N}} u_n$ converge si et seulement si les deux séries $\sum_{n\in\mathbb{N}} \mathcal{Re}(u_n)$ et $\sum_{n\in\mathbb{N}} \mathcal{Im}(u_n)$ convergent et, dans ce cas :

$$\sum_{n=0}^{+\infty} u_n = \sum_{n=0}^{+\infty} \mathcal{Re}(u_n) + \mathrm{i} \sum_{n=0}^{+\infty} \mathcal{Im}(u_n).$$

Exemple : Justifier l'existence et calculer : $\displaystyle\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{\sin nx}{2^n}$.

Démonstration

Soit $N \in \mathbb{N}$. Notons $S_N = \sum_{n=0}^{N} \frac{\sin nx}{2^n}$ la somme partielle d'indice N. Alors :

$$S_N = \mathcal{Im}\left(\sum_{n=0}^{N} \frac{e^{inx}}{2^n}\right) = \mathcal{Im}\left(\sum_{n=0}^{N} \left(\frac{e^{ix}}{2}\right)^n\right) = \mathcal{Im}\left(\frac{1-\left(\frac{e^{ix}}{2}\right)^{N+1}}{1-\frac{e^{ix}}{2}}\right).$$

Proposition 1

Soit $\sum\limits_{n\in\mathbb{N}} u_n$ une série de nombres complexes. La série $\sum\limits_{n\in\mathbb{N}} u_n$ converge si et seulement si les deux séries $\sum\limits_{n\in\mathbb{N}} \mathcal{Re}(u_n)$ et $\sum\limits_{n\in\mathbb{N}} \mathcal{Im}(u_n)$ convergent et, dans ce cas :

$$\sum_{n=0}^{+\infty} u_n = \sum_{n=0}^{+\infty} \mathcal{Re}(u_n) + \mathrm{i} \sum_{n=0}^{+\infty} \mathcal{Im}(u_n).$$

Exemple : Justifier l'existence et calculer : $\displaystyle\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{\sin nx}{2^n}$.

Démonstration

Soit $N \in \mathbb{N}$. Notons $S_N = \sum\limits_{n=0}^{N} \frac{\sin nx}{2^n}$ la somme partielle d'indice N. Alors :

$$S_N = \mathcal{Im}\left(\sum_{n=0}^{N} \frac{\mathrm{e}^{\mathrm{i}nx}}{2^n}\right) = \mathcal{Im}\left(\sum_{n=0}^{N} \left(\frac{\mathrm{e}^{\mathrm{i}x}}{2}\right)^n\right) = \mathcal{Im}\left(\frac{1-\left(\frac{\mathrm{e}^{\mathrm{i}x}}{2}\right)^{N+1}}{1-\frac{\mathrm{e}^{\mathrm{i}x}}{2}}\right).$$

Or $\left|\frac{\mathrm{e}^{\mathrm{i}x}}{2}\right| < 1$ donc $\lim\limits_{N\to+\infty} \left(\frac{\mathrm{e}^{\mathrm{i}x}}{2}\right)^{N+1} = 0$ donc $\lim\limits_{N\to+\infty} S_N$ existe : la série converge, et on a :

Proposition 1

Soit $\sum_{n\in\mathbb{N}} u_n$ une série de nombres complexes. La série $\sum_{n\in\mathbb{N}} u_n$ converge si et seulement si les deux séries $\sum_{n\in\mathbb{N}} \mathcal{Re}(u_n)$ et $\sum_{n\in\mathbb{N}} \mathcal{Im}(u_n)$ convergent et, dans ce cas :

$$\sum_{n=0}^{+\infty} u_n = \sum_{n=0}^{+\infty} \mathcal{Re}(u_n) + \mathrm{i} \sum_{n=0}^{+\infty} \mathcal{Im}(u_n).$$

Exemple : Justifier l'existence et calculer : $\displaystyle\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{\sin nx}{2^n}$.

Démonstration

Soit $N \in \mathbb{N}$. Notons $S_N = \sum_{n=0}^{N} \frac{\sin nx}{2^n}$ la somme partielle d'indice N. Alors :

$$S_N = \mathcal{Im}\left(\sum_{n=0}^{N} \frac{\mathrm{e}^{\mathrm{i}nx}}{2^n}\right) = \mathcal{Im}\left(\sum_{n=0}^{N} \left(\frac{\mathrm{e}^{\mathrm{i}x}}{2}\right)^n\right) = \mathcal{Im}\left(\frac{1-\left(\frac{\mathrm{e}^{\mathrm{i}x}}{2}\right)^{N+1}}{1-\frac{\mathrm{e}^{\mathrm{i}x}}{2}}\right).$$

Or $\left|\frac{\mathrm{e}^{\mathrm{i}x}}{2}\right| < 1$ donc $\lim_{N\to+\infty} \left(\frac{\mathrm{e}^{\mathrm{i}x}}{2}\right)^{N+1} = 0$ donc $\lim_{N\to+\infty} S_N$ existe : la série converge, et on a :

$$\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{\sin nx}{2^n} = \lim_{N\to+\infty} S_N = \mathcal{Im}\left(\frac{1}{1-\frac{\mathrm{e}^{\mathrm{i}x}}{2}}\right) = \mathcal{Im}\left(\frac{2(2-\mathrm{e}^{-\mathrm{i}x})}{|2-\mathrm{e}^{\mathrm{i}x}|^2}\right) = \frac{2\sin x}{5-4\cos x}.$$

SÉRIES À TERMES RÉELS POSITIFS

On étudie dans ce paragraphe les séries à termes réels positifs ; puisqu'on ne change pas la nature d'une série si on change un nombre fini de ses termes, les résultats s'appliqueront aussi aux séries à termes réels positifs au moins à partir d'un certain rang.

On étudie dans ce paragraphe les séries à termes réels positifs ; puisqu'on ne change pas la nature d'une série si on change un nombre fini de ses termes, les résultats s'appliqueront aussi aux séries à termes réels positifs au moins à partir d'un certain rang.

Si la série $\sum_{n\in\mathbb{N}} u_n$ est à termes réels négatifs, on pourra appliquer les résultats obtenus à la série $\sum_{n\in\mathbb{N}} (-u_n)$, qui est de même nature.

Règles de comparaison

Soit $\sum\limits_{n\in\mathbb{N}} u_n$ une série à termes réels positifs, et soit $S_n = \sum\limits_{k=0}^{n} u_k$ ses sommes partielles.

On a alors, pour $n \in \mathbb{N}^*$: $S_n - S_{n-1} = u_n \geqslant 0$, donc la suite (S_n) est croissante.

Règles de comparaison

Soit $\sum\limits_{n\in\mathbb{N}} u_n$ une série à termes réels positifs, et soit $S_n = \sum\limits_{k=0}^{n} u_k$ ses sommes partielles.

On a alors, pour $n \in \mathbb{N}^*$: $S_n - S_{n-1} = u_n \geqslant 0$, donc la suite (S_n) est croissante.

D'après le théorème de la limite monotone :

- si (S_n) est majorée, la suite (S_n) converge, c'est-à-dire que la série $\sum\limits_{n\in\mathbb{N}} u_n$ converge.
- si (S_n) n'est pas majorée, $\lim\limits_{n\to+\infty} S_n = +\infty$; la suite (S_n) diverge, c'est-à-dire que la série $\sum\limits_{n\in\mathbb{N}} u_n$ diverge.

Règles de comparaison

Soit $\sum_{n\in\mathbb{N}} u_n$ une série à termes réels positifs, et soit $S_n = \sum_{k=0}^{n} u_k$ ses sommes partielles.

On a alors, pour $n \in \mathbb{N}^*$: $S_n - S_{n-1} = u_n \geqslant 0$, donc la suite (S_n) est croissante.

D'après le théorème de la limite monotone :

- si (S_n) est majorée, la suite (S_n) converge, c'est-à-dire que la série $\sum_{n\in\mathbb{N}} u_n$ converge.
- si (S_n) n'est pas majorée, $\lim_{n\to+\infty} S_n = +\infty$; la suite (S_n) diverge, c'est-à-dire que la série $\sum_{n\in\mathbb{N}} u_n$ diverge.

On a donc :

Théorème 3

Une série **à termes réels positifs** est convergente si et seulement si la suite de ses sommes partielles est majorée.

Ce théorème, fondamental, est à la base de tous les résultats sur les séries à termes réels positifs.

Théorème 4: Règle de comparaison pour les séries à termes positifs

Soit $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ et $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ deux suites de nombres réels telles que

$$0 \leqslant u_n \leqslant v_n \quad \text{(au moins à partir d'un certain rang).}$$

Alors :

1. Si la série $\sum_{n\in\mathbb{N}} v_n$ converge, la série $\sum_{n\in\mathbb{N}} u_n$ converge.
2. Si la série $\sum_{n\in\mathbb{N}} u_n$ diverge, la série $\sum_{n\in\mathbb{N}} v_n$ diverge.

Théorème 4: Règle de comparaison pour les séries à termes positifs

Soit $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ et $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ deux suites de nombres réels telles que

$$0 \leqslant u_n \leqslant v_n \quad \text{(au moins à partir d'un certain rang).}$$

Alors :

1. Si la série $\sum_{n\in\mathbb{N}} v_n$ converge, la série $\sum_{n\in\mathbb{N}} u_n$ converge.
2. Si la série $\sum_{n\in\mathbb{N}} u_n$ diverge, la série $\sum_{n\in\mathbb{N}} v_n$ diverge.

Démonstration

Supposons $0 \leqslant u_n \leqslant v_n$ pour $n \geqslant n_0$. Alors, en notant $U_n = \sum_{k=n_0}^{n} u_k$ et $V_n = \sum_{k=n_0}^{n} v_k$, on aura $U_n \leqslant V_n$.

Ainsi, en utilisant le théorème 3 :

Théorème 4: Règle de comparaison pour les séries à termes positifs

Soit $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ et $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ deux suites de nombres réels telles que

$$0 \leqslant u_n \leqslant v_n \quad \text{(au moins à partir d'un certain rang).}$$

Alors :

1. Si la série $\sum\limits_{n\in\mathbb{N}} v_n$ converge, la série $\sum\limits_{n\in\mathbb{N}} u_n$ converge.
2. Si la série $\sum\limits_{n\in\mathbb{N}} u_n$ diverge, la série $\sum\limits_{n\in\mathbb{N}} v_n$ diverge.

Démonstration

Supposons $0 \leqslant u_n \leqslant v_n$ pour $n \geqslant n_0$. Alors, en notant $U_n = \sum\limits_{k=n_0}^{n} u_k$ et $V_n = \sum\limits_{k=n_0}^{n} v_k$, on aura $U_n \leqslant V_n$.

Ainsi, en utilisant le théorème 3 :

- si la série $\sum\limits_{n\in\mathbb{N}} v_n$ converge, ses sommes partielles V_n sont majorées, donc les sommes partielles U_n de la série $\sum u_n$ sont majorées et la série $\sum\limits_{n\in\mathbb{N}} u_n$ converge.

Théorème 4: Règle de comparaison pour les séries à termes positifs

Soit $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ et $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ deux suites de nombres réels telles que

$$0 \leqslant u_n \leqslant v_n \quad \text{(au moins à partir d'un certain rang).}$$

Alors :

1. Si la série $\sum\limits_{n\in\mathbb{N}} v_n$ converge, la série $\sum\limits_{n\in\mathbb{N}} u_n$ converge.
2. Si la série $\sum\limits_{n\in\mathbb{N}} u_n$ diverge, la série $\sum\limits_{n\in\mathbb{N}} v_n$ diverge.

Démonstration

Supposons $0 \leqslant u_n \leqslant v_n$ pour $n \geqslant n_0$. Alors, en notant $U_n = \sum\limits_{k=n_0}^{n} u_k$ et $V_n = \sum\limits_{k=n_0}^{n} v_k$, on aura $U_n \leqslant V_n$.

Ainsi, en utilisant le théorème 3 :

- si la série $\sum\limits_{n\in\mathbb{N}} v_n$ converge, ses sommes partielles V_n sont majorées, donc les sommes partielles U_n de la série $\sum u_n$ sont majorées et la série $\sum\limits_{n\in\mathbb{N}} u_n$ converge.
- si la série $\sum\limits_{n\in\mathbb{N}} u_n$ diverge, alors $\lim\limits_{n\to\infty} U_n = +\infty$ (il s'agit d'une série à termes positifs) donc $\lim\limits_{n\to\infty} V_n = +\infty$ et la série $\sum\limits_{n\in\mathbb{N}} v_n$ diverge.

Exemples

1. Étude de la série $\displaystyle\sum_{n\in\mathbb{N}^*} \frac{1}{n^2}$:

Exemples

1. Étude de la série $\displaystyle\sum_{n\in\mathbb{N}^*} \frac{1}{n^2}$:

   On remarque que, pour $n \geqslant 2$: $0 \leqslant \dfrac{1}{n^2} \leqslant \dfrac{1}{n(n-1)}$.

Exemples

1. Étude de la série $\displaystyle\sum_{n\in\mathbb{N}^*} \frac{1}{n^2}$:

   On remarque que, pour $n \geqslant 2$: $0 \leqslant \dfrac{1}{n^2} \leqslant \dfrac{1}{n(n-1)}$.

   Or $\dfrac{1}{n(n-1)} = \dfrac{1}{n-1} - \dfrac{1}{n}$, donc la série $\displaystyle\sum_{n\geqslant 2} \frac{1}{n(n-1)}$ converge (télescopage, série déjà étudiée).

   D'après le théorème précédent : $\boxed{\text{la série } \displaystyle\sum_{n\in\mathbb{N}^*} \frac{1}{n^2} \text{ converge.}}$

Exemples

1. Étude de la série $\sum_{n\in\mathbb{N}^*} \frac{1}{n^2}$:

   On remarque que, pour $n \geqslant 2$: $0 \leqslant \frac{1}{n^2} \leqslant \frac{1}{n(n-1)}$.

   Or $\frac{1}{n(n-1)} = \frac{1}{n-1} - \frac{1}{n}$, donc la série $\sum_{n\geqslant 2} \frac{1}{n(n-1)}$ converge (télescopage, série déjà étudiée).

   D'après le théorème précédent : $\boxed{\text{la série } \sum_{n\in\mathbb{N}^*} \frac{1}{n^2} \text{ converge.}}$

   Rem : On démontrera plus tard que : $\boxed{\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n^2} = \frac{\pi^2}{6}.}$

Exemples

1. Étude de la série $\displaystyle\sum_{n\in\mathbb{N}^*} \frac{1}{n^2}$:

   On remarque que, pour $n \geqslant 2$: $0 \leqslant \dfrac{1}{n^2} \leqslant \dfrac{1}{n(n-1)}$.

   Or $\dfrac{1}{n(n-1)} = \dfrac{1}{n-1} - \dfrac{1}{n}$, donc la série $\displaystyle\sum_{n\geqslant 2} \frac{1}{n(n-1)}$ converge (télescopage, série déjà étudiée).

   D'après le théorème précédent : $\boxed{\text{la série } \displaystyle\sum_{n\in\mathbb{N}^*} \frac{1}{n^2} \text{ converge.}}$

   Rem : On démontrera plus tard que : $\boxed{\displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n^2} = \frac{\pi^2}{6} .}$

2. Puisque la série harmonique $\displaystyle\sum_{n\in\mathbb{N}^*} \frac{1}{n}$ diverge, on obtient : $\alpha \leqslant 1 \Longrightarrow \displaystyle\sum_{n\in\mathbb{N}^*} \frac{1}{n^\alpha}$ diverge.

   En effet, $\dfrac{1}{n^\alpha} \geqslant \dfrac{1}{n}$, qui est le terme général d'une série à termes positifs divergente.

Exemples

1. Étude de la série $\displaystyle\sum_{n\in\mathbb{N}^*} \frac{1}{n^2}$:

   On remarque que, pour $n \geqslant 2$: $0 \leqslant \dfrac{1}{n^2} \leqslant \dfrac{1}{n(n-1)}$.

   Or $\dfrac{1}{n(n-1)} = \dfrac{1}{n-1} - \dfrac{1}{n}$, donc la série $\displaystyle\sum_{n\geqslant 2} \frac{1}{n(n-1)}$ converge (télescopage, série déjà étudiée).

   D'après le théorème précédent : $\boxed{\text{la série } \displaystyle\sum_{n\in\mathbb{N}^*} \frac{1}{n^2} \text{ converge.}}$

   Rem : On démontrera plus tard que : $\boxed{\displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n^2} = \frac{\pi^2}{6}\,.}$

2. Puisque la série harmonique $\displaystyle\sum_{n\in\mathbb{N}^*} \frac{1}{n}$ diverge, on obtient : $\alpha \leqslant 1 \Longrightarrow \displaystyle\sum_{n\in\mathbb{N}^*} \frac{1}{n^\alpha}$ diverge.

   En effet, $\dfrac{1}{n^\alpha} \geqslant \dfrac{1}{n}$, qui est le terme général d'une série à termes positifs divergente.

3. La série de terme général $\dfrac{\ln n}{n}$ (pour $n \geqslant 2$) est divergente.

   En effet, pour $n \geqslant 3$, $\dfrac{\ln n}{n} \geqslant \dfrac{1}{n}$, qui est le terme général d'une série à termes positifs divergente.

Comparaison série-intégrale

Quelques résultats préliminaires :

- Soit f une fonction continue sur un intervalle de la forme $[a\,;+\infty[$, à valeurs dans $\mathbb{C}$.

  On dira que l'intégrale $\displaystyle\int_a^{+\infty} f$ existe (ou est convergente) si et seulement si $\displaystyle\lim_{x\to+\infty}\int_a^x f(t)\,\mathrm{d}t$ existe (et est finie). Dans ce cas, on note :

$$\int_a^{+\infty} f(t)\,\mathrm{d}t = \lim_{x\to+\infty}\int_a^x f(t)\,\mathrm{d}t.$$

Comparaison série-intégrale

Quelques résultats préliminaires :

- Soit f une fonction continue sur un intervalle de la forme $[a\,;+\infty[$, à valeurs dans $\mathbb{C}$.

  On dira que l'intégrale $\displaystyle\int_a^{+\infty} f$ existe (ou est convergente) si et seulement si $\displaystyle\lim_{x\to+\infty}\int_a^x f(t)\,\mathrm{d}t$ existe (et est finie). Dans ce cas, on note :

$$\int_a^{+\infty} f(t)\,\mathrm{d}t = \lim_{x\to+\infty}\int_a^x f(t)\,\mathrm{d}t.$$

- Supposons maintenant f **à valeurs réelles positives**.

  La fonction $F\colon x\longmapsto\displaystyle\int_a^x f(t)\,\mathrm{d}t$ est alors croissante ; d'après le théorème de la limite monotone, $\displaystyle\lim_{+\infty} F$ existe si et seulement si F est majorée.

Théorème 5: Comparaison série-intégrale

Soit f une fonction continue sur un intervalle de la forme $[n_0\,;+\infty[$ ($n_0 \in \mathbb{N}$), **à valeurs réelles positives** et **décroissante**. Alors :

$$\text{la série } \sum_{n \geqslant n_0} f(n) \text{ converge} \iff \int_{n_0}^{+\infty} f \text{ existe.}$$

Théorème 5: Comparaison série-intégrale

Soit f une fonction continue sur un intervalle de la forme $[n_0\,;+\infty[$ ($n_0 \in \mathbb{N}$), **à valeurs réelles positives** et **décroissante**. Alors :

$$\text{la série } \sum_{n \geqslant n_0} f(n) \text{ converge} \iff \int_{n_0}^{+\infty} f \text{ existe.}$$

Démonstration

f étant décroissante, on a, pour $n \geqslant n_0$:

$$\forall\, t \in [n\,; n+1],\ f(n+1) \leqslant f(t) \leqslant f(n),$$

Théorème 5: Comparaison série-intégrale

Soit f une fonction continue sur un intervalle de la forme $[n_0\,; +\infty[$ ($n_0 \in \mathbb{N}$), **à valeurs réelles positives** et **décroissante**. Alors :

$$\text{la série } \sum_{n \geqslant n_0} f(n) \text{ converge} \iff \int_{n_0}^{+\infty} f \text{ existe.}$$

Démonstration

f étant décroissante, on a, pour $n \geqslant n_0$:

$$\forall\, t \in [n\,; n+1],\ f(n+1) \leqslant f(t) \leqslant f(n),$$

d'où, en intégrant ces inégalités sur l'intervalle $[n\,; n+1]$:

$$f(n+1) \leqslant \int_n^{n+1} f(t)\,\mathrm{d}t \leqslant f(n)$$

Théorème 5: Comparaison série-intégrale

Soit f une fonction continue sur un intervalle de la forme $[n_0\,;+\infty[$ ($n_0 \in \mathbb{N}$), **à valeurs réelles positives** et **décroissante**. Alors :

$$\text{la série } \sum_{n \geqslant n_0} f(n) \text{ converge} \iff \int_{n_0}^{+\infty} f \text{ existe.}$$

Démonstration

f étant décroissante, on a, pour $n \geqslant n_0$:

$$\forall\, t \in [n\,; n+1],\ f(n+1) \leqslant f(t) \leqslant f(n),$$

d'où, en intégrant ces inégalités sur l'intervalle $[n\,; n+1]$:

$$f(n+1) \leqslant \int_n^{n+1} f(t)\,\mathrm{d}t \leqslant f(n)$$

ce que l'on peut écrire aussi :

$$\forall\, n \geqslant n_0+1,\ \int_n^{n+1} f \leqslant f(n) \leqslant \int_{n-1}^{n} f.$$

Théorème 5: Comparaison série-intégrale

Soit f une fonction continue sur un intervalle de la forme $[n_0\,;+\infty[$ ($n_0 \in \mathbb{N}$), **à valeurs réelles positives** et **décroissante**. Alors :

$$\text{la série } \sum_{n \geqslant n_0} f(n) \text{ converge } \iff \int_{n_0}^{+\infty} f \text{ existe.}$$

Démonstration

f étant décroissante, on a, pour $n \geqslant n_0$:

$$\forall\, t \in [n\,; n+1],\ f(n+1) \leqslant f(t) \leqslant f(n),$$

d'où, en intégrant ces inégalités sur l'intervalle $[n\,; n+1]$:

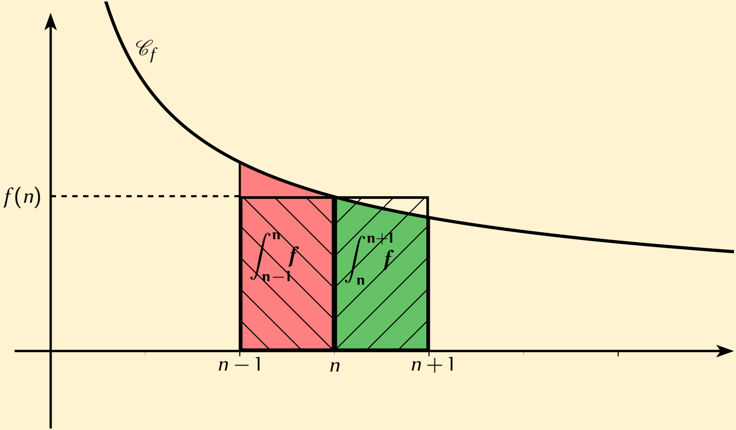
$$f(n+1) \leqslant \int_n^{n+1} f(t)\,\mathrm{d}t \leqslant f(n)$$

ce que l'on peut écrire aussi :

$$\forall\, n \geqslant n_0+1,\ \int_n^{n+1} f \leqslant f(n) \leqslant \int_{n-1}^{n} f.$$

Cet encadrement est illustré par la figure ci-dessous.

Sur ce graphique, l'aire de chaque rectangle hachuré est égale à $f(n)$, et les aires colorées sont égales à $\int_{n-1}^{n} f(t)\,\mathrm{d}t$ et $\int_{n}^{n+1} f(t)\,\mathrm{d}t$:



$$\int_{n}^{n+1} f \leqslant f(n) \leqslant \int_{n-1}^{n} f.$$

Démonstration (suite)

- Supposons d'abord que $\displaystyle\int_{n_0}^{+\infty} f$ existe. Alors, en sommant les inégalités précédentes (partie droite), on a, pour tout entier $N \geqslant n_0 + 1$:

$$\sum_{n=n_0+1}^{N} f(n) \leqslant \int_{n_0}^{N} f \leqslant \int_{n_0}^{+\infty} f\,.$$

Démonstration (suite)

- Supposons d'abord que $\displaystyle\int_{n_0}^{+\infty} f$ existe. Alors, en sommant les inégalités précédentes (partie droite), on a, pour tout entier $N \geqslant n_0 + 1$:

$$\sum_{n=n_0+1}^{N} f(n) \leqslant \int_{n_0}^{N} f \leqslant \int_{n_0}^{+\infty} f\,.$$

Les sommes partielles de la série à termes positifs $\sum f(n)$ étant majorées, cette série converge.

Démonstration (suite)

- Supposons d'abord que $\displaystyle\int_{n_0}^{+\infty} f$ existe. Alors, en sommant les inégalités précédentes (partie droite), on a, pour tout entier $N \geqslant n_0 + 1$:
$$\sum_{n=n_0+1}^{N} f(n) \leqslant \int_{n_0}^{N} f \leqslant \int_{n_0}^{+\infty} f\,.$$
Les sommes partielles de la série à termes positifs $\sum f(n)$ étant majorées, cette série converge.
- Réciproquement, supposons cette série convergente. Alors en sommant les inégalités précédentes (partie gauche) on a :
$$\forall\, N \geqslant n_0,\ \int_{n_0}^{N} f \leqslant \sum_{n=n_0}^{N-1} f(n) \leqslant \sum_{n=n_0}^{+\infty} f(n)$$

Démonstration (suite)

- Supposons d'abord que $\displaystyle\int_{n_0}^{+\infty} f$ existe. Alors, en sommant les inégalités précédentes (partie droite), on a, pour tout entier $N \geqslant n_0 + 1$:
$$\sum_{n=n_0+1}^{N} f(n) \leqslant \int_{n_0}^{N} f \leqslant \int_{n_0}^{+\infty} f\,.$$
Les sommes partielles de la série à termes positifs $\sum f(n)$ étant majorées, cette série converge.
- Réciproquement, supposons cette série convergente. Alors en sommant les inégalités précédentes (partie gauche) on a :
$$\forall\, N \geqslant n_0,\ \int_{n_0}^{N} f \leqslant \sum_{n=n_0}^{N-1} f(n) \leqslant \sum_{n=n_0}^{+\infty} f(n)$$
On aura donc, pour tout réel $x \geqslant n_0$, puisque f est positive :
$$\int_{n_0}^{x} f \leqslant \int_{n_0}^{\lfloor x \rfloor +1} f \leqslant \sum_{n=n_0}^{+\infty} f(n)$$

Démonstration (suite)

- Supposons d'abord que $\displaystyle\int_{n_0}^{+\infty} f$ existe. Alors, en sommant les inégalités précédentes (partie droite), on a, pour tout entier $N \geqslant n_0 + 1$:

$$\sum_{n=n_0+1}^{N} f(n) \leqslant \int_{n_0}^{N} f \leqslant \int_{n_0}^{+\infty} f\,.$$

Les sommes partielles de la série à termes positifs $\sum f(n)$ étant majorées, cette série converge.

- Réciproquement, supposons cette série convergente. Alors en sommant les inégalités précédentes (partie gauche) on a :

$$\forall\, N \geqslant n_0, \quad \int_{n_0}^{N} f \leqslant \sum_{n=n_0}^{N-1} f(n) \leqslant \sum_{n=n_0}^{+\infty} f(n)$$

On aura donc, pour tout réel $x \geqslant n_0$, puisque f est positive :

$$\int_{n_0}^{x} f \leqslant \int_{n_0}^{\lfloor x \rfloor +1} f \leqslant \sum_{n=n_0}^{+\infty} f(n)$$

La fonction $F\colon\ x \mapsto \displaystyle\int_{n_0}^{x} f$ étant majorée, l'intégrale de f converge (cf. remarque préliminaire).

Démonstration (suite)

- Supposons d'abord que $\displaystyle\int_{n_0}^{+\infty} f$ existe. Alors, en sommant les inégalités précédentes (partie droite), on a, pour tout entier $N \geqslant n_0 + 1$:
$$\sum_{n=n_0+1}^{N} f(n) \leqslant \int_{n_0}^{N} f \leqslant \int_{n_0}^{+\infty} f\,.$$
Les sommes partielles de la série à termes positifs $\sum f(n)$ étant majorées, cette série converge.
- Réciproquement, supposons cette série convergente. Alors en sommant les inégalités précédentes (partie gauche) on a :
$$\forall\, N \geqslant n_0,\ \int_{n_0}^{N} f \leqslant \sum_{n=n_0}^{N-1} f(n) \leqslant \sum_{n=n_0}^{+\infty} f(n)$$
On aura donc, pour tout réel $x \geqslant n_0$, puisque f est positive :
$$\int_{n_0}^{x} f \leqslant \int_{n_0}^{\lfloor x \rfloor + 1} f \leqslant \sum_{n=n_0}^{+\infty} f(n)$$
La fonction $F\colon\ x \mapsto \displaystyle\int_{n_0}^{x} f$ étant majorée, l'intégrale de f converge (cf. remarque préliminaire).

Il est tout aussi important de retenir la démonstration que le résultat de ce théorème. En effet, la méthode de comparaison série-intégrale permet d'obtenir facilement un encadrement des sommes partielles ou du reste (en cas de convergence).

Exemple 1 : équivalent du reste d'une série convergente

Trouver un équivalent de $\sum_{k=n}^{+\infty} \frac{1}{k^3}$ lorsque $n \to +\infty$.

Exemple 1 : équivalent du reste d'une série convergente

Trouver un équivalent de $\displaystyle\sum_{k=n}^{+\infty} \frac{1}{k^3}$ lorsque $n \to +\infty$.

Solution

La fonction $t \mapsto \dfrac{1}{t^3}$ étant continue décroissante sur $\mathbb{R}_+^*$, on a, pour tout $k \geqslant 2$:

$$\int_k^{k+1} \frac{\mathrm{d}t}{t^3} \leqslant \frac{1}{k^3} \leqslant \int_{k-1}^{k} \frac{\mathrm{d}t}{t^3},$$

Exemple 1 : équivalent du reste d'une série convergente

Trouver un équivalent de $\displaystyle\sum_{k=n}^{+\infty} \frac{1}{k^3}$ lorsque $n \to +\infty$.

Solution

La fonction $t \mapsto \dfrac{1}{t^3}$ étant continue décroissante sur $\mathbb{R}_+^*$, on a, pour tout $k \geqslant 2$:

$$\int_k^{k+1} \frac{\mathrm{d}t}{t^3} \leqslant \frac{1}{k^3} \leqslant \int_{k-1}^{k} \frac{\mathrm{d}t}{t^3},$$

donc en additionnant ces inégalités pour k variant de $n \geqslant 2$ à $N \geqslant n$ et en utilisant la relation de Chasles :

$$\int_n^{N+1} \frac{\mathrm{d}t}{t^3} \leqslant \sum_{k=n}^{N} \frac{1}{k^3} \leqslant \int_{n-1}^{N} \frac{\mathrm{d}t}{t^3}$$

Exemple 1 : équivalent du reste d'une série convergente

Trouver un équivalent de $\displaystyle\sum_{k=n}^{+\infty} \frac{1}{k^3}$ lorsque $n \to +\infty$.

Solution

La fonction $t \mapsto \dfrac{1}{t^3}$ étant continue décroissante sur $\mathbb{R}_+^*$, on a, pour tout $k \geqslant 2$:

$$\int_k^{k+1} \frac{\mathrm{d}t}{t^3} \leqslant \frac{1}{k^3} \leqslant \int_{k-1}^{k} \frac{\mathrm{d}t}{t^3},$$

donc en additionnant ces inégalités pour k variant de $n \geqslant 2$ à $N \geqslant n$ et en utilisant la relation de Chasles :

$$\int_n^{N+1} \frac{\mathrm{d}t}{t^3} \leqslant \sum_{k=n}^{N} \frac{1}{k^3} \leqslant \int_{n-1}^{N} \frac{\mathrm{d}t}{t^3}$$

soit : $\left[-\dfrac{1}{2t^2}\right]_n^{N+1} \leqslant \displaystyle\sum_{k=n}^{N} \frac{1}{k^3} \leqslant \left[-\dfrac{1}{2t^2}\right]_{n-1}^{N}$. En faisant $N \to +\infty$, ce qui est licite puisque la série converge (série de Riemann, voir ci-après), on obtient :

$$\frac{1}{2n^2} \leqslant \sum_{k=n}^{+\infty} \frac{1}{k^3} \leqslant \frac{1}{2(n-1)^2}$$

Exemple 1 : équivalent du reste d'une série convergente

Trouver un équivalent de $\displaystyle\sum_{k=n}^{+\infty} \frac{1}{k^3}$ lorsque $n \to +\infty$.

Solution

La fonction $t \mapsto \dfrac{1}{t^3}$ étant continue décroissante sur $\mathbb{R}_+^*$, on a, pour tout $k \geqslant 2$:

$$\int_k^{k+1} \frac{\mathrm{d}t}{t^3} \leqslant \frac{1}{k^3} \leqslant \int_{k-1}^{k} \frac{\mathrm{d}t}{t^3},$$

donc en additionnant ces inégalités pour k variant de $n \geqslant 2$ à $N \geqslant n$ et en utilisant la relation de Chasles :

$$\int_n^{N+1} \frac{\mathrm{d}t}{t^3} \leqslant \sum_{k=n}^{N} \frac{1}{k^3} \leqslant \int_{n-1}^{N} \frac{\mathrm{d}t}{t^3}$$

soit : $\displaystyle\left[-\frac{1}{2t^2}\right]_n^{N+1} \leqslant \sum_{k=n}^{N} \frac{1}{k^3} \leqslant \left[-\frac{1}{2t^2}\right]_{n-1}^{N}$. En faisant $N \to +\infty$, ce qui est licite puisque la série converge (série de Riemann, voir ci-après), on obtient :

$$\frac{1}{2n^2} \leqslant \sum_{k=n}^{+\infty} \frac{1}{k^3} \leqslant \frac{1}{2(n-1)^2}$$

d'où l'on tire facilement par le théorème des gendarmes : $\displaystyle\lim_{n\to+\infty} 2n^2 \sum_{k=n}^{+\infty} \frac{1}{k^3} = 1.$

Exemple 1 : équivalent du reste d'une série convergente

Trouver un équivalent de $\displaystyle\sum_{k=n}^{+\infty} \frac{1}{k^3}$ lorsque $n \to +\infty$.

Solution

La fonction $t \mapsto \dfrac{1}{t^3}$ étant continue décroissante sur $\mathbb{R}_+^*$, on a, pour tout $k \geqslant 2$:

$$\int_k^{k+1} \frac{\mathrm{d}t}{t^3} \leqslant \frac{1}{k^3} \leqslant \int_{k-1}^{k} \frac{\mathrm{d}t}{t^3},$$

donc en additionnant ces inégalités pour k variant de $n \geqslant 2$ à $N \geqslant n$ et en utilisant la relation de Chasles :

$$\int_n^{N+1} \frac{\mathrm{d}t}{t^3} \leqslant \sum_{k=n}^{N} \frac{1}{k^3} \leqslant \int_{n-1}^{N} \frac{\mathrm{d}t}{t^3}$$

soit : $\displaystyle\left[-\frac{1}{2t^2}\right]_n^{N+1} \leqslant \sum_{k=n}^{N} \frac{1}{k^3} \leqslant \left[-\frac{1}{2t^2}\right]_{n-1}^{N}$. En faisant $N \to +\infty$, ce qui est licite puisque la série converge (série de Riemann, voir ci-après), on obtient :

$$\frac{1}{2n^2} \leqslant \sum_{k=n}^{+\infty} \frac{1}{k^3} \leqslant \frac{1}{2(n-1)^2}$$

d'où l'on tire facilement par le théorème des gendarmes : $\displaystyle\lim_{n\to+\infty} 2n^2 \sum_{k=n}^{+\infty} \frac{1}{k^3} = 1$.

En conclusion : $\displaystyle\sum_{k=n}^{+\infty} \frac{1}{k^3} \underset{n\to+\infty}{\sim} \frac{1}{2n^2}$.

Exemple 2 : équivalent des sommes partielles d'une série divergente

Trouver un équivalent de $\sum_{k=1}^{n} \sqrt{k}$ lorsque $n \to +\infty$.

Exemple 2 : équivalent des sommes partielles d'une série divergente

Trouver un équivalent de $\sum_{k=1}^{n} \sqrt{k}$ lorsque $n \to +\infty$.

Solution

La fonction $x \mapsto \sqrt{x}$ est continue et croissante sur $\mathbb{R}_+$ donc :

$$\forall\, k \geqslant 1,\ \int_{k-1}^{k} \sqrt{t}\,\mathrm{d}t \leqslant \sqrt{k} \leqslant \int_{k}^{k+1} \sqrt{t}\,\mathrm{d}t.$$

Exemple 2 : équivalent des sommes partielles d'une série divergente

Trouver un équivalent de $\sum_{k=1}^{n} \sqrt{k}$ lorsque $n \to +\infty$.

Solution

La fonction $x \mapsto \sqrt{x}$ est continue et croissante sur $\mathbb{R}_+$ donc :

$$\forall\, k \geqslant 1,\ \int_{k-1}^{k} \sqrt{t}\,\mathrm{d}t \leqslant \sqrt{k} \leqslant \int_{k}^{k+1} \sqrt{t}\,\mathrm{d}t.$$

En additionnant ces inégalités pour k variant de 1 à $n \geqslant 1$ et en utilisant la relation de Chasles :

$$\forall\, n \geqslant 1,\ \int_{0}^{n} \sqrt{t}\,\mathrm{d}t \leqslant \sum_{k=1}^{n} \sqrt{k} \leqslant \int_{1}^{n+1} \sqrt{t}\,\mathrm{d}t\,.$$

Exemple 2 : équivalent des sommes partielles d'une série divergente

Trouver un équivalent de $\sum_{k=1}^{n} \sqrt{k}$ lorsque $n \to +\infty$.

Solution

La fonction $x \mapsto \sqrt{x}$ est continue et croissante sur $\mathbb{R}_+$ donc :

$$\forall\, k \geqslant 1,\ \int_{k-1}^{k} \sqrt{t}\,\mathrm{d}t \leqslant \sqrt{k} \leqslant \int_{k}^{k+1} \sqrt{t}\,\mathrm{d}t.$$

En additionnant ces inégalités pour k variant de 1 à $n \geqslant 1$ et en utilisant la relation de Chasles :

$$\forall\, n \geqslant 1,\ \int_{0}^{n} \sqrt{t}\,\mathrm{d}t \leqslant \sum_{k=1}^{n} \sqrt{k} \leqslant \int_{1}^{n+1} \sqrt{t}\,\mathrm{d}t\,.$$

On en tire alors facilement (une primitive de $t \mapsto \sqrt{t}$ étant $t \mapsto \frac{2}{3} t^{\frac{3}{2}}$) :

$$\sum_{k=1}^{n} \sqrt{k} \underset{n\to+\infty}{\sim} \frac{2}{3} n^{\frac{3}{2}}\,.$$

Séries de Riemann

Il s'agit des séries de terme général $u_n = \dfrac{1}{n^\alpha}$ $(\alpha \in \mathbb{R})$. On a le résultat suivant :

$$\boxed{\text{La série de Riemann } \sum \frac{1}{n^\alpha} \text{ converge si et seulement si } \alpha > 1}$$

Séries de Riemann

Il s'agit des séries de terme général $u_n = \dfrac{1}{n^\alpha}$ $(\alpha \in \mathbb{R})$. On a le résultat suivant :

$$\boxed{\text{La série de Riemann } \sum \frac{1}{n^\alpha} \text{ converge si et seulement si } \alpha > 1}$$

Démonstration

- Si $\alpha \leqslant 0$, $\dfrac{1}{n^\alpha}$ ne tend pas vers 0, donc la série diverge grossièrement.

Séries de Riemann

Il s'agit des séries de terme général $u_n = \dfrac{1}{n^\alpha}$ $(\alpha \in \mathbb{R})$. On a le résultat suivant :

$$\boxed{\text{La série de Riemann } \sum \frac{1}{n^\alpha} \text{ converge si et seulement si } \alpha > 1}$$

Démonstration

- Si $\alpha \leqslant 0$, $\dfrac{1}{n^\alpha}$ ne tend pas vers 0, donc la série diverge grossièrement.
- Sinon, on peut appliquer le théorème de comparaison série-intégrale avec $f : t \mapsto \dfrac{1}{t^\alpha}$, qui est continue, positive et décroissante sur $[1\,; +\infty[$. Donc :

Séries de Riemann

Il s'agit des séries de terme général $u_n = \dfrac{1}{n^\alpha}$ $(\alpha \in \mathbb{R})$. On a le résultat suivant :

$$\boxed{\text{La série de Riemann } \sum \frac{1}{n^\alpha} \text{ converge si et seulement si } \alpha > 1}$$

Démonstration

- Si $\alpha \leqslant 0$, $\dfrac{1}{n^\alpha}$ ne tend pas vers 0, donc la série diverge grossièrement.
- Sinon, on peut appliquer le théorème de comparaison série-intégrale avec $f : t \mapsto \dfrac{1}{t^\alpha}$, qui est continue, positive et décroissante sur $[1 ; +\infty[$. Donc :

$$\sum \frac{1}{n^\alpha} \text{ converge si et seulement si } \int_1^{+\infty} \frac{\mathrm{d}t}{t^\alpha} \text{ converge.}$$

Séries de Riemann

Il s'agit des séries de terme général $u_n = \dfrac{1}{n^\alpha}$ ($\alpha \in \mathbb{R}$). On a le résultat suivant :

$$\boxed{\text{La série de Riemann } \sum \frac{1}{n^\alpha} \text{ converge si et seulement si } \alpha > 1}$$

Démonstration

- Si $\alpha \leqslant 0$, $\dfrac{1}{n^\alpha}$ ne tend pas vers 0, donc la série diverge grossièrement.
- Sinon, on peut appliquer le théorème de comparaison série-intégrale avec $f : t \mapsto \dfrac{1}{t^\alpha}$, qui est continue, positive et décroissante sur $[1\,; +\infty[$. Donc :

$$\sum \frac{1}{n^\alpha} \text{ converge si et seulement si } \int_1^{+\infty} \frac{\mathrm{d}t}{t^\alpha} \text{ converge.}$$

Or $\displaystyle\int_1^x \frac{\mathrm{d}t}{t^\alpha} = \begin{cases} \ln x & \text{si } \alpha = 1 \\ \left[\dfrac{t^{-\alpha+1}}{-\alpha+1}\right]_1^x & \text{sinon} \end{cases}$

Séries de Riemann

Il s'agit des séries de terme général $u_n = \dfrac{1}{n^\alpha}$ $(\alpha \in \mathbb{R})$. On a le résultat suivant :

$$\boxed{\text{La série de Riemann } \sum \frac{1}{n^\alpha} \text{ converge si et seulement si } \alpha > 1}$$

Démonstration

- Si $\alpha \leqslant 0$, $\dfrac{1}{n^\alpha}$ ne tend pas vers 0, donc la série diverge grossièrement.
- Sinon, on peut appliquer le théorème de comparaison série-intégrale avec $f : t \mapsto \dfrac{1}{t^\alpha}$, qui est continue, positive et décroissante sur $[1\,; +\infty[$. Donc :

$$\sum \frac{1}{n^\alpha} \text{ converge si et seulement si } \int_1^{+\infty} \frac{\mathrm{d}t}{t^\alpha} \text{ converge.}$$

Or $\displaystyle\int_1^x \frac{\mathrm{d}t}{t^\alpha} = \begin{cases} \ln x & \text{si } \alpha = 1 \\ \left[\dfrac{t^{-\alpha+1}}{-\alpha+1}\right]_1^x & \text{sinon} \end{cases}$ donc $\displaystyle\lim_{x \to +\infty} \int_1^x \frac{\mathrm{d}t}{t^\alpha}$ existe si et seulement si $-\alpha + 1 < 0$ soit $\alpha > 1$.

SÉRIES ABSOLUMENT CONVERGENTES

Définition 5

Une série $\sum\limits_{n\in\mathbb{N}} u_n$ d'éléments de $\mathbb{K}$ est dite absolument convergente si la série (à termes réels positifs) $\sum\limits_{n\in\mathbb{N}} |u_n|$ est convergente (où $|\ |$ désigne la valeur absolue si $\mathbb{K}=\mathbb{R}$ et le module si $\mathbb{K}=\mathbb{C}$).

Définition 5

Une série $\sum_{n\in\mathbb{N}} u_n$ d'éléments de $\mathbb{K}$ est dite <u>absolument convergente</u> si la série (à termes réels positifs) $\sum_{n\in\mathbb{N}} |u_n|$ est convergente (où $|\ |$ désigne la valeur absolue si $\mathbb{K}=\mathbb{R}$ et le module si $\mathbb{K}=\mathbb{C}$).

Théorème 6

Toute série absolument convergente d'éléments de $\mathbb{K}$ est convergente.

De plus, si $\sum_{n\in\mathbb{N}} u_n$ est absolument convergente, on a : $\left|\sum_{n=0}^{+\infty} u_n\right| \leqslant \sum_{n=0}^{+\infty} |u_n|$.

Définition 5

Une série $\sum\limits_{n\in\mathbb{N}} u_n$ d'éléments de $\mathbb{K}$ est dite absolument convergente si la série (à termes réels positifs) $\sum\limits_{n\in\mathbb{N}} |u_n|$ est convergente (où $|\ \ |$ désigne la valeur absolue si $\mathbb{K}=\mathbb{R}$ et le module si $\mathbb{K}=\mathbb{C}$).

Théorème 6

Toute série absolument convergente d'éléments de $\mathbb{K}$ est convergente.

De plus, si $\sum\limits_{n\in\mathbb{N}} u_n$ est absolument convergente, on a : $\left|\sum\limits_{n=0}^{+\infty} u_n\right| \leqslant \sum\limits_{n=0}^{+\infty} |u_n|$.

Démonstration

Soit $\sum u_n$ une série absolument convergente.

Définition 5

Une série $\sum_{n\in\mathbb{N}} u_n$ d'éléments de $\mathbb{K}$ est dite absolument convergente si la série (à termes réels positifs) $\sum_{n\in\mathbb{N}} |u_n|$ est convergente (où $|\ |$ désigne la valeur absolue si $\mathbb{K}=\mathbb{R}$ et le module si $\mathbb{K}=\mathbb{C}$).

Théorème 6

Toute série absolument convergente d'éléments de $\mathbb{K}$ est convergente.

De plus, si $\sum_{n\in\mathbb{N}} u_n$ est absolument convergente, on a : $\left|\sum_{n=0}^{+\infty} u_n\right| \leqslant \sum_{n=0}^{+\infty} |u_n|$.

Démonstration

Soit $\sum u_n$ une série absolument convergente.

- **Cas où $\mathbb{K}=\mathbb{R}$:** Dans ce cas on pose $u_n^+ = \max(u_n, 0)$ et $u_n^- = \max(-u_n, 0)$ (ainsi $u_n = u_n^+ - u_n^-$ et $|u_n| = u_n^+ + u_n^-$).

Définition 5

Une série $\sum_{n\in\mathbb{N}} u_n$ d'éléments de $\mathbb{K}$ est dite absolument convergente si la série (à termes réels positifs) $\sum_{n\in\mathbb{N}} |u_n|$ est convergente (où $|\ |$ désigne la valeur absolue si $\mathbb{K}=\mathbb{R}$ et le module si $\mathbb{K}=\mathbb{C}$).

Théorème 6

Toute série absolument convergente d'éléments de $\mathbb{K}$ est convergente.

De plus, si $\sum_{n\in\mathbb{N}} u_n$ est absolument convergente, on a : $\left|\sum_{n=0}^{+\infty} u_n\right| \leqslant \sum_{n=0}^{+\infty} |u_n|$.

Démonstration

Soit $\sum u_n$ une série absolument convergente.

- **Cas où $\mathbb{K}=\mathbb{R}$:** Dans ce cas on pose $u_n^+ = \max(u_n, 0)$ et $u_n^- = \max(-u_n, 0)$ (ainsi $u_n = u_n^+ - u_n^-$ et $|u_n| = u_n^+ + u_n^-$).

  Les séries $\sum u_n^+$ et $\sum u_n^-$ sont à termes positifs ; puisque $u_n^+ \leqslant |u_n|$ et $u_n^- \leqslant |u_n|$, les théorèmes de comparaison prouvent que ces séries convergent.

Définition 5

Une série $\sum\limits_{n\in\mathbb{N}} u_n$ d'éléments de $\mathbb{K}$ est dite absolument convergente si la série (à termes réels positifs) $\sum\limits_{n\in\mathbb{N}} |u_n|$ est convergente (où $|\ |$ désigne la valeur absolue si $\mathbb{K}=\mathbb{R}$ et le module si $\mathbb{K}=\mathbb{C}$).

Théorème 6

Toute série absolument convergente d'éléments de $\mathbb{K}$ est convergente.

De plus, si $\sum\limits_{n\in\mathbb{N}} u_n$ est absolument convergente, on a : $\left|\sum\limits_{n=0}^{+\infty} u_n\right| \leqslant \sum\limits_{n=0}^{+\infty} |u_n|$.

Démonstration

Soit $\sum u_n$ une série absolument convergente.

- **Cas où $\mathbb{K}=\mathbb{R}$:** Dans ce cas on pose $u_n^+ = \max(u_n, 0)$ et $u_n^- = \max(-u_n, 0)$ (ainsi $u_n = u_n^+ - u_n^-$ et $|u_n| = u_n^+ + u_n^-$).

  Les séries $\sum u_n^+$ et $\sum u_n^-$ sont à termes positifs ; puisque $u_n^+ \leqslant |u_n|$ et $u_n^- \leqslant |u_n|$, les théorèmes de comparaison prouvent que ces séries convergent. Et puisque $u_n = u_n^+ - u_n^-$, le théorème 2 montre que la série $\sum u_n$ converge.

Définition 5

Une série $\sum_{n\in\mathbb{N}} u_n$ d'éléments de $\mathbb{K}$ est dite absolument convergente si la série (à termes réels positifs) $\sum_{n\in\mathbb{N}} |u_n|$ est convergente (où $|\ \ |$ désigne la valeur absolue si $\mathbb{K}=\mathbb{R}$ et le module si $\mathbb{K}=\mathbb{C}$).

Théorème 6

Toute série absolument convergente d'éléments de $\mathbb{K}$ est convergente.

De plus, si $\sum_{n\in\mathbb{N}} u_n$ est absolument convergente, on a : $\left|\sum_{n=0}^{+\infty} u_n\right| \leqslant \sum_{n=0}^{+\infty} |u_n|$.

Démonstration

Soit $\sum u_n$ une série absolument convergente.

- **Cas où $\mathbb{K}=\mathbb{R}$:** Dans ce cas on pose $u_n^+ = \max(u_n, 0)$ et $u_n^- = \max(-u_n, 0)$ (ainsi $u_n = u_n^+ - u_n^-$ et $|u_n| = u_n^+ + u_n^-$).

  Les séries $\sum u_n^+$ et $\sum u_n^-$ sont à termes positifs ; puisque $u_n^+ \leqslant |u_n|$ et $u_n^- \leqslant |u_n|$, les théorèmes de comparaison prouvent que ces séries convergent. Et puisque $u_n = u_n^+ - u_n^-$, le théorème 2 montre que la série $\sum u_n$ converge.
- **Cas où $\mathbb{K}=\mathbb{C}$:** Dans ce cas, les inégalités $|\mathcal{Re}(u_n)| \leqslant |u_n|$ et $|\mathcal{Im}(u_n)| \leqslant |u_n|$ prouvent que les séries de termes général $\mathcal{Re}(u_n)$ et $\mathcal{Im}(u_n)$ sont des séries à termes réels absolument convergentes donc convergentes d'après le 1er cas, et par suite la série $\sum u_n$ converge.

Définition 5

Une série $\sum_{n\in\mathbb{N}} u_n$ d'éléments de $\mathbb{K}$ est dite absolument convergente si la série (à termes réels positifs) $\sum_{n\in\mathbb{N}} |u_n|$ est convergente (où $|\ |$ désigne la valeur absolue si $\mathbb{K}=\mathbb{R}$ et le module si $\mathbb{K}=\mathbb{C}$).

Théorème 6

Toute série absolument convergente d'éléments de $\mathbb{K}$ est convergente.

De plus, si $\sum_{n\in\mathbb{N}} u_n$ est absolument convergente, on a : $\left|\sum_{n=0}^{+\infty} u_n\right| \leqslant \sum_{n=0}^{+\infty} |u_n|$.

Démonstration

Soit $\sum u_n$ une série absolument convergente.

- **Cas où $\mathbb{K}=\mathbb{R}$:** Dans ce cas on pose $u_n^+ = \max(u_n, 0)$ et $u_n^- = \max(-u_n, 0)$ (ainsi $u_n = u_n^+ - u_n^-$ et $|u_n| = u_n^+ + u_n^-$).

  Les séries $\sum u_n^+$ et $\sum u_n^-$ sont à termes positifs ; puisque $u_n^+ \leqslant |u_n|$ et $u_n^- \leqslant |u_n|$, les théorèmes de comparaison prouvent que ces séries convergent. Et puisque $u_n = u_n^+ - u_n^-$, le théorème 2 montre que la série $\sum u_n$ converge.
- **Cas où $\mathbb{K}=\mathbb{C}$:** Dans ce cas, les inégalités $|\mathcal{R}e\,(u_n)| \leqslant |u_n|$ et $|\mathcal{I}m\,(u_n)| \leqslant |u_n|$ prouvent que les séries de termes général $\mathcal{R}e\,(u_n)$ et $\mathcal{I}m\,(u_n)$ sont des séries à termes réels absolument convergentes donc convergentes d'après le 1er cas, et par suite la série $\sum u_n$ converge.
- Enfin, l'inégalité $\left|\sum_{n=0}^{N} u_n\right| \leqslant \sum_{n=0}^{N} |u_n|$ valable pour tout entier N entraîne l'inégalité annoncée par passage à la limite.

Définition 5

Une série $\sum\limits_{n\in\mathbb{N}} u_n$ d'éléments de $\mathbb{K}$ est dite absolument convergente si la série (à termes réels positifs) $\sum\limits_{n\in\mathbb{N}} |u_n|$ est convergente (où $|\ |$ désigne la valeur absolue si $\mathbb{K}=\mathbb{R}$ et le module si $\mathbb{K}=\mathbb{C}$).

Théorème 6

Toute série absolument convergente d'éléments de $\mathbb{K}$ est convergente.

De plus, si $\sum\limits_{n\in\mathbb{N}} u_n$ est absolument convergente, on a : $\left|\sum\limits_{n=0}^{+\infty} u_n\right| \leqslant \sum\limits_{n=0}^{+\infty} |u_n|$.

Remarque : Il existe des séries qui sont convergentes, mais pas absolument convergentes. Par exemple, la série harmonique alternée. Une telle série est dite semi-convergente.

SÉRIES À TERMES COMPLEXES

Dans ce paragraphe, on applique les résultats sur les séries à termes positifs à des séries numériques plus générales, en utilisant l'absolue convergence.

Théorème 7

Soit $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite **à valeurs dans $\mathbb{C}$** et $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite **de nombres réels positifs**.
On suppose que : $u_n \underset{n\to+\infty}{=} O(v_n)$.

Alors, si la série $\sum\limits_{n\in\mathbb{N}} v_n$ converge, la série $\sum\limits_{n\in\mathbb{N}} u_n$ est absolument convergente (donc convergente).

Théorème 7

Soit $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite **à valeurs dans $\mathbb{C}$** et $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite **de nombres réels positifs**.
On suppose que : $u_n \underset{n\to+\infty}{=} O(v_n)$.

Alors, si la série $\sum\limits_{n\in\mathbb{N}} v_n$ converge, la série $\sum\limits_{n\in\mathbb{N}} u_n$ est absolument convergente (donc convergente).

Démonstration

L'hypothèse $u_n \underset{+\infty}{=} O(v_n)$ s'écrit ici :

$$\exists M \in \mathbb{R},\ \text{tq}\ \forall\, n \in \mathbb{N},\ |u_n| \leqslant M\,|v_n| = Mv_n$$

($|u_n|$ désigne le module de u_n, et (v_n) est à termes réels positifs...)

Théorème 7

Soit $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite **à valeurs dans $\mathbb{C}$** et $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite **de nombres réels positifs**.
On suppose que : $u_n \underset{n\to+\infty}{=} O(v_n)$.

Alors, si la série $\sum\limits_{n\in\mathbb{N}} v_n$ converge, la série $\sum\limits_{n\in\mathbb{N}} u_n$ est absolument convergente (donc convergente).

Démonstration

L'hypothèse $u_n \underset{+\infty}{=} O(v_n)$ s'écrit ici :

$$\exists M \in \mathbb{R},\ \text{tq}\ \forall\, n \in \mathbb{N},\ |u_n| \leqslant M\,|v_n| = Mv_n$$

($|u_n|$ désigne le module de u_n, et (v_n) est à termes réels positifs...)

Puisque $\sum\limits_{n\in\mathbb{N}} v_n$ converge, il en est de même de $\sum\limits_{n\in\mathbb{N}} Mv_n$, et le théorème 4 implique la convergence de $\sum\limits_{n\in\mathbb{N}} |u_n|$, c'est-à-dire la convergence absolue de $\sum\limits_{n\in\mathbb{N}} u_n$.

Théorème 7

Soit $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite **à valeurs dans** $\mathbb{C}$ et $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite **de nombres réels positifs**.
On suppose que : $u_n \underset{n\to+\infty}{=} O(v_n)$.

Alors, si la série $\sum\limits_{n\in\mathbb{N}} v_n$ converge, la série $\sum\limits_{n\in\mathbb{N}} u_n$ est absolument convergente (donc convergente).

Corollaire:

> Soit $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite **à valeurs dans** $\mathbb{C}$ et $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite **de nombres réels positifs**.
> On suppose que : $u_n \underset{n\to+\infty}{=} o(v_n)$.
>
> Alors, si la série $\sum\limits_{n\in\mathbb{N}} v_n$ converge, la série $\sum\limits_{n\in\mathbb{N}} u_n$ converge.

Théorème 7

Soit $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite **à valeurs dans** $\mathbb{C}$ et $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite **de nombres réels positifs**.
On suppose que : $u_n \underset{n\to+\infty}{=} O(v_n)$.

Alors, si la série $\sum_{n\in\mathbb{N}} v_n$ converge, la série $\sum_{n\in\mathbb{N}} u_n$ est absolument convergente (donc convergente).

Corollaire:

> Soit $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite **à valeurs dans** $\mathbb{C}$ et $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite **de nombres réels positifs**.
> On suppose que : $u_n \underset{n\to+\infty}{=} o(v_n)$.
>
> Alors, si la série $\sum_{n\in\mathbb{N}} v_n$ converge, la série $\sum_{n\in\mathbb{N}} u_n$ converge.

Démonstration

Immédiate ; en effet, l'hypothèse $u_n \underset{+\infty}{=} o(v_n)$ s'écrit :

$$\forall\,\varepsilon > 0,\ \exists n_0 \in \mathbb{N} \text{ tq } \forall\, n \geqslant n_0,\ |u_n| \leqslant \varepsilon v_n\,.$$

Il est donc clair que $u_n \underset{+\infty}{=} o(v_n) \Longrightarrow u_n \underset{+\infty}{=} O(v_n)$, et on applique directement le théorème précédent.

Théorème 7

Soit $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite **à valeurs dans** $\mathbb{C}$ et $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite **de nombres réels positifs**.
On suppose que : $u_n \underset{n\to+\infty}{=} O(v_n)$.

Alors, si la série $\sum\limits_{n\in\mathbb{N}} v_n$ converge, la série $\sum\limits_{n\in\mathbb{N}} u_n$ est absolument convergente (donc convergente).

Corollaire:

> Soit $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite **à valeurs dans** $\mathbb{C}$ et $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite **de nombres réels positifs**.
> On suppose que : $u_n \underset{n\to+\infty}{=} o(v_n)$.
>
> Alors, si la série $\sum\limits_{n\in\mathbb{N}} v_n$ converge, la série $\sum\limits_{n\in\mathbb{N}} u_n$ converge.

Corollaire: **critère de Riemann, ou « règle $n^\alpha u_n$ »**

> Soit $\sum\limits_{n\in\mathbb{N}} u_n$ une série à termes complexes.
>
> 1. S'il existe $\ell \in [0\,;+\infty[$ et $\alpha > 1$ tels que $\lim\limits_{n\to+\infty} n^\alpha u_n = \ell$, la série $\sum\limits_{n\in\mathbb{N}} u_n$ est (absolument) convergente.
> 2. S'il existe $\ell \in]0\,;+\infty]$ et $\alpha < 1$ tels que $\lim\limits_{n\to+\infty} n^\alpha |u_n| = \ell$, la série $\sum\limits_{n\in\mathbb{N}} |u_n|$ est divergente.

Théorème 7

Soit $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite **à valeurs dans $\mathbb{C}$** et $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite **de nombres réels positifs**.
On suppose que : $u_n \underset{n\to+\infty}{=} O(v_n)$.

Alors, si la série $\sum\limits_{n\in\mathbb{N}} v_n$ converge, la série $\sum\limits_{n\in\mathbb{N}} u_n$ est absolument convergente (donc convergente).

Corollaire:

> Soit $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite **à valeurs dans $\mathbb{C}$** et $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite **de nombres réels positifs**.
> On suppose que : $u_n \underset{n\to+\infty}{=} o(v_n)$.
>
> Alors, si la série $\sum\limits_{n\in\mathbb{N}} v_n$ converge, la série $\sum\limits_{n\in\mathbb{N}} u_n$ converge.

Corollaire: **critère de Riemann, ou « règle $n^\alpha u_n$ »**

> Soit $\sum\limits_{n\in\mathbb{N}} u_n$ une série à termes complexes.
>
> 1. S'il existe $\ell \in [0\,;+\infty[$ et $\alpha > 1$ tels que $\lim\limits_{n\to+\infty} n^\alpha u_n = \ell$, la série $\sum\limits_{n\in\mathbb{N}} u_n$ est (absolument) convergente.
> 2. S'il existe $\ell \in]0\,;+\infty]$ et $\alpha < 1$ tels que $\lim\limits_{n\to+\infty} n^\alpha\,|u_n| = \ell$, la série $\sum\limits_{n\in\mathbb{N}} |u_n|$ est divergente.

Démonstration

1. En effet dans ce cas on a $u_n = O\left(\dfrac{1}{n^\alpha}\right)$ donc le résultat découle du théorème de comparaison 7.

Théorème 7

Soit $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite **à valeurs dans** $\mathbb{C}$ et $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite **de nombres réels positifs**.
On suppose que : $u_n \underset{n\to+\infty}{=} O(v_n)$.

Alors, si la série $\sum\limits_{n\in\mathbb{N}} v_n$ converge, la série $\sum\limits_{n\in\mathbb{N}} u_n$ est absolument convergente (donc convergente).

Corollaire:

> Soit $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite **à valeurs dans** $\mathbb{C}$ et $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite **de nombres réels positifs**.
> On suppose que : $u_n \underset{n\to+\infty}{=} o(v_n)$.
>
> Alors, si la série $\sum\limits_{n\in\mathbb{N}} v_n$ converge, la série $\sum\limits_{n\in\mathbb{N}} u_n$ converge.

Corollaire: **critère de Riemann, ou « règle $n^\alpha u_n$ »**

> Soit $\sum\limits_{n\in\mathbb{N}} u_n$ une série à termes complexes.
>
> 1. S'il existe $\ell \in [0\,;+\infty[$ et $\alpha > 1$ tels que $\lim\limits_{n\to+\infty} n^\alpha u_n = \ell$, la série $\sum\limits_{n\in\mathbb{N}} u_n$ est (absolument) convergente.
> 2. S'il existe $\ell \in]0\,;+\infty]$ et $\alpha < 1$ tels que $\lim\limits_{n\to+\infty} n^\alpha |u_n| = \ell$, la série $\sum\limits_{n\in\mathbb{N}} |u_n|$ est divergente.

Démonstration

2. Si $\lim\limits_{n\to+\infty} n^\alpha |u_n| = \ell > 0$ alors $|u_n| \geqslant \dfrac{\ell}{2}\dfrac{1}{n^\alpha}$ à partir d'un certain rang (adapter dans le cas $\ell = +\infty$), donc le résultat découle du théorème de comparaison 4.

Théorème 7

Soit $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite **à valeurs dans** $\mathbb{C}$ et $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite **de nombres réels positifs**.
On suppose que : $u_n \underset{n\to+\infty}{=} O(v_n)$.

Alors, si la série $\sum\limits_{n\in\mathbb{N}} v_n$ converge, la série $\sum\limits_{n\in\mathbb{N}} u_n$ est absolument convergente (donc convergente).

Corollaire:

> Soit $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite **à valeurs dans** $\mathbb{C}$ et $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite **de nombres réels positifs**.
> On suppose que : $u_n \underset{n\to+\infty}{=} o(v_n)$.
>
> Alors, si la série $\sum\limits_{n\in\mathbb{N}} v_n$ converge, la série $\sum\limits_{n\in\mathbb{N}} u_n$ converge.

Corollaire: **critère de Riemann, ou « règle $n^\alpha u_n$ »**

> Soit $\sum\limits_{n\in\mathbb{N}} u_n$ une série à termes complexes.
>
> 1. S'il existe $\ell \in [0\,;+\infty[$ et $\alpha > 1$ tels que $\lim\limits_{n\to+\infty} n^\alpha u_n = \ell$, la série $\sum\limits_{n\in\mathbb{N}} u_n$ est (absolument) convergente.
> 2. S'il existe $\ell \in]0\,;+\infty]$ et $\alpha < 1$ tels que $\lim\limits_{n\to+\infty} n^\alpha |u_n| = \ell$, la série $\sum\limits_{n\in\mathbb{N}} |u_n|$ est divergente.

Remarque : il ne faut pas apprendre ce critère par cœur, mais en refaire la démonstration à chaque fois, comme on va le voir dans l'exemple important suivant.

Exemple d'application : les séries de Bertrand

Il s'agit des séries de terme général $u_n = \dfrac{1}{n^{\alpha}(\ln n)^{\beta}}$.

Le résultat suivant est hors-programme, mais il est indispensable d'en connaître la démonstration :

$$\boxed{\text{La série de Bertrand de terme général } \frac{1}{n^{\alpha}(\ln n)^{\beta}} \text{ converge ssi } \alpha > 1 \text{ ou } \left[\alpha = 1 \text{ et } \beta > 1\right].}$$

Exemple d'application : les séries de Bertrand

Il s'agit des séries de terme général $u_n = \dfrac{1}{n^\alpha (\ln n)^\beta}$.

Le résultat suivant est hors-programme, mais il est indispensable d'en connaître la démonstration :

$$\boxed{\text{La série de Bertrand de terme général } \frac{1}{n^\alpha (\ln n)^\beta} \text{ converge ssi } \alpha > 1 \text{ ou } \big[\alpha = 1 \text{ et } \beta > 1\big].}$$

Démonstration

- <u>1er cas : $\alpha < 1$</u>

  Soit alors γ tel que $\alpha < \gamma < 1$. On a :

$$\lim_{n\to\infty} n^\gamma u_n = \lim_{n\to\infty} \frac{n^{\gamma-\alpha}}{(\ln n)^\beta} = +\infty$$

Exemple d'application : les séries de Bertrand

Il s'agit des séries de terme général $u_n = \dfrac{1}{n^\alpha (\ln n)^\beta}$.

Le résultat suivant est hors-programme, mais il est indispensable d'en connaître la démonstration :

> La série de Bertrand de terme général $\dfrac{1}{n^\alpha (\ln n)^\beta}$ converge ssi $\alpha > 1$ ou $\left[\alpha = 1 \text{ et } \beta > 1\right]$.

Démonstration

- 1er cas : $\alpha < 1$

  Soit alors γ tel que $\alpha < \gamma < 1$. On a :

$$\lim_{n \to \infty} n^\gamma u_n = \lim_{n \to \infty} \frac{n^{\gamma - \alpha}}{(\ln n)^\beta} = +\infty$$

  puisque $\gamma - \alpha > 0$, et ce, pour tout β.

Exemple d'application : les séries de Bertrand

Il s'agit des séries de terme général $u_n = \dfrac{1}{n^\alpha (\ln n)^\beta}$.

Le résultat suivant est hors-programme, mais il est indispensable d'en connaître la démonstration :

$$\boxed{\text{La série de Bertrand de terme général } \frac{1}{n^\alpha (\ln n)^\beta} \text{ converge ssi } \alpha > 1 \text{ ou } \left[\alpha = 1 \text{ et } \beta > 1\right].}$$

Démonstration

- <u>1er cas : $\alpha < 1$</u>

  Soit alors γ tel que $\alpha < \gamma < 1$. On a :

  $$\lim_{n \to \infty} n^\gamma u_n = \lim_{n \to \infty} \frac{n^{\gamma - \alpha}}{(\ln n)^\beta} = +\infty$$

  puisque $\gamma - \alpha > 0$, et ce, pour tout β.

  Donc, pour n assez grand, on aura $n^\gamma u_n \geqslant 1$ soit $u_n \geqslant \dfrac{1}{n^\gamma}$. Puisque $\sum \dfrac{1}{n^\gamma}$ diverge, il en est de même de $\sum u_n$.

Exemple d'application : les séries de Bertrand

Il s'agit des séries de terme général $u_n = \dfrac{1}{n^\alpha (\ln n)^\beta}$.

Le résultat suivant est hors-programme, mais il est indispensable d'en connaître la démonstration :

$$\boxed{\text{La série de Bertrand de terme général } \frac{1}{n^\alpha (\ln n)^\beta} \text{ converge ssi } \alpha > 1 \text{ ou } \left[\alpha = 1 \text{ et } \beta > 1\right].}$$

Démonstration

- <u>2ème cas : $\alpha = 1$</u>

  Alors $u_n = \dfrac{1}{n(\ln n)^\beta} = f(n)$ avec, pour $t \geqslant 2$, $f(t) = \dfrac{1}{t(\ln t)^\beta}$.

Exemple d'application : les séries de Bertrand

Il s'agit des séries de terme général $u_n = \dfrac{1}{n^\alpha (\ln n)^\beta}$.

Le résultat suivant est hors-programme, mais il est indispensable d'en connaître la démonstration :

$$\boxed{\text{La série de Bertrand de terme général } \dfrac{1}{n^\alpha (\ln n)^\beta} \text{ converge ssi } \alpha > 1 \text{ ou } \left[\alpha = 1 \text{ et } \beta > 1\right].}$$

Démonstration

- <u>2ème cas : $\alpha = 1$</u>

  Alors $u_n = \dfrac{1}{n(\ln n)^\beta} = f(n)$ avec, pour $t \geqslant 2$, $f(t) = \dfrac{1}{t(\ln t)^\beta}$.

  - Si $\beta \leqslant 0$, $u_n \geqslant \dfrac{1}{n}$ pour $n \geqslant 3$, donc $\sum u_n$ diverge.

Exemple d'application : les séries de Bertrand

Il s'agit des séries de terme général $u_n = \dfrac{1}{n^\alpha (\ln n)^\beta}$.

Le résultat suivant est hors-programme, mais il est indispensable d'en connaître la démonstration :

$$\boxed{\text{La série de Bertrand de terme général } \frac{1}{n^\alpha (\ln n)^\beta} \text{ converge ssi } \alpha > 1 \text{ ou } \big[\alpha = 1 \text{ et } \beta > 1\big].}$$

Démonstration

- <u>2ème cas : $\alpha = 1$</u>

  Alors $u_n = \dfrac{1}{n(\ln n)^\beta} = f(n)$ avec, pour $t \geqslant 2$, $f(t) = \dfrac{1}{t(\ln t)^\beta}$.

  - Si $\beta \leqslant 0$, $u_n \geqslant \dfrac{1}{n}$ pour $n \geqslant 3$, donc $\sum u_n$ diverge.
  - Si $\beta > 0$, f est continue positive et décroissante sur $[2\,; +\infty[$, donc $\sum u_n$ converge si et seulement si $\displaystyle\int_2^{+\infty} \frac{\mathrm{d}t}{t(\ln t)^\beta}$ converge.

Exemple d'application : les séries de Bertrand

Il s'agit des séries de terme général $u_n = \dfrac{1}{n^\alpha (\ln n)^\beta}$.

Le résultat suivant est hors-programme, mais il est indispensable d'en connaître la démonstration :

$$\boxed{\text{La série de Bertrand de terme général } \frac{1}{n^\alpha (\ln n)^\beta} \text{ converge ssi } \alpha > 1 \text{ ou } \big[\alpha = 1 \text{ et } \beta > 1\big].}$$

Démonstration

- <u>2ème cas : $\alpha = 1$</u>

  Alors $u_n = \dfrac{1}{n(\ln n)^\beta} = f(n)$ avec, pour $t \geqslant 2$, $f(t) = \dfrac{1}{t(\ln t)^\beta}$.

  - Si $\beta \leqslant 0$, $u_n \geqslant \dfrac{1}{n}$ pour $n \geqslant 3$, donc $\sum u_n$ diverge.
  - Si $\beta > 0$, f est continue positive et décroissante sur $[2\,;+\infty[$, donc $\sum u_n$ converge si et seulement si $\displaystyle\int_2^{+\infty} \frac{\mathrm{d}t}{t(\ln t)^\beta}$ converge.

    Or $\displaystyle\int_2^x \frac{\mathrm{d}t}{t(\ln t)^\beta} = \begin{cases} \big[\ln(\ln t)\big]_2^x & \text{si } \beta = 1 \\ \left[\dfrac{(\ln t)^{-\beta+1}}{-\beta+1}\right]_2^x & \text{sinon} \end{cases}$

Exemple d'application : les séries de Bertrand

Il s'agit des séries de terme général $u_n = \dfrac{1}{n^\alpha (\ln n)^\beta}$.

Le résultat suivant est hors-programme, mais il est indispensable d'en connaître la démonstration :

$$\boxed{\text{La série de Bertrand de terme général } \dfrac{1}{n^\alpha (\ln n)^\beta} \text{ converge ssi } \alpha > 1 \text{ ou } \left[\alpha = 1 \text{ et } \beta > 1\right].}$$

Démonstration

- <u>2ème cas : $\alpha = 1$</u>

  Alors $u_n = \dfrac{1}{n(\ln n)^\beta} = f(n)$ avec, pour $t \geqslant 2$, $f(t) = \dfrac{1}{t(\ln t)^\beta}$.

  - Si $\beta \leqslant 0$, $u_n \geqslant \dfrac{1}{n}$ pour $n \geqslant 3$, donc $\sum u_n$ diverge.
  - Si $\beta > 0$, f est continue positive et décroissante sur $[2\,;+\infty[$, donc $\sum u_n$ converge si et seulement si $\displaystyle\int_2^{+\infty} \frac{\mathrm{d}t}{t(\ln t)^\beta}$ converge.

    Or $\displaystyle\int_2^x \frac{\mathrm{d}t}{t(\ln t)^\beta} = \begin{cases} \left[\ln(\ln t)\right]_2^x & \text{si } \beta = 1 \\ \left[\dfrac{(\ln t)^{-\beta+1}}{-\beta+1}\right]_2^x & \text{sinon} \end{cases}$ donc $\displaystyle\lim_{x\to+\infty} \int_2^{+\infty} \frac{\mathrm{d}t}{t(\ln t)^\beta}$ existe si et seulement si $-\beta + 1 < 0$ soit $\beta > 1$.

Exemple d'application : les séries de Bertrand

Il s'agit des séries de terme général $u_n = \dfrac{1}{n^\alpha (\ln n)^\beta}$.

Le résultat suivant est hors-programme, mais il est indispensable d'en connaître la démonstration :

$$\boxed{\text{La série de Bertrand de terme général } \frac{1}{n^\alpha (\ln n)^\beta} \text{ converge ssi } \alpha > 1 \text{ ou } \big[\alpha = 1 \text{ et } \beta > 1\big].}$$

Démonstration

- <u>3ème cas : $\alpha > 1$</u>

  Soit γ tel que $1 < \gamma < \alpha$. On a :

$$\lim_{n \to \infty} n^\gamma u_n = \lim_{n \to \infty} \frac{n^{\gamma - \alpha}}{(\ln n)^\beta} = 0$$

  puisque $\gamma - \alpha < 0$, et ce, pour tout β.

Exemple d'application : les séries de Bertrand

Il s'agit des séries de terme général $u_n = \dfrac{1}{n^\alpha (\ln n)^\beta}$.

Le résultat suivant est hors-programme, mais il est indispensable d'en connaître la démonstration :

> La série de Bertrand de terme général $\dfrac{1}{n^\alpha (\ln n)^\beta}$ converge ssi $\alpha > 1$ ou $\left[\alpha = 1 \text{ et } \beta > 1\right]$.

Démonstration

- <u>3ème cas : $\alpha > 1$</u>

  Soit γ tel que $1 < \gamma < \alpha$. On a :

  $$\lim_{n\to\infty} n^\gamma u_n = \lim_{n\to\infty} \frac{n^{\gamma-\alpha}}{(\ln n)^\beta} = 0$$

  puisque $\gamma - \alpha < 0$, et ce, pour tout β.

  Donc $u_n = o\left(\dfrac{1}{n^\gamma}\right)$. Puisque $\sum \dfrac{1}{n^\gamma}$ converge, il en est de même de $\sum u_n$.

Théorème 8

Soit $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite **à valeurs réelles** et $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite **de nombres réels positifs**.
On suppose qu'il existe un réel $k \neq 0$ tel que : $u_n \underset{n\to+\infty}{\sim} kv_n$.

Alors : les séries $\sum\limits_{n\in\mathbb{N}} u_n$ et $\sum\limits_{n\in\mathbb{N}} v_n$ sont de même nature.

Théorème 8

Soit $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite **à valeurs réelles** et $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite **de nombres réels positifs**.
On suppose qu'il existe un réel $k \neq 0$ tel que : $u_n \underset{n\to+\infty}{\sim} kv_n$.

Alors : les séries $\sum\limits_{n\in\mathbb{N}} u_n$ et $\sum\limits_{n\in\mathbb{N}} v_n$ sont de même nature.

Démonstration

- Une remarque préliminaire : l'hypothèse $u_n \underset{n\to+\infty}{\sim} kv_n$ implique que (u_n) est de signe constant (celui de k) à partir d'un certain rang. Il est donc inutile d'étudier le signe de u_n (mais il faut absolument que (v_n) soit à termes positifs !).

Théorème 8

Soit $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite **à valeurs réelles** et $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite **de nombres réels positifs**.
On suppose qu'il existe un réel $k \neq 0$ tel que : $u_n \underset{n\to+\infty}{\sim} kv_n$.

Alors : les séries $\sum\limits_{n\in\mathbb{N}} u_n$ et $\sum\limits_{n\in\mathbb{N}} v_n$ sont de même nature.

Démonstration

- Une remarque préliminaire : l'hypothèse $u_n \underset{n\to+\infty}{\sim} kv_n$ implique que (u_n) est de signe constant (celui de k) à partir d'un certain rang. Il est donc inutile d'étudier le signe de u_n (mais il faut absolument que (v_n) soit à termes positifs !).
- Supposons $\sum\limits_{n\in\mathbb{N}} v_n$ convergente : $u_n \underset{n\to+\infty}{\sim} kv_n$ signifie $u_n - kv_n \underset{n\to+\infty}{=} o(v_n)$. D'après le corollaire 7, la série $\sum\limits_{n\in\mathbb{N}} (u_n - kv_n)$ converge, et, puisque $u_n = (u_n - kv_n) + kv_n$, $\sum\limits_{n\in\mathbb{N}} u_n$ converge (somme de deux séries convergentes).

Théorème 8

Soit $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite **à valeurs réelles** et $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite **de nombres réels positifs**.
On suppose qu'il existe un réel $k \neq 0$ tel que : $u_n \underset{n\to+\infty}{\sim} kv_n$.

Alors : les séries $\sum_{n\in\mathbb{N}} u_n$ et $\sum_{n\in\mathbb{N}} v_n$ sont de même nature.

Démonstration

- Une remarque préliminaire : l'hypothèse $u_n \underset{n\to+\infty}{\sim} kv_n$ implique que (u_n) est de signe constant (celui de k) à partir d'un certain rang. Il est donc inutile d'étudier le signe de u_n (mais il faut absolument que (v_n) soit à termes positifs !).

- Supposons $\sum_{n\in\mathbb{N}} v_n$ convergente : $u_n \underset{n\to+\infty}{\sim} kv_n$ signifie $u_n - kv_n \underset{n\to+\infty}{=} o(v_n)$. D'après le corollaire 7, la série $\sum_{n\in\mathbb{N}} (u_n - kv_n)$ converge, et, puisque $u_n = (u_n - kv_n) + kv_n$, $\sum_{n\in\mathbb{N}} u_n$ converge (somme de deux séries convergentes).

- Idem pour la réciproque, compte tenu de la remarque préliminaire, et puisque $v_n \underset{n\to+\infty}{\sim} \dfrac{1}{k} u_n$.

Théorème 8

Soit $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite **à valeurs réelles** et $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite **de nombres réels positifs**.
On suppose qu'il existe un réel $k \neq 0$ tel que : $u_n \underset{n\to+\infty}{\sim} kv_n$.

Alors : les séries $\sum\limits_{n\in\mathbb{N}} u_n$ et $\sum\limits_{n\in\mathbb{N}} v_n$ sont de même nature.

Démonstration

- Une remarque préliminaire : l'hypothèse $u_n \underset{n\to+\infty}{\sim} kv_n$ implique que (u_n) est de signe constant (celui de k) à partir d'un certain rang. Il est donc inutile d'étudier le signe de u_n (mais il faut absolument que (v_n) soit à termes positifs !).

- Supposons $\sum\limits_{n\in\mathbb{N}} v_n$ convergente : $u_n \underset{n\to+\infty}{\sim} kv_n$ signifie $u_n - kv_n \underset{n\to+\infty}{=} o(v_n)$. D'après le corollaire 7, la série $\sum\limits_{n\in\mathbb{N}} (u_n - kv_n)$ converge, et, puisque $u_n = (u_n - kv_n) + kv_n$, $\sum\limits_{n\in\mathbb{N}} u_n$ converge (somme de deux séries convergentes).

- Idem pour la réciproque, compte tenu de la remarque préliminaire, et puisque $v_n \underset{n\to+\infty}{\sim} \dfrac{1}{k} u_n$.

On ne peut RIEN dire si $u_n \sim v_n$ et si $(u_n), (v_n)$ ne sont pas de signes constants.

Exemple : $u_n = \dfrac{(-1)^n}{n}$ et $v_n = \dfrac{(-1)^n}{n} + \dfrac{1}{n \ln n}$:
ici, la série de terme général u_n converge (série harmonique alternée), celle de terme général v_n diverge (somme d'une série convergente et d'une série divergente), et pourtant on a bien $u_n \sim v_n$.

Exemple 1

Nature de $\sum u_n$ avec $u_n = \sqrt[3]{n^3 + an} - \sqrt{n^2 + 3}$.

Exemple 1

Nature de $\sum u_n$ avec $u_n = \sqrt[3]{n^3 + an} - \sqrt{n^2 + 3}$.

Solution

On effectue un développement limité de u_n lorsque $n \to +\infty$ (**il s'agit d'une méthode très souvent utilisée**).

Exemple 1

Nature de $\sum u_n$ avec $u_n = \sqrt[3]{n^3 + an} - \sqrt{n^2 + 3}$.

Solution

On effectue un développement limité de u_n lorsque $n \to +\infty$ (**il s'agit d'une méthode très souvent utilisée**).
Pour $n \in \mathbb{N}^*$:

$$\begin{aligned} u_n &= \sqrt[3]{n^3 \left(1 + \frac{a}{n^2}\right)} - \sqrt{n^2 \left(1 + \frac{3}{n^2}\right)} = n \left(\left(1 + \frac{a}{n^2}\right)^{\frac{1}{3}} - \left(1 + \frac{3}{n^2}\right)^{\frac{1}{2}} \right) \\ &= n \left(\left(1 + \frac{a}{3n^2} + O\left(\frac{1}{n^4}\right)\right) - \left(1 + \frac{3}{2n^2} + O\left(\frac{1}{n^4}\right)\right) \right) = \frac{\frac{a}{3} - \frac{3}{2}}{n} + O\left(\frac{1}{n^3}\right). \end{aligned}$$

(on a utilisé ici le développement limité de $(1+h)^\alpha$ au voisinage de 0 avec $\alpha = \frac{1}{3}$ et $\alpha = \frac{1}{2}$).

Exemple 1

Nature de $\sum u_n$ avec $u_n = \sqrt[3]{n^3 + an} - \sqrt{n^2 + 3}$.

Solution

On effectue un développement limité de u_n lorsque $n \to +\infty$ (**il s'agit d'une méthode très souvent utilisée**).
Pour $n \in \mathbb{N}^*$:

$$u_n = \sqrt[3]{n^3\left(1+\frac{a}{n^2}\right)} - \sqrt{n^2\left(1+\frac{3}{n^2}\right)} = n\left(\left(1+\frac{a}{n^2}\right)^{\frac{1}{3}} - \left(1+\frac{3}{n^2}\right)^{\frac{1}{2}}\right)$$
$$= n\left(\left(1+\frac{a}{3n^2}+O\left(\frac{1}{n^4}\right)\right) - \left(1+\frac{3}{2n^2}+O\left(\frac{1}{n^4}\right)\right)\right) = \frac{\frac{a}{3}-\frac{3}{2}}{n} + O\left(\frac{1}{n^3}\right).$$

(on a utilisé ici le développement limité de $(1+h)^\alpha$ au voisinage de 0 avec $\alpha = \frac{1}{3}$ et $\alpha = \frac{1}{2}$). On peut alors conclure :

- si $a \neq \dfrac{9}{2}$, alors $u_n \underset{n\to+\infty}{\sim} \dfrac{\frac{a}{3}-\frac{3}{2}}{n}$. La série de terme général positif $\dfrac{1}{n}$ étant divergente, il résulte du théorème 8 que la série $\sum u_n$ diverge aussi ;

Exemple 1

Nature de $\sum u_n$ avec $u_n = \sqrt[3]{n^3 + an} - \sqrt{n^2 + 3}$.

Solution

On effectue un développement limité de u_n lorsque $n \to +\infty$ (**il s'agit d'une méthode très souvent utilisée**).
Pour $n \in \mathbb{N}^*$:

$$u_n = \sqrt[3]{n^3\left(1+\frac{a}{n^2}\right)} - \sqrt{n^2\left(1+\frac{3}{n^2}\right)} = n\left(\left(1+\frac{a}{n^2}\right)^{\frac{1}{3}} - \left(1+\frac{3}{n^2}\right)^{\frac{1}{2}}\right)$$

$$= n\left(\left(1+\frac{a}{3n^2}+O\left(\frac{1}{n^4}\right)\right) - \left(1+\frac{3}{2n^2}+O\left(\frac{1}{n^4}\right)\right)\right) = \frac{\frac{a}{3}-\frac{3}{2}}{n} + O\left(\frac{1}{n^3}\right).$$

(on a utilisé ici le développement limité de $(1+h)^\alpha$ au voisinage de 0 avec $\alpha = \frac{1}{3}$ et $\alpha = \frac{1}{2}$). On peut alors conclure :

- si $a \neq \dfrac{9}{2}$, alors $u_n \underset{n\to+\infty}{\sim} \dfrac{\frac{a}{3}-\frac{3}{2}}{n}$. La série de terme général positif $\dfrac{1}{n}$ étant divergente, il résulte du théorème 8 que la série $\sum u_n$ diverge aussi ;
- si $a = \frac{9}{2}$ alors $u_n \underset{+\infty}{=} O\left(\frac{1}{n^3}\right)$, et puisque la série à termes positifs $\sum \frac{1}{n^3}$ converge, il en est de même de $\sum u_n$ en vertu du théorème 7.

Exemple 2

Nature de $\sum u_n$ avec $u_n = \dfrac{1}{n^3}\left((n+1)^{1+\frac{1}{n}} - (n-1)^{1-\frac{1}{n}}\right)$.

Exemple 2

Nature de $\sum u_n$ avec $u_n = \dfrac{1}{n^3}\left((n+1)^{1+\frac{1}{n}} - (n-1)^{1-\frac{1}{n}}\right)$.

Solution

Là encore, on effectue un développement limité de u_n lorsque $n \to +\infty$, afin d'en trouver un équivalent simple. Ce calcul est un peu plus compliqué que le précédent, et **il faut retenir la technique utilisée**. Elle consiste à utiliser directement l'équivalent $\mathrm{e}^x - 1 \underset{x\to 0}{\sim} x$ afin d'éviter de faire en plus un développement limité de exp.

Exemple 2

Nature de $\sum u_n$ avec $u_n = \dfrac{1}{n^3}\left((n+1)^{1+\frac{1}{n}} - (n-1)^{1-\frac{1}{n}}\right)$.

Solution

Là encore, on effectue un développement limité de u_n lorsque $n \to +\infty$, afin d'en trouver un équivalent simple. Ce calcul est un peu plus compliqué que le précédent, et **il faut retenir la technique utilisée**. Elle consiste à utiliser directement l'équivalent $e^x - 1 \underset{x\to 0}{\sim} x$ afin d'éviter de faire en plus un développement limité de $\exp$.

Pour $n \geqslant 2$:

$$u_n = \frac{1}{n^3}\left(e^{\left(1+\frac{1}{n}\right)\ln(n+1)} - e^{\left(1-\frac{1}{n}\right)\ln(n-1)}\right) = \frac{1}{n^3}e^{\left(1-\frac{1}{n}\right)\ln(n-1)}\left(e^{\left(1+\frac{1}{n}\right)\ln(n+1)-\left(1-\frac{1}{n}\right)\ln(n-1)} - 1\right) \qquad (*)$$

Exemple 2

Nature de $\sum u_n$ avec $u_n = \dfrac{1}{n^3}\left((n+1)^{1+\frac{1}{n}} - (n-1)^{1-\frac{1}{n}}\right)$.

Solution

Là encore, on effectue un développement limité de u_n lorsque $n \to +\infty$, afin d'en trouver un équivalent simple. Ce calcul est un peu plus compliqué que le précédent, et **il faut retenir la technique utilisée**. Elle consiste à utiliser directement l'équivalent $\mathrm{e}^x - 1 \underset{x\to 0}{\sim} x$ afin d'éviter de faire en plus un développement limité de $\exp$.

Pour $n \geqslant 2$:

$$u_n = \frac{1}{n^3}\left(\mathrm{e}^{\left(1+\frac{1}{n}\right)\ln(n+1)} - \mathrm{e}^{\left(1-\frac{1}{n}\right)\ln(n-1)}\right) = \frac{1}{n^3}\mathrm{e}^{\left(1-\frac{1}{n}\right)\ln(n-1)}\left(\mathrm{e}^{\left(1+\frac{1}{n}\right)\ln(n+1)-\left(1-\frac{1}{n}\right)\ln(n-1)} - 1\right) \qquad (*)$$

Posons $v_n = \left(1+\frac{1}{n}\right)\ln(n+1) - \left(1-\frac{1}{n}\right)\ln(n-1)$. Un petit calcul auxiliaire donne :

$$\begin{aligned} v_n &= \left(1+\frac{1}{n}\right)\ln\left[n\left(1+\frac{1}{n}\right)\right] - \left(1-\frac{1}{n}\right)\ln\left[n\left(1-\frac{1}{n}\right)\right] \\ &= 2\frac{\ln n}{n} + \left(1+\frac{1}{n}\right)\underbrace{\ln\left(1+\frac{1}{n}\right)}_{\sim\frac{1}{n}} - \left(1-\frac{1}{n}\right)\underbrace{\ln\left(1-\frac{1}{n}\right)}_{\sim-\frac{1}{n}} = 2\frac{\ln n}{n} + O\left(\frac{1}{n}\right). \end{aligned}$$

Exemple 2

Nature de $\sum u_n$ avec $u_n = \dfrac{1}{n^3}\left((n+1)^{1+\frac{1}{n}} - (n-1)^{1-\frac{1}{n}}\right)$.

Solution (suite)

Il en résulte que $v_n \underset{n\to+\infty}{\sim} 2\dfrac{\ln n}{n}$, et puisque cette quantité tend vers 0 quand $n \to +\infty$, on a $e^{v_n} - 1 \underset{n\to+\infty}{\sim} v_n$, et en remplaçant dans $(*)$ on obtient :

$$u_n \underset{n\to+\infty}{\sim} \frac{2\ln n}{n^4} e^{\left(1-\frac{1}{n}\right)\ln(n-1)}.$$

Exemple 2

Nature de $\sum u_n$ avec $u_n = \dfrac{1}{n^3}\left((n+1)^{1+\frac{1}{n}} - (n-1)^{1-\frac{1}{n}}\right)$.

Solution (suite)

Il en résulte que $v_n \underset{n\to+\infty}{\sim} 2\dfrac{\ln n}{n}$, et puisque cette quantité tend vers 0 quand $n \to +\infty$, on a $e^{v_n} - 1 \underset{n\to+\infty}{\sim} v_n$, et en remplaçant dans $(*)$ on obtient :

$$u_n \underset{n\to+\infty}{\sim} \frac{2\ln n}{n^4} e^{\left(1-\frac{1}{n}\right)\ln(n-1)}.$$

Puis :

$$e^{\left(1-\frac{1}{n}\right)\ln(n-1)} = e^{\left(1-\frac{1}{n}\right)\left(\ln n + \ln\left(1-\frac{1}{n}\right)\right)} = e^{\ln n + o(1)} = e^{\ln n} \underbrace{e^{o(1)}}_{\underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} 1} \underset{n\to+\infty}{\sim} n\,.$$

Exemple 2

Nature de $\sum u_n$ avec $u_n = \dfrac{1}{n^3}\left((n+1)^{1+\frac{1}{n}} - (n-1)^{1-\frac{1}{n}}\right)$.

Solution (suite)

Il en résulte que $v_n \underset{n\to+\infty}{\sim} 2\dfrac{\ln n}{n}$, et puisque cette quantité tend vers 0 quand $n \to +\infty$, on a $e^{v_n} - 1 \underset{n\to+\infty}{\sim} v_n$, et en remplaçant dans $(*)$ on obtient :

$$u_n \underset{n\to+\infty}{\sim} \frac{2\ln n}{n^4} e^{\left(1-\frac{1}{n}\right)\ln(n-1)}.$$

Puis :

$$e^{\left(1-\frac{1}{n}\right)\ln(n-1)} = e^{\left(1-\frac{1}{n}\right)\left(\ln n + \ln\left(1-\frac{1}{n}\right)\right)} = e^{\ln n + o(1)} = e^{\ln n} \underbrace{e^{o(1)}}_{\underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} 1} \underset{n\to+\infty}{\sim} n.$$

Finalement : $u_n \underset{n\to+\infty}{\sim} 2\dfrac{\ln n}{n^3}$, et par comparaison à une série à termes positifs (théorème 8), la série de terme général u_n est de même nature que la série de terme général $\dfrac{\ln n}{n^3}$.

Exemple 2

Nature de $\sum u_n$ avec $u_n = \dfrac{1}{n^3}\left((n+1)^{1+\frac{1}{n}} - (n-1)^{1-\frac{1}{n}}\right)$.

Solution (suite)

Il en résulte que $v_n \underset{n\to+\infty}{\sim} 2\dfrac{\ln n}{n}$, et puisque cette quantité tend vers 0 quand $n \to +\infty$, on a $e^{v_n} - 1 \underset{n\to+\infty}{\sim} v_n$, et en remplaçant dans $(*)$ on obtient :

$$u_n \underset{n\to+\infty}{\sim} \frac{2\ln n}{n^4} e^{\left(1-\frac{1}{n}\right)\ln(n-1)}.$$

Puis :

$$e^{\left(1-\frac{1}{n}\right)\ln(n-1)} = e^{\left(1-\frac{1}{n}\right)\left(\ln n + \ln\left(1-\frac{1}{n}\right)\right)} = e^{\ln n + o(1)} = e^{\ln n} \underbrace{e^{o(1)}}_{\underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} 1} \underset{n\to+\infty}{\sim} n.$$

Finalement : $u_n \underset{n\to+\infty}{\sim} 2\dfrac{\ln n}{n^3}$, et par comparaison à une série à termes positifs (théorème 8), la série de terme général u_n est de même nature que la série de terme général $\dfrac{\ln n}{n^3}$. Et puisque $\dfrac{\ln n}{n^3} \underset{+\infty}{=} o\left(\dfrac{1}{n^2}\right)$, cette série converge.

Théorème 9: Règle de d'Alembert

Soit $\sum\limits_{n\in\mathbb{N}} u_n$ une série à termes complexes **non nuls** (au moins à partir d'un certain rang).

1. S'il existe $k \in]0\,;1[$ tel que $\left|\dfrac{u_{n+1}}{u_n}\right| \leqslant k$ (au moins à partir d'un certain rang), alors la série $\sum\limits_{n\in\mathbb{N}} u_n$ est absolument convergente (donc convergente).
2. Si $\left|\dfrac{u_{n+1}}{u_n}\right| \geqslant 1$ à partir d'un certain rang, la série $\sum\limits_{n\in\mathbb{N}} u_n$ diverge (grossièrement).

Théorème 9: Règle de d'Alembert

Soit $\sum_{n\in\mathbb{N}} u_n$ une série à termes complexes **non nuls** (au moins à partir d'un certain rang).

1. S'il existe $k \in \,]0\,;1[$ tel que $\left|\dfrac{u_{n+1}}{u_n}\right| \leqslant k$ (au moins à partir d'un certain rang), alors la série $\sum_{n\in\mathbb{N}} u_n$ est absolument convergente (donc convergente).
2. Si $\left|\dfrac{u_{n+1}}{u_n}\right| \geqslant 1$ à partir d'un certain rang, la série $\sum_{n\in\mathbb{N}} u_n$ diverge (grossièrement).

Démonstration

1. Si $\left|\dfrac{u_{n+1}}{u_n}\right| \leqslant k$ à partir d'un rang n_0, on obtient, en faisant le produit de ces inégalités :

$$\forall\, n \geqslant n_0\,,\ |u_n| \leqslant k^{n-n_0}\left|u_{n_0}\right|.$$

Théorème 9: Règle de d'Alembert

Soit $\sum_{n\in\mathbb{N}} u_n$ une série à termes complexes **non nuls** (au moins à partir d'un certain rang).

1. S'il existe $k \in]0\,;1[$ tel que $\left|\dfrac{u_{n+1}}{u_n}\right| \leqslant k$ (au moins à partir d'un certain rang), alors la série $\sum_{n\in\mathbb{N}} u_n$ est absolument convergente (donc convergente).
2. Si $\left|\dfrac{u_{n+1}}{u_n}\right| \geqslant 1$ à partir d'un certain rang, la série $\sum_{n\in\mathbb{N}} u_n$ diverge (grossièrement).

Démonstration

1. Si $\left|\dfrac{u_{n+1}}{u_n}\right| \leqslant k$ à partir d'un rang n_0, on obtient, en faisant le produit de ces inégalités :

$$\forall\, n \geqslant n_0,\ |u_n| \leqslant k^{n-n_0}\left|u_{n_0}\right|.$$

Le résultat découle alors du fait que la série géométrique de terme général k^{n-n_0} est convergente et de la règle de comparaison pour les séries à termes réels positifs.

Théorème 9: Règle de d'Alembert

Soit $\sum\limits_{n\in\mathbb{N}} u_n$ une série à termes complexes **non nuls** (au moins à partir d'un certain rang).

1. S'il existe $k \in \,]0\,;1[$ tel que $\left|\dfrac{u_{n+1}}{u_n}\right| \leqslant k$ (au moins à partir d'un certain rang), alors la série $\sum\limits_{n\in\mathbb{N}} u_n$ est absolument convergente (donc convergente).
2. Si $\left|\dfrac{u_{n+1}}{u_n}\right| \geqslant 1$ à partir d'un certain rang, la série $\sum\limits_{n\in\mathbb{N}} u_n$ diverge (grossièrement).

Démonstration

1. Si $\left|\dfrac{u_{n+1}}{u_n}\right| \leqslant k$ à partir d'un rang n_0, on obtient, en faisant le produit de ces inégalités :
$$\forall\, n \geqslant n_0,\ |u_n| \leqslant k^{n-n_0} \left|u_{n_0}\right|.$$
Le résultat découle alors du fait que la série géométrique de terme général k^{n-n_0} est convergente et de la règle de comparaison pour les séries à termes réels positifs.
2. On a ici pour $n \geqslant n_0$ $|u_n| \geqslant \left|u_{n_0}\right| > 0$ donc (u_n) ne peut tendre vers 0 et la série diverge grossièrement.

Théorème 9: Règle de d'Alembert

Soit $\sum_{n\in\mathbb{N}} u_n$ une série à termes complexes **non nuls** (au moins à partir d'un certain rang).

1. S'il existe $k \in]0\,;1[$ tel que $\left|\dfrac{u_{n+1}}{u_n}\right| \leqslant k$ (au moins à partir d'un certain rang), alors la série $\sum_{n\in\mathbb{N}} u_n$ est absolument convergente (donc convergente).
2. Si $\left|\dfrac{u_{n+1}}{u_n}\right| \geqslant 1$ à partir d'un certain rang, la série $\sum_{n\in\mathbb{N}} u_n$ diverge (grossièrement).

Corollaire:

Soit $\sum_{n\in\mathbb{N}} u_n$ une série à termes complexes **non nuls** , telle que $\lim_{n\to+\infty}\left|\dfrac{u_{n+1}}{u_n}\right| = \ell$ existe dans $\overline{\mathbb{R}}$ ($\ell \in [0\,;+\infty]$).

1. Si $\ell < 1$, la série $\sum_{n\in\mathbb{N}} u_n$ converge absolument.
2. Si $\ell > 1$, la série $\sum_{n\in\mathbb{N}} u_n$ diverge (grossièrement).

Théorème 9: Règle de d'Alembert

Soit $\sum_{n\in\mathbb{N}} u_n$ une série à termes complexes **non nuls** (au moins à partir d'un certain rang).

1. S'il existe $k \in]0\,;1[$ tel que $\left|\dfrac{u_{n+1}}{u_n}\right| \leqslant k$ (au moins à partir d'un certain rang), alors la série $\sum_{n\in\mathbb{N}} u_n$ est absolument convergente (donc convergente).
2. Si $\left|\dfrac{u_{n+1}}{u_n}\right| \geqslant 1$ à partir d'un certain rang, la série $\sum_{n\in\mathbb{N}} u_n$ diverge (grossièrement).

Corollaire:

Soit $\sum_{n\in\mathbb{N}} u_n$ une série à termes complexes **non nuls** , telle que $\lim_{n\to+\infty}\left|\dfrac{u_{n+1}}{u_n}\right| = \ell$ existe dans $\overline{\mathbb{R}}$ ($\ell \in [0\,;+\infty]$).

1. Si $\ell < 1$, la série $\sum_{n\in\mathbb{N}} u_n$ converge absolument.
2. Si $\ell > 1$, la série $\sum_{n\in\mathbb{N}} u_n$ diverge (grossièrement).

Démonstration

1. Si $\lim_{n\to+\infty}\left|\dfrac{u_{n+1}}{u_n}\right| = \ell < 1$, on écrit la définition de la limite :

$$\forall\, \varepsilon > 0,\ \exists n_0 \in \mathbb{N} \text{ tq } n \geqslant n_0 \Longrightarrow \ell - \varepsilon < \left|\frac{u_{n+1}}{u_n}\right| < \ell + \varepsilon\,.$$

Théorème 9: Règle de d'Alembert

Soit $\sum_{n\in\mathbb{N}} u_n$ une série à termes complexes **non nuls** (au moins à partir d'un certain rang).

1. S'il existe $k \in \,]0\,;1[$ tel que $\left|\dfrac{u_{n+1}}{u_n}\right| \leqslant k$ (au moins à partir d'un certain rang), alors la série $\sum_{n\in\mathbb{N}} u_n$ est absolument convergente (donc convergente).
2. Si $\left|\dfrac{u_{n+1}}{u_n}\right| \geqslant 1$ à partir d'un certain rang, la série $\sum_{n\in\mathbb{N}} u_n$ diverge (grossièrement).

Corollaire:

Soit $\sum_{n\in\mathbb{N}} u_n$ une série à termes complexes **non nuls** , telle que $\lim\limits_{n\to+\infty} \left|\dfrac{u_{n+1}}{u_n}\right| = \ell$ existe dans $\overline{\mathbb{R}}$ ($\ell \in [0\,;+\infty]$).

1. Si $\ell < 1$, la série $\sum_{n\in\mathbb{N}} u_n$ converge absolument.
2. Si $\ell > 1$, la série $\sum_{n\in\mathbb{N}} u_n$ diverge (grossièrement).

Démonstration

1. Si $\lim\limits_{n\to+\infty} \left|\dfrac{u_{n+1}}{u_n}\right| = \ell < 1$, on écrit la définition de la limite :
$$\forall\, \varepsilon > 0,\ \exists n_0 \in \mathbb{N} \text{ tq } n \geqslant n_0 \Longrightarrow \ell - \varepsilon < \left|\frac{u_{n+1}}{u_n}\right| < \ell + \varepsilon\,.$$
On choisit alors ε tel que $\ell + \varepsilon < 1$, et on applique le théorème précédent.

Théorème 9: Règle de d'Alembert

Soit $\sum\limits_{n\in\mathbb{N}} u_n$ une série à termes complexes **non nuls** (au moins à partir d'un certain rang).

1. S'il existe $k \in \,]0\,;1[$ tel que $\left|\dfrac{u_{n+1}}{u_n}\right| \leqslant k$ (au moins à partir d'un certain rang), alors la série $\sum\limits_{n\in\mathbb{N}} u_n$ est absolument convergente (donc convergente).
2. Si $\left|\dfrac{u_{n+1}}{u_n}\right| \geqslant 1$ à partir d'un certain rang, la série $\sum\limits_{n\in\mathbb{N}} u_n$ diverge (grossièrement).

Corollaire:

Soit $\sum\limits_{n\in\mathbb{N}} u_n$ une série à termes complexes **non nuls** , telle que $\lim\limits_{n\to+\infty}\left|\dfrac{u_{n+1}}{u_n}\right| = \ell$ existe dans $\overline{\mathbb{R}}$ ($\ell \in [0\,;+\infty]$).

1. Si $\ell < 1$, la série $\sum\limits_{n\in\mathbb{N}} u_n$ converge absolument.
2. Si $\ell > 1$, la série $\sum\limits_{n\in\mathbb{N}} u_n$ diverge (grossièrement).

Démonstration

2. Si $\ell > 1$ alors $\left|\dfrac{u_{n+1}}{u_n}\right| \geqslant 1$ pour n assez grand, et on applique le théorème précédent.

Théorème 9: Règle de d'Alembert

Soit $\sum_{n\in\mathbb{N}} u_n$ une série à termes complexes **non nuls** (au moins à partir d'un certain rang).

1. S'il existe $k \in]0\,;1[$ tel que $\left|\dfrac{u_{n+1}}{u_n}\right| \leqslant k$ (au moins à partir d'un certain rang), alors la série $\sum_{n\in\mathbb{N}} u_n$ est absolument convergente (donc convergente).
2. Si $\left|\dfrac{u_{n+1}}{u_n}\right| \geqslant 1$ à partir d'un certain rang, la série $\sum_{n\in\mathbb{N}} u_n$ diverge (grossièrement).

Corollaire:

Soit $\sum_{n\in\mathbb{N}} u_n$ une série à termes complexes **non nuls** , telle que $\lim_{n\to+\infty} \left|\dfrac{u_{n+1}}{u_n}\right| = \ell$ existe dans $\overline{\mathbb{R}}$ ($\ell \in [0\,;+\infty]$).

1. Si $\ell < 1$, la série $\sum_{n\in\mathbb{N}} u_n$ converge absolument.
2. Si $\ell > 1$, la série $\sum_{n\in\mathbb{N}} u_n$ diverge (grossièrement).

Remarque : Si $\ell = 1$, on ne peut rien dire a priori . Ex : $\sum \dfrac{1}{n}$ et $\sum \dfrac{1}{n^2}$.

Application : la fonction exponentielle complexe

Pour tout $z \in \mathbb{C}$, on considère la série $\displaystyle\sum_{n\in\mathbb{N}} \frac{z^n}{n!}$ ·

Application : la fonction exponentielle complexe

Pour tout $z \in \mathbb{C}$, on considère la série $\displaystyle\sum_{n\in\mathbb{N}} \frac{z^n}{n!}\cdot$

Il est clair que la série converge si $z = 0$. Sinon, on pose $u_n = \dfrac{z^n}{n!}\cdot$

Application : la fonction exponentielle complexe

Pour tout $z \in \mathbb{C}$, on considère la série $\displaystyle\sum_{n\in\mathbb{N}} \frac{z^n}{n!}\cdot$

Il est clair que la série converge si $z = 0$. Sinon, on pose $u_n = \dfrac{z^n}{n!}\cdot$

Alors $\displaystyle\lim_{n\to\infty} \frac{|u_{n+1}|}{|u_n|} = \lim_{n\to\infty} \frac{|z|}{n+1} = 0$. D'après la règle de d'Alembert, la série $\displaystyle\sum_{n\in\mathbb{N}} u_n$ est absolument convergente donc convergente.

Application : la fonction exponentielle complexe

Pour tout $z \in \mathbb{C}$, on considère la série $\displaystyle\sum_{n\in\mathbb{N}} \frac{z^n}{n!}\cdot$

Il est clair que la série converge si $z = 0$. Sinon, on pose $u_n = \dfrac{z^n}{n!}\cdot$

Alors $\displaystyle\lim_{n\to\infty} \frac{|u_{n+1}|}{|u_n|} = \lim_{n\to\infty} \frac{|z|}{n+1} = 0$. D'après la règle de d'Alembert, la série $\displaystyle\sum_{n\in\mathbb{N}} u_n$ est absolument convergente donc convergente.

La somme de cette série se note $\exp(z)$ ou e^z :

$$\boxed{\forall\, z \in \mathbb{C},\ \ \mathrm{e}^z = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{z^n}{n!}}$$

et s'appelle l'<u>exponentielle</u> du nombre complexe z.

FORMULE DE STIRLING

Conformément au programme, les démonstrations de cette section sont non exigibles.

Théorème 10: Critère de Duhamel-Raabe (cas douteux de la règle de d'Alembert)

Soit $\sum\limits_{n\in\mathbb{N}} u_n$ une série à termes réels strictement positifs, telle que :

$$\frac{u_{n+1}}{u_n} \underset{n\to+\infty}{=} 1-\frac{\alpha}{n}+O\left(\frac{1}{n^\beta}\right) \quad \text{avec } \alpha\in\mathbb{R} \text{ et } \beta>1.$$

Alors il existe un réel $k>0$ tel que $u_n \underset{n\to+\infty}{\sim} \dfrac{k}{n^\alpha}$ (et par conséquent, $\sum u_n$ converge ssi $\alpha>1$).

Théorème 10: Critère de Duhamel-Raabe (cas douteux de la règle de d'Alembert)

Soit $\sum_{n \in \mathbb{N}} u_n$ une série à termes réels strictement positifs, telle que :

$$\frac{u_{n+1}}{u_n} \underset{n \to +\infty}{=} 1 - \frac{\alpha}{n} + O\left(\frac{1}{n^\beta}\right) \quad \text{avec } \alpha \in \mathbb{R} \text{ et } \beta > 1.$$

Alors il existe un réel $k > 0$ tel que $u_n \underset{n \to +\infty}{\sim} \dfrac{k}{n^\alpha}$ (et par conséquent, $\sum u_n$ converge ssi $\alpha > 1$).

Démonstration

On considère la série de terme général $v_n = \ln u_{n+1} - \ln u_n$. On a :

Théorème 10: Critère de Duhamel-Raabe (cas douteux de la règle de d'Alembert)

Soit $\sum_{n\in\mathbb{N}} u_n$ une série à termes réels strictement positifs, telle que :

$$\frac{u_{n+1}}{u_n} \underset{n\to+\infty}{=} 1 - \frac{\alpha}{n} + O\left(\frac{1}{n^\beta}\right) \quad \text{avec } \alpha \in \mathbb{R} \text{ et } \beta > 1.$$

Alors il existe un réel $k > 0$ tel que $u_n \underset{n\to+\infty}{\sim} \frac{k}{n^\alpha}$ (et par conséquent, $\sum u_n$ converge ssi $\alpha > 1$).

Démonstration

On considère la série de terme général $v_n = \ln u_{n+1} - \ln u_n$. On a :

$$v_n = \ln\left(\frac{u_{n+1}}{u_n}\right) = \ln\left(1 - \frac{\alpha}{n} + O\left(\frac{1}{n^\beta}\right)\right) = -\frac{\alpha}{n} + O\left(\frac{1}{n^\delta}\right) \quad \text{avec } \delta = \min(2, \beta)$$

$$= -\frac{\alpha}{n} + w_n \quad \text{avec } w_n = O\left(\frac{1}{n^\delta}\right).$$

Théorème 10: Critère de Duhamel-Raabe (cas douteux de la règle de d'Alembert)

Soit $\sum_{n\in\mathbb{N}} u_n$ une série à termes réels strictement positifs, telle que :

$$\frac{u_{n+1}}{u_n} \underset{n\to+\infty}{=} 1 - \frac{\alpha}{n} + O\left(\frac{1}{n^\beta}\right) \quad \text{avec } \alpha\in\mathbb{R} \text{ et } \beta > 1\,.$$

Alors il existe un réel $k>0$ tel que $u_n \underset{n\to+\infty}{\sim} \frac{k}{n^\alpha}$ (et par conséquent, $\sum u_n$ converge ssi $\alpha > 1$).

Démonstration

On considère la série de terme général $v_n = \ln u_{n+1} - \ln u_n$. On a :

$$v_n = \ln\left(\frac{u_{n+1}}{u_n}\right) = \ln\left(1 - \frac{\alpha}{n} + O\left(\frac{1}{n^\beta}\right)\right) = -\frac{\alpha}{n} + O\left(\frac{1}{n^\delta}\right) \quad \text{avec } \delta = \min(2,\beta)$$
$$= -\frac{\alpha}{n} + w_n \quad \text{avec } w_n = O\left(\frac{1}{n^\delta}\right).$$

Puisque $\delta > 1$, la série de terme général w_n est absolument convergente, donc convergente. Notons W sa somme.

Théorème 10: Critère de Duhamel-Raabe (cas douteux de la règle de d'Alembert)

Soit $\sum_{n\in\mathbb{N}} u_n$ une série à termes réels strictement positifs, telle que :

$$\frac{u_{n+1}}{u_n} \underset{n\to+\infty}{=} 1 - \frac{\alpha}{n} + O\left(\frac{1}{n^\beta}\right) \quad \text{avec } \alpha \in \mathbb{R} \text{ et } \beta > 1\,.$$

Alors il existe un réel $k > 0$ tel que $u_n \underset{n\to+\infty}{\sim} \dfrac{k}{n^\alpha}$ (et par conséquent, $\sum u_n$ converge ssi $\alpha > 1$).

Démonstration

On considère la série de terme général $v_n = \ln u_{n+1} - \ln u_n$. On a :

$$\begin{aligned} v_n = \ln\left(\frac{u_{n+1}}{u_n}\right) &= \ln\left(1 - \frac{\alpha}{n} + O\left(\frac{1}{n^\beta}\right)\right) = -\frac{\alpha}{n} + O\left(\frac{1}{n^\delta}\right) \quad \text{avec } \delta = \min(2,\beta) \\ &= -\frac{\alpha}{n} + w_n \quad \text{avec } w_n = O\left(\frac{1}{n^\delta}\right). \end{aligned}$$

Puisque $\delta > 1$, la série de terme général w_n est absolument convergente, donc convergente. Notons W sa somme. On a donc, en sommant les égalités précédentes pour n de 1 à $N-1$:

$$\ln u_N - \ln u_1 = \sum_{n=1}^{N-1} v_n = -\alpha \sum_{n=1}^{N-1} \frac{1}{n} + \sum_{n=1}^{N-1} w_n = -\alpha \sum_{n=1}^{N-1} \frac{1}{n} + W + o(1)$$

Théorème 10: Critère de Duhamel-Raabe (cas douteux de la règle de d'Alembert)

Soit $\sum_{n\in\mathbb{N}} u_n$ une série à termes réels strictement positifs, telle que :

$$\frac{u_{n+1}}{u_n} \underset{n\to+\infty}{=} 1 - \frac{\alpha}{n} + O\left(\frac{1}{n^\beta}\right) \quad \text{avec } \alpha \in \mathbb{R} \text{ et } \beta > 1\,.$$

Alors il existe un réel $k > 0$ tel que $u_n \underset{n\to+\infty}{\sim} \frac{k}{n^\alpha}$ (et par conséquent, $\sum u_n$ converge ssi $\alpha > 1$).

Démonstration

On considère la série de terme général $v_n = \ln u_{n+1} - \ln u_n$. On a :

$$v_n = \ln\left(\frac{u_{n+1}}{u_n}\right) = \ln\left(1 - \frac{\alpha}{n} + O\left(\frac{1}{n^\beta}\right)\right) = -\frac{\alpha}{n} + O\left(\frac{1}{n^\delta}\right) \quad \text{avec } \delta = \min(2, \beta)$$
$$= -\frac{\alpha}{n} + w_n \quad \text{avec } w_n = O\left(\frac{1}{n^\delta}\right).$$

Puisque $\delta > 1$, la série de terme général w_n est absolument convergente, donc convergente. Notons W sa somme. On a donc, en sommant les égalités précédentes pour n de 1 à $N-1$:

$$\ln u_N - \ln u_1 = \sum_{n=1}^{N-1} v_n = -\alpha \sum_{n=1}^{N-1} \frac{1}{n} + \sum_{n=1}^{N-1} w_n = -\alpha \sum_{n=1}^{N-1} \frac{1}{n} + W + o(1)$$

donc (en notant γ la constante d'Euler) :

$$\ln u_N = \ln u_1 - \alpha\big(\ln(N-1) + \gamma + o(1)\big) + W + o(1) = \ln u_1 - \alpha\big(\ln N + \ln(1 - \frac{1}{N}) + \gamma\big) + W + o(1)$$
$$= -\alpha \ln N + C + o(1)$$

Théorème 10: Critère de Duhamel-Raabe (cas douteux de la règle de d'Alembert)

Soit $\sum_{n\in\mathbb{N}} u_n$ une série à termes réels strictement positifs, telle que :

$$\frac{u_{n+1}}{u_n} \underset{n\to+\infty}{=} 1 - \frac{\alpha}{n} + O\left(\frac{1}{n^\beta}\right) \quad \text{avec } \alpha\in\mathbb{R} \text{ et } \beta > 1.$$

Alors il existe un réel $k > 0$ tel que $u_n \underset{n\to+\infty}{\sim} \frac{k}{n^\alpha}$ (et par conséquent, $\sum u_n$ converge ssi $\alpha > 1$).

Démonstration

On considère la série de terme général $v_n = \ln u_{n+1} - \ln u_n$. On a :

$$v_n = \ln\left(\frac{u_{n+1}}{u_n}\right) = \ln\left(1 - \frac{\alpha}{n} + O\left(\frac{1}{n^\beta}\right)\right) = -\frac{\alpha}{n} + O\left(\frac{1}{n^\delta}\right) \quad \text{avec } \delta = \min(2,\beta)$$
$$= -\frac{\alpha}{n} + w_n \quad \text{avec } w_n = O\left(\frac{1}{n^\delta}\right).$$

Puisque $\delta > 1$, la série de terme général w_n est absolument convergente, donc convergente. Notons W sa somme. On a donc, en sommant les égalités précédentes pour n de 1 à $N-1$:

$$\ln u_N - \ln u_1 = \sum_{n=1}^{N-1} v_n = -\alpha\sum_{n=1}^{N-1}\frac{1}{n} + \sum_{n=1}^{N-1} w_n = -\alpha\sum_{n=1}^{N-1}\frac{1}{n} + W + o(1)$$

donc (en notant γ la constante d'Euler) :

$$\ln u_N = \ln u_1 - \alpha\big(\ln(N-1) + \gamma + o(1)\big) + W + o(1) = \ln u_1 - \alpha\big(\ln N + \ln(1 - \frac{1}{N}) + \gamma\big) + W + o(1)$$
$$= -\alpha\ln N + C + o(1)$$

et finalement : $u_N = \mathrm{e}^{-\alpha\ln N + C + o(1)} = \frac{\mathrm{e}^C}{N^\alpha}\mathrm{e}^{o(1)} \sim \frac{k}{N^\alpha}$.

La formule de Stirling

Pour compléter les résultats vus en Sup sur les comparaisons des suites usuelles, on cherche ici à comparer les suites de termes généraux $n!$ et $\left(\dfrac{n}{a}\right)^n$, où $a \in \mathbb{R}_+^*$.

La formule de Stirling

Pour compléter les résultats vus en Sup sur les comparaisons des suites usuelles, on cherche ici à comparer les suites de termes généraux $n!$ et $\left(\frac{n}{a}\right)^n$, où $a \in \mathbb{R}_+^*$.

Pour cela, on pose $u_n = \frac{\left(\frac{n}{a}\right)^n}{n!}$; on a alors $\frac{u_{n+1}}{u_n} = \frac{1}{a}\left(1+\frac{1}{n}\right)^n \underset{n\to\infty}{\longrightarrow} \frac{\mathrm{e}}{a}$, donc, d'après la règle de d'Alembert pour les suites :

La formule de Stirling

Pour compléter les résultats vus en Sup sur les comparaisons des suites usuelles, on cherche ici à comparer les suites de termes généraux $n!$ et $\left(\frac{n}{a}\right)^n$, où $a \in \mathbb{R}_+^*$.

Pour cela, on pose $u_n = \frac{\left(\frac{n}{a}\right)^n}{n!}$; on a alors $\frac{u_{n+1}}{u_n} = \frac{1}{a}\left(1 + \frac{1}{n}\right)^n \underset{n \to \infty}{\longrightarrow} \frac{\mathrm{e}}{a}$, donc, d'après la règle de d'Alembert pour les suites :

- si $a > e$, $\lim\limits_{n \to \infty} u_n = 0$;

La formule de Stirling

Pour compléter les résultats vus en Sup sur les comparaisons des suites usuelles, on cherche ici à comparer les suites de termes généraux $n!$ et $\left(\dfrac{n}{a}\right)^n$, où $a \in \mathbb{R}_+^*$.

Pour cela, on pose $u_n = \dfrac{\left(\frac{n}{a}\right)^n}{n!}$; on a alors $\dfrac{u_{n+1}}{u_n} = \dfrac{1}{a}\left(1+\dfrac{1}{n}\right)^n \underset{n\to\infty}{\longrightarrow} \dfrac{\mathrm{e}}{a}$, donc, d'après la règle de d'Alembert pour les suites :

- si $a > e$, $\lim\limits_{n\to\infty} u_n = 0$;
- si $a < e$, $\lim\limits_{n\to\infty} u_n = +\infty$;

La formule de Stirling

Pour compléter les résultats vus en Sup sur les comparaisons des suites usuelles, on cherche ici à comparer les suites de termes généraux $n!$ et $\left(\dfrac{n}{a}\right)^n$, où $a \in \mathbb{R}_+^*$.

Pour cela, on pose $u_n = \dfrac{\left(\frac{n}{a}\right)^n}{n!}$; on a alors $\dfrac{u_{n+1}}{u_n} = \dfrac{1}{a}\left(1+\dfrac{1}{n}\right)^n \underset{n\to\infty}{\longrightarrow} \dfrac{\mathrm{e}}{a}$, donc, d'après la règle de d'Alembert pour les suites :

- si $a > e$, $\lim\limits_{n\to\infty} u_n = 0$;
- si $a < e$, $\lim\limits_{n\to\infty} u_n = +\infty$;
- si $a = e$, on ne peut rien dire a priori. On effectue alors un développement limité de $\dfrac{u_{n+1}}{u_n}$. On obtient :

La formule de Stirling

Pour compléter les résultats vus en Sup sur les comparaisons des suites usuelles, on cherche ici à comparer les suites de termes généraux $n!$ et $\left(\dfrac{n}{a}\right)^n$, où $a \in \mathbb{R}_+^*$.

Pour cela, on pose $u_n = \dfrac{\left(\frac{n}{a}\right)^n}{n!}$; on a alors $\dfrac{u_{n+1}}{u_n} = \dfrac{1}{a}\left(1+\dfrac{1}{n}\right)^n \underset{n\to\infty}{\longrightarrow} \dfrac{\mathrm{e}}{a}$, donc, d'après la règle de d'Alembert pour les suites :

- si $a > e$, $\lim\limits_{n\to\infty} u_n = 0$;
- si $a < e$, $\lim\limits_{n\to\infty} u_n = +\infty$;
- si $a = e$, on ne peut rien dire a priori. On effectue alors un développement limité de $\dfrac{u_{n+1}}{u_n}$. On obtient :
$$\frac{u_{n+1}}{u_n} = \frac{1}{\mathrm{e}}\mathrm{e}^{n\ln\left(1+\frac{1}{n}\right)} = \mathrm{e}^{n\left(\frac{1}{n}-\frac{1}{2n^2}+O\left(\frac{1}{n^3}\right)\right)-1} = 1 - \frac{1}{2n} + O\left(\frac{1}{n^2}\right).$$

La formule de Stirling

Pour compléter les résultats vus en Sup sur les comparaisons des suites usuelles, on cherche ici à comparer les suites de termes généraux $n!$ et $\left(\dfrac{n}{a}\right)^n$, où $a \in \mathbb{R}_+^*$.

Pour cela, on pose $u_n = \dfrac{\left(\frac{n}{a}\right)^n}{n!}$; on a alors $\dfrac{u_{n+1}}{u_n} = \dfrac{1}{a}\left(1+\dfrac{1}{n}\right)^n \underset{n\to\infty}{\longrightarrow} \dfrac{\mathrm{e}}{a}$, donc, d'après la règle de d'Alembert pour les suites :

- si $a > e$, $\lim\limits_{n\to\infty} u_n = 0$;
- si $a < e$, $\lim\limits_{n\to\infty} u_n = +\infty$;
- si $a = e$, on ne peut rien dire a priori. On effectue alors un développement limité de $\dfrac{u_{n+1}}{u_n}$. On obtient :
$$\frac{u_{n+1}}{u_n} = \frac{1}{\mathrm{e}}\mathrm{e}^{n\ln\left(1+\frac{1}{n}\right)} = \mathrm{e}^{n\left(\frac{1}{n}-\frac{1}{2n^2}+O\left(\frac{1}{n^3}\right)\right)-1} = 1 - \frac{1}{2n} + O\left(\frac{1}{n^2}\right).$$

D'après le critère de Duhamel-Raabe, il existe un réel $k > 0$ tel que $u_n \sim \dfrac{1/k}{\sqrt{n}}$ soit :

$$n! \sim k\left(\frac{n}{\mathrm{e}}\right)^n\sqrt{n} \quad (1)$$

La formule de Stirling

Il reste à déterminer la valeur de k. Pour cela, on utilise les intégrales de Wallis $W_n = \int_0^{\pi/2} (\sin t)^n \, dt$.

La formule de Stirling

Il reste à déterminer la valeur de k. Pour cela, on utilise les intégrales de Wallis $W_n = \int_0^{\pi/2} (\sin t)^n \, \mathrm{d}t$.

- Une intégration par parties donne la relation de récurrence $W_n = \frac{n-1}{n} W_{n-2}$ pour $n \geqslant 2$.

La formule de Stirling

Il reste à déterminer la valeur de k. Pour cela, on utilise les intégrales de Wallis $W_n = \displaystyle\int_0^{\pi/2} (\sin t)^n \, dt$.

- Une intégration par parties donne la relation de récurrence $W_n = \dfrac{n-1}{n} W_{n-2}$ pour $n \geqslant 2$.
- On en déduit par récurrence : $\forall\, n \in \mathbb{N},\ W_{2n} = \dfrac{(2n)!}{2^{2n}(n!)^2} \cdot \dfrac{\pi}{2} \quad (2)$.

La formule de Stirling

Il reste à déterminer la valeur de k. Pour cela, on utilise les intégrales de Wallis $W_n = \displaystyle\int_0^{\pi/2} (\sin t)^n \, dt$.

- Une intégration par parties donne la relation de récurrence $W_n = \dfrac{n-1}{n} W_{n-2}$ pour $n \geqslant 2$.
- On en déduit par récurrence : $\forall\, n \in \mathbb{N},\ \ W_{2n} = \dfrac{(2n)!}{2^{2n}(n!)^2} \cdot \dfrac{\pi}{2} \quad (2)$.
- Il est facile de vérifier que la suite (W_n) est décroissante. On a donc, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $W_{n+2} \leqslant W_{n+1} \leqslant W_n$ d'où, en divisant par W_n (qui est strictement positif) :

$$\underbrace{\frac{W_{n+2}}{W_n}}_{=\frac{n+1}{n+2}} \leqslant \frac{W_{n+1}}{W_n} \leqslant 1$$

d'où $\displaystyle\lim_{n\to\infty} \frac{W_{n+1}}{W_n} = 1$, soit : $W_{n+1} \underset{n\to+\infty}{\sim} W_n$.

La formule de Stirling

Il reste à déterminer la valeur de k. Pour cela, on utilise les intégrales de Wallis $W_n = \displaystyle\int_0^{\pi/2} (\sin t)^n \, dt$.

- Une intégration par parties donne la relation de récurrence $W_n = \dfrac{n-1}{n} W_{n-2}$ pour $n \geqslant 2$.
- On en déduit par récurrence : $\forall\, n \in \mathbb{N},\ \ W_{2n} = \dfrac{(2n)!}{2^{2n}(n!)^2} \cdot \dfrac{\pi}{2} \quad (2)$.
- Il est facile de vérifier que la suite (W_n) est décroissante. On a donc, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $W_{n+2} \leqslant W_{n+1} \leqslant W_n$ d'où, en divisant par W_n (qui est strictement positif) :
$$\underbrace{\frac{W_{n+2}}{W_n}}_{=\frac{n+1}{n+2}} \leqslant \frac{W_{n+1}}{W_n} \leqslant 1$$
d'où $\displaystyle\lim_{n\to\infty} \frac{W_{n+1}}{W_n} = 1$, soit : $W_{n+1} \underset{n\to+\infty}{\sim} W_n$.
- D'après la relation de récurrence trouvée plus haut, on a, pour $n \geqslant 2$: $nW_nW_{n-1} = (n-1)W_{n-1}W_{n-2}$, donc la suite (nW_nW_{n-1}) est constante. On en déduit : $\forall\, n \in \mathbb{N}^*,\ \ nW_nW_{n-1} = W_1W_0 = \dfrac{\pi}{2}$.

La formule de Stirling

Il reste à déterminer la valeur de k. Pour cela, on utilise les <u>intégrales de Wallis</u> $W_n = \int_0^{\pi/2} (\sin t)^n \, dt$.

- Une intégration par parties donne la relation de récurrence $W_n = \dfrac{n-1}{n} W_{n-2}$ pour $n \geqslant 2$.
- On en déduit par récurrence : $\forall\, n \in \mathbb{N},\ \ W_{2n} = \dfrac{(2n)!}{2^{2n}(n!)^2} \cdot \dfrac{\pi}{2} \quad (2)$.
- Il est facile de vérifier que la suite (W_n) est décroissante. On a donc, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $W_{n+2} \leqslant W_{n+1} \leqslant W_n$ d'où, en divisant par W_n (qui est strictement positif) :
$$\underbrace{\frac{W_{n+2}}{W_n}}_{=\frac{n+1}{n+2}} \leqslant \frac{W_{n+1}}{W_n} \leqslant 1$$
d'où $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{W_{n+1}}{W_n} = 1$, soit : $W_{n+1} \underset{n\to+\infty}{\sim} W_n$.
- D'après la relation de récurrence trouvée plus haut, on a, pour $n \geqslant 2$: $nW_nW_{n-1} = (n-1)W_{n-1}W_{n-2}$, donc la suite (nW_nW_{n-1}) est constante. On en déduit : $\forall\, n \in \mathbb{N}^*,\ \ nW_nW_{n-1} = W_1W_0 = \dfrac{\pi}{2}$.

  À l'aide de l'équivalent précédent, on obtient alors : $W_n \sim \sqrt{\dfrac{\pi}{2n}}$ et donc $W_{2n} \underset{n\to+\infty}{\sim} \dfrac{1}{2}\sqrt{\dfrac{\pi}{n}} \quad (3)$.

La formule de Stirling

Il reste à déterminer la valeur de k. Pour cela, on utilise les intégrales de Wallis $W_n = \displaystyle\int_0^{\pi/2} (\sin t)^n \, dt$.

- Une intégration par parties donne la relation de récurrence $W_n = \dfrac{n-1}{n} W_{n-2}$ pour $n \geqslant 2$.
- On en déduit par récurrence : $\forall\, n \in \mathbb{N},\ \ W_{2n} = \dfrac{(2n)!}{2^{2n}(n!)^2} \cdot \dfrac{\pi}{2} \quad (2)$.
- Il est facile de vérifier que la suite (W_n) est décroissante. On a donc, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $W_{n+2} \leqslant W_{n+1} \leqslant W_n$ d'où, en divisant par W_n (qui est strictement positif) :

$$\underbrace{\frac{W_{n+2}}{W_n}}_{=\frac{n+1}{n+2}} \leqslant \frac{W_{n+1}}{W_n} \leqslant 1$$

  d'où $\displaystyle\lim_{n\to\infty} \frac{W_{n+1}}{W_n} = 1$, soit : $W_{n+1} \underset{n\to+\infty}{\sim} W_n$.
- D'après la relation de récurrence trouvée plus haut, on a, pour $n \geqslant 2$: $nW_nW_{n-1} = (n-1)W_{n-1}W_{n-2}$, donc la suite (nW_nW_{n-1}) est constante. On en déduit : $\forall\, n \in \mathbb{N}^*,\ \ nW_nW_{n-1} = W_1W_0 = \dfrac{\pi}{2}$.

  À l'aide de l'équivalent précédent, on obtient alors : $W_n \sim \sqrt{\dfrac{\pi}{2n}}$ et donc $W_{2n} \underset{n\to+\infty}{\sim} \dfrac{1}{2}\sqrt{\dfrac{\pi}{n}} \quad (3)$.

Il ne reste plus qu'à mélanger (1), (2) et (3) : on obtient $k = \sqrt{2\pi}$ d'où la célèbre formule de Stirling :

$$\boxed{n! \underset{n\to+\infty}{\sim} \left(\frac{n}{\mathrm{e}}\right)^n \sqrt{2\pi n}}$$

SÉRIES ALTERNÉES

Définition 6

Une série à termes réels $\sum_{n \in \mathbb{N}} u_n$ est dite alternée si la suite $\left((-1)^n u_n\right)_{n \in \mathbb{N}}$ est de signe constant.

Définition 6

Une série à termes réels $\sum_{n\in\mathbb{N}} u_n$ est dite alternée si la suite $\left((-1)^n u_n\right)_{n\in\mathbb{N}}$ est de signe constant.

Théorème 11: Critère spécial des séries alternées, ou critère de Leibniz

Soit $\sum_{n\in\mathbb{N}} u_n$ une série alternée. On suppose que :

- la suite $(|u_n|)$ est décroissante ;
- $\lim_{n\to\infty} u_n = 0$.

Alors la série $\sum_{n\in\mathbb{N}} u_n$ converge.

Définition 6

Une série à termes réels $\sum_{n\in\mathbb{N}} u_n$ est dite alternée si la suite $\left((-1)^n u_n\right)_{n\in\mathbb{N}}$ est de signe constant.

Théorème 11: Critère spécial des séries alternées, ou critère de Leibniz

Soit $\sum_{n\in\mathbb{N}} u_n$ une série alternée. On suppose que :

- la suite $(|u_n|)$ est décroissante ;
- $\lim_{n\to\infty} u_n = 0$.

Alors la série $\sum_{n\in\mathbb{N}} u_n$ converge.

Démonstration

La suite (u_n) est alternée. Supposons par exemple $u_0 \geqslant 0$. On aura alors, pour tout entier n, $u_{2n} \geqslant 0$ et $u_{2n+1} \leqslant 0$.

Définition 6

Une série à termes réels $\sum_{n\in\mathbb{N}} u_n$ est dite alternée si la suite $\left((-1)^n u_n\right)_{n\in\mathbb{N}}$ est de signe constant.

Théorème 11: Critère spécial des séries alternées, ou critère de Leibniz

Soit $\sum_{n\in\mathbb{N}} u_n$ une série alternée. On suppose que :

- la suite $(|u_n|)$ est décroissante ;
- $\lim_{n\to\infty} u_n = 0$.

Alors la série $\sum_{n\in\mathbb{N}} u_n$ converge.

Démonstration

La suite (u_n) est alternée. Supposons par exemple $u_0 \geqslant 0$. On aura alors, pour tout entier n, $u_{2n} \geqslant 0$ et $u_{2n+1} \leqslant 0$.

Notons $S_n = \sum_{k=0}^{n} u_k$ la n-ième somme partielle.

Définition 6

Une série à termes réels $\sum_{n\in\mathbb{N}} u_n$ est dite alternée si la suite $\left((-1)^n u_n\right)_{n\in\mathbb{N}}$ est de signe constant.

Théorème 11: Critère spécial des séries alternées, ou critère de Leibniz

Soit $\sum_{n\in\mathbb{N}} u_n$ une série alternée. On suppose que :

- la suite $(|u_n|)$ est décroissante ;
- $\lim_{n\to\infty} u_n = 0$.

Alors la série $\sum_{n\in\mathbb{N}} u_n$ converge.

Démonstration

La suite (u_n) est alternée. Supposons par exemple $u_0 \geqslant 0$. On aura alors, pour tout entier n, $u_{2n} \geqslant 0$ et $u_{2n+1} \leqslant 0$.

Notons $S_n = \sum_{k=0}^{n} u_k$ la n-ième somme partielle.

La suite (S_{2n}) est décroissante car : $\forall\, n \in \mathbb{N},\ S_{2n+2} - S_{2n} = u_{2n+2} + u_{2n+1} = |u_{2n+2}| - |u_{2n+1}| \leqslant 0.$

Définition 6

Une série à termes réels $\sum_{n\in\mathbb{N}} u_n$ est dite alternée si la suite $\left((-1)^n u_n\right)_{n\in\mathbb{N}}$ est de signe constant.

Théorème 11: Critère spécial des séries alternées, ou critère de Leibniz

Soit $\sum_{n\in\mathbb{N}} u_n$ une série alternée. On suppose que :

- la suite $(|u_n|)$ est décroissante ;
- $\lim_{n\to\infty} u_n = 0$.

Alors la série $\sum_{n\in\mathbb{N}} u_n$ converge.

Démonstration

La suite (u_n) est alternée. Supposons par exemple $u_0 \geqslant 0$. On aura alors, pour tout entier n, $u_{2n} \geqslant 0$ et $u_{2n+1} \leqslant 0$.

Notons $S_n = \sum_{k=0}^{n} u_k$ la n-ième somme partielle.

La suite (S_{2n}) est décroissante car : $\forall\, n \in \mathbb{N},\ S_{2n+2} - S_{2n} = u_{2n+2} + u_{2n+1} = |u_{2n+2}| - |u_{2n+1}| \leqslant 0.$

et la suite (S_{2n+1}) est croissante car : $\forall\, n \in \mathbb{N},\ S_{2n+3} - S_{2n+1} = u_{2n+3} + u_{2n+2} = |u_{2n+2}| - |u_{2n+3}| \geqslant 0.$

Définition 6

Une série à termes réels $\sum_{n\in\mathbb{N}} u_n$ est dite alternée si la suite $\left((-1)^n u_n\right)_{n\in\mathbb{N}}$ est de signe constant.

Théorème 11: Critère spécial des séries alternées, ou critère de Leibniz

Soit $\sum_{n\in\mathbb{N}} u_n$ une série alternée. On suppose que :

- la suite $(|u_n|)$ est décroissante ;
- $\lim_{n\to\infty} u_n = 0.$

Alors la série $\sum_{n\in\mathbb{N}} u_n$ converge.

Démonstration

La suite (u_n) est alternée. Supposons par exemple $u_0 \geqslant 0$. On aura alors, pour tout entier n, $u_{2n} \geqslant 0$ et $u_{2n+1} \leqslant 0$.

Notons $S_n = \sum_{k=0}^{n} u_k$ la n-ième somme partielle.

La suite (S_{2n}) est décroissante car : $\forall\, n \in \mathbb{N},\ S_{2n+2} - S_{2n} = u_{2n+2} + u_{2n+1} = |u_{2n+2}| - |u_{2n+1}| \leqslant 0.$

et la suite (S_{2n+1}) est croissante car : $\forall\, n \in \mathbb{N},\ S_{2n+3} - S_{2n+1} = u_{2n+3} + u_{2n+2} = |u_{2n+2}| - |u_{2n+3}| \geqslant 0.$

De plus, $S_{2n+1} - S_{2n} = u_{2n+1}$ tend vers 0 quand $n \to \infty$.

Définition 6

Une série à termes réels $\sum_{n\in\mathbb{N}} u_n$ est dite <u>alternée</u> si la suite $\left((-1)^n u_n\right)_{n\in\mathbb{N}}$ est de signe constant.

Théorème 11: Critère spécial des séries alternées, ou critère de Leibniz

Soit $\sum_{n\in\mathbb{N}} u_n$ une série alternée. On suppose que :

- la suite $(|u_n|)$ est décroissante ;
- $\lim_{n\to\infty} u_n = 0$.

Alors la série $\sum_{n\in\mathbb{N}} u_n$ converge.

Démonstration

La suite (u_n) est alternée. Supposons par exemple $u_0 \geqslant 0$. On aura alors, pour tout entier n, $u_{2n} \geqslant 0$ et $u_{2n+1} \leqslant 0$.

Notons $S_n = \sum_{k=0}^{n} u_k$ la n-ième somme partielle.

La suite (S_{2n}) est décroissante car : $\forall\, n \in \mathbb{N},\ S_{2n+2} - S_{2n} = u_{2n+2} + u_{2n+1} = |u_{2n+2}| - |u_{2n+1}| \leqslant 0$.

et la suite (S_{2n+1}) est croissante car : $\forall\, n \in \mathbb{N},\ S_{2n+3} - S_{2n+1} = u_{2n+3} + u_{2n+2} = |u_{2n+2}| - |u_{2n+3}| \geqslant 0$.

De plus, $S_{2n+1} - S_{2n} = u_{2n+1}$ tend vers 0 quand $n \to \infty$.

Les deux suites sont donc adjacentes. Elles convergent donc vers la même limite U, donc la suite (S_n) aussi.

Les résultats du cours sur les suites adjacentes permettent d'obtenir des renseignements supplémentaires :

Les résultats du cours sur les suites adjacentes permettent d'obtenir des renseignements supplémentaires :

Théorème 12

Soit $\sum_{n\in\mathbb{N}} u_n$ une série alternée telle que :

- la suite $(|u_n|)$ est décroissante ;
- $\lim_{n\to\infty} u_n = 0$

et soit S sa somme. Alors :

1. S est comprise entre deux sommes partielles d'indices consécutifs.
2. S est du signe de u_0, et $|S| \leqslant |u_0|$.
3. Si on note $R_n = \sum_{k=n+1}^{+\infty} u_k$ le reste d'ordre n, alors R_n est du signe de u_{n+1} et $|R_n| \leqslant |u_{n+1}|$.

Les résultats du cours sur les suites adjacentes permettent d'obtenir des renseignements supplémentaires :

Théorème 12

Soit $\sum_{n\in\mathbb{N}} u_n$ une série alternée telle que :

- la suite $(|u_n|)$ est décroissante ;
- $\lim_{n\to\infty} u_n = 0$

et soit S sa somme. Alors :

1. S est comprise entre deux sommes partielles d'indices consécutifs.
2. S est du signe de u_0, et $|S| \leqslant |u_0|$.
3. Si on note $R_n = \sum_{k=n+1}^{+\infty} u_k$ le reste d'ordre n, alors R_n est du signe de u_{n+1} et $|R_n| \leqslant |u_{n+1}|$.

Démonstration

1. résulte directement du fait que les suites (S_{2n}) et (S_{2n+1}) sont adjacentes.

Les résultats du cours sur les suites adjacentes permettent d'obtenir des renseignements supplémentaires :

Théorème 12

Soit $\sum_{n\in\mathbb{N}} u_n$ une série alternée telle que :

- la suite $(|u_n|)$ est décroissante ;
- $\lim_{n\to\infty} u_n = 0$

et soit S sa somme. Alors :

1. S est comprise entre deux sommes partielles d'indices consécutifs.
2. S est du signe de u_0, et $|S| \leqslant |u_0|$.
3. Si on note $R_n = \sum_{k=n+1}^{+\infty} u_k$ le reste d'ordre n, alors R_n est du signe de u_{n+1} et $|R_n| \leqslant |u_{n+1}|$.

Démonstration

1. résulte directement du fait que les suites (S_{2n}) et (S_{2n+1}) sont adjacentes.
2. Dans le cas où $u_0 \geqslant 0$, on a $S_1 \leqslant S \leqslant S_0$ soit $u_0 + u_1 \leqslant S \leqslant u_0$, et $u_0 + u_1 = |u_0| - |u_1| \geqslant 0$, d'où le résultat.

Les résultats du cours sur les suites adjacentes permettent d'obtenir des renseignements supplémentaires :

Théorème 12

Soit $\sum\limits_{n\in\mathbb{N}} u_n$ une série alternée telle que :

- la suite $(|u_n|)$ est décroissante ;
- $\lim\limits_{n\to\infty} u_n = 0$

et soit S sa somme. Alors :

1. S est comprise entre deux sommes partielles d'indices consécutifs.
2. S est du signe de u_0, et $|S| \leqslant |u_0|$.
3. Si on note $R_n = \sum\limits_{k=n+1}^{+\infty} u_k$ le reste d'ordre n, alors R_n est du signe de u_{n+1} et $|R_n| \leqslant |u_{n+1}|$.

Démonstration

1. résulte directement du fait que les suites (S_{2n}) et (S_{2n+1}) sont adjacentes.
2. Dans le cas où $u_0 \geqslant 0$, on a $S_1 \leqslant S \leqslant S_0$ soit $u_0 + u_1 \leqslant S \leqslant u_0$, et $u_0 + u_1 = |u_0| - |u_1| \geqslant 0$, d'où le résultat. Dans le cas $u_0 \leqslant 0$, on a $S_0 \leqslant S \leqslant S_1$ soit $u_0 \leqslant S \leqslant u_0 + u_1 \leqslant 0$, d'où le résultat.

Les résultats du cours sur les suites adjacentes permettent d'obtenir des renseignements supplémentaires :

Théorème 12

Soit $\sum_{n\in\mathbb{N}} u_n$ une série alternée telle que :

- la suite $(|u_n|)$ est décroissante ;
- $\lim_{n\to\infty} u_n = 0$

et soit S sa somme. Alors :

1. S est comprise entre deux sommes partielles d'indices consécutifs.
2. S est du signe de u_0, et $|S| \leqslant |u_0|$.
3. Si on note $R_n = \sum_{k=n+1}^{+\infty} u_k$ le reste d'ordre n, alors R_n est du signe de u_{n+1} et $|R_n| \leqslant |u_{n+1}|$.

Démonstration

1. résulte directement du fait que les suites (S_{2n}) et (S_{2n+1}) sont adjacentes.
2. Dans le cas où $u_0 \geqslant 0$, on a $S_1 \leqslant S \leqslant S_0$ soit $u_0 + u_1 \leqslant S \leqslant u_0$, et $u_0 + u_1 = |u_0| - |u_1| \geqslant 0$, d'où le résultat. Dans le cas $u_0 \leqslant 0$, on a $S_0 \leqslant S \leqslant S_1$ soit $u_0 \leqslant S \leqslant u_0 + u_1 \leqslant 0$, d'où le résultat.
3. On applique le résultat précédent à la série $\sum_{k\in\mathbb{N}} v_k$, avec $v_k = u_{n+1+k}$: pour cette série (qui vérifie encore les hypothèses du CSSA), on a $S = R_n$ et $v_0 = u_{n+1}$.

Exemple : les séries de Riemann alternées.

Il s'agit des séries $\sum_{n\in\mathbb{N}^*} \frac{(-1)^{n-1}}{n^\alpha}$.

Exemple : les séries de Riemann alternées.

Il s'agit des séries $\displaystyle\sum_{n\in\mathbb{N}^*} \frac{(-1)^{n-1}}{n^\alpha}$.

Posons, pour $n \geqslant 1$, $u_n = \dfrac{(-1)^{n-1}}{n^\alpha}$.

Exemple : les séries de Riemann alternées.

Il s'agit des séries $\displaystyle\sum_{n\in\mathbb{N}^*} \frac{(-1)^{n-1}}{n^\alpha}$.

Posons, pour $n \geqslant 1$, $u_n = \dfrac{(-1)^{n-1}}{n^\alpha}$.

- Si $\alpha \leqslant 0$, la suite (u_n) ne tend pas vers 0 quand $n \to \infty$, donc la série $\sum u_n$ diverge grossièrement.

Exemple : les séries de Riemann alternées.

Il s'agit des séries $\displaystyle\sum_{n\in\mathbb{N}^*} \frac{(-1)^{n-1}}{n^\alpha}$.

Posons, pour $n \geqslant 1$, $u_n = \dfrac{(-1)^{n-1}}{n^\alpha}$.

- Si $\alpha \leqslant 0$, la suite (u_n) ne tend pas vers 0 quand $n \to \infty$, donc la série $\sum u_n$ diverge grossièrement.
- Si $\alpha > 1$, $|u_n| = \dfrac{1}{n^\alpha}$ et la série $\sum u_n$ est absolument convergente, donc convergente.

Exemple : les séries de Riemann alternées.

Il s'agit des séries $\displaystyle\sum_{n\in\mathbb{N}^*} \frac{(-1)^{n-1}}{n^\alpha}$.

Posons, pour $n \geqslant 1$, $u_n = \dfrac{(-1)^{n-1}}{n^\alpha}$.

- Si $\alpha \leqslant 0$, la suite (u_n) ne tend pas vers 0 quand $n \to \infty$, donc la série $\sum u_n$ diverge grossièrement.
- Si $\alpha > 1$, $|u_n| = \dfrac{1}{n^\alpha}$ et la série $\sum u_n$ est absolument convergente, donc convergente.
- Si $\alpha \in\,]0\,;1[$, la suite (u_n) vérifie les hypothèses du CSSA, donc la série$\sum u_n$ converge (elle est ici semi-convergente).

Exercice 1

Étude de la série de terme général $u_n = (-1)^n \sqrt{n} \sin\left(\frac{1}{n}\right)$ $(n \geqslant 1)$.

Exercice 1

Étude de la série de terme général $u_n = (-1)^n \sqrt{n} \sin\left(\frac{1}{n}\right)$ $(n \geqslant 1)$.

Solution

- $|u_n| = \sqrt{n} \sin\left(\dfrac{1}{n}\right) \sim \dfrac{1}{\sqrt{n}}$ donc $\sum |u_n|$ diverge : $\sum u_n$ n'est pas absolument convergente.

Exercice 1

Étude de la série de terme général $u_n = (-1)^n \sqrt{n} \sin\left(\frac{1}{n}\right)$ $(n \geqslant 1)$.

Solution

- $|u_n| = \sqrt{n} \sin\left(\dfrac{1}{n}\right) \sim \dfrac{1}{\sqrt{n}}$ donc $\sum |u_n|$ diverge : $\sum u_n$ n'est pas absolument convergente.
- u_n est du signe de $(-1)^n$, donc la suite (u_n) est alternée. Si on veut absolument utiliser le CSSA, il faut étudier le signe de $|u_{n+1}| - |u_n|$. Pour cela, deux solutions possibles :

Exercice 1

Étude de la série de terme général $u_n = (-1)^n \sqrt{n} \sin\left(\frac{1}{n}\right)$ $(n \geqslant 1)$.

Solution

- $|u_n| = \sqrt{n} \sin\left(\dfrac{1}{n}\right) \sim \dfrac{1}{\sqrt{n}}$ donc $\sum |u_n|$ diverge : $\sum u_n$ n'est pas absolument convergente.
- u_n est du signe de $(-1)^n$, donc la suite (u_n) est alternée. Si on veut absolument utiliser le CSSA, il faut étudier le signe de $|u_{n+1}| - |u_n|$. Pour cela, deux solutions possibles :
  - On effectue un développement limité :

$$\begin{aligned}
|u_{n+1}| - |u_n| &= \sqrt{n+1} \sin\left(\frac{1}{n+1}\right) - \sqrt{n} \sin\left(\frac{1}{n}\right) \\
&= \sqrt{n}\sqrt{1 + \frac{1}{n}} \sin\left(\frac{1}{n(1+\frac{1}{n})}\right) - \sqrt{n} \sin\left(\frac{1}{n}\right) \\
&= \sqrt{n}\left(1 + \frac{1}{2n} + O\left(\frac{1}{n^2}\right)\right) \sin\left(\frac{1}{n}\left(1 - \frac{1}{n} + O\left(\frac{1}{n^2}\right)\right)\right) - \sqrt{n}\left(\frac{1}{n} + O\left(\frac{1}{n^3}\right)\right) \\
&= \sqrt{n}\left(1 + \frac{1}{2n} + O\left(\frac{1}{n^2}\right)\right)\left(\frac{1}{n} - \frac{1}{n^2} + O\left(\frac{1}{n^3}\right)\right) - \sqrt{n}\left(\frac{1}{n} + O\left(\frac{1}{n^3}\right)\right) \\
&= \sqrt{n}\left(\frac{1}{n} - \frac{1}{2n^2} + O\left(\frac{1}{n^3}\right)\right) - \sqrt{n}\left(\frac{1}{n} + O\left(\frac{1}{n^3}\right)\right) = \frac{-1}{2n^{\frac{3}{2}}} + O\left(\frac{1}{n^{\frac{5}{2}}}\right).
\end{aligned}$$

Exercice 1

Étude de la série de terme général $u_n = (-1)^n \sqrt{n} \sin\left(\frac{1}{n}\right)$ $(n \geqslant 1)$.

Solution

- $|u_n| = \sqrt{n} \sin\left(\dfrac{1}{n}\right) \sim \dfrac{1}{\sqrt{n}}$ donc $\sum |u_n|$ diverge : $\sum u_n$ n'est pas absolument convergente.
- u_n est du signe de $(-1)^n$, donc la suite (u_n) est alternée. Si on veut absolument utiliser le CSSA, il faut étudier le signe de $|u_{n+1}| - |u_n|$. Pour cela, deux solutions possibles :
  - On effectue un développement limité :

$$\begin{aligned}
|u_{n+1}| - |u_n| &= \sqrt{n+1} \sin\left(\frac{1}{n+1}\right) - \sqrt{n} \sin\left(\frac{1}{n}\right) \\
&= \sqrt{n}\sqrt{1+\frac{1}{n}} \sin\left(\frac{1}{n(1+\frac{1}{n})}\right) - \sqrt{n} \sin\left(\frac{1}{n}\right) \\
&= \sqrt{n}\left(1+\frac{1}{2n}+O\left(\frac{1}{n^2}\right)\right) \sin\left(\frac{1}{n}\left(1-\frac{1}{n}+O\left(\frac{1}{n^2}\right)\right)\right) - \sqrt{n}\left(\frac{1}{n}+O\left(\frac{1}{n^3}\right)\right) \\
&= \sqrt{n}\left(1+\frac{1}{2n}+O\left(\frac{1}{n^2}\right)\right)\left(\frac{1}{n}-\frac{1}{n^2}+O\left(\frac{1}{n^3}\right)\right) - \sqrt{n}\left(\frac{1}{n}+O\left(\frac{1}{n^3}\right)\right) \\
&= \sqrt{n}\left(\frac{1}{n}-\frac{1}{2n^2}+O\left(\frac{1}{n^3}\right)\right) - \sqrt{n}\left(\frac{1}{n}+O\left(\frac{1}{n^3}\right)\right) = \frac{-1}{2n^{\frac{3}{2}}} + O\left(\frac{1}{n^{\frac{5}{2}}}\right).
\end{aligned}$$

  Ainsi, $|u_{n+1}| - |u_n| \sim \dfrac{-1}{2n^{\frac{3}{2}}}$, donc $|u_{n+1}| - |u_n|$ est négatif au moins à partir d'un certain rang, ce qui permet d'appliquer le CSSA : $\sum u_n$ converge. (OUF !)

Solution (suite)

- On peut aussi remarquer que $|u_n| = f(n)$ avec $f(x) = \sqrt{x}\sin\left(\dfrac{1}{x}\right)$ et étudier le sens de variation de f. Allons-y :

Solution (suite)

- On peut aussi remarquer que $|u_n| = f(n)$ avec $f(x) = \sqrt{x}\sin\left(\dfrac{1}{x}\right)$ et étudier le sens de variation de f.

  Allons-y :

  $$f \text{ est } \mathscr{C}^{\infty} \text{ sur } \mathbb{R}_+^* \text{ et, } \forall\, x > 0,\ f'(x) = \underbrace{\frac{1}{2\sqrt{x}}\sin\left(\frac{1}{x}\right)}_{\underset{x\to\infty}{\sim}\frac{1}{2x^{\frac{3}{2}}}} - \underbrace{\frac{1}{x^{\frac{3}{2}}}\cos\left(\frac{1}{x}\right)}_{\underset{x\to\infty}{\sim}\frac{1}{x^{\frac{3}{2}}}} \text{ donc } f'(x) \underset{x\to\infty}{\sim} \frac{-1}{2x^{\frac{3}{2}}}, \text{ ce qui}$$

  montre que $f'(x) < 0$ pour x assez grand, donc que f décroît pour x assez grand, et on aboutit à la même conclusion.

- Tout cela est affreusement calculatoire (bien qu'il s'agisse de calculs que tout élève de Sup doit savoir faire !). Il y a une bien meilleure solution, qui consiste à effectuer directement un développement limité de u_n :

Solution (suite)

- On peut aussi remarquer que $|u_n| = f(n)$ avec $f(x) = \sqrt{x}\sin\left(\frac{1}{x}\right)$ et étudier le sens de variation de f.

  Allons-y :

  f est $\mathscr{C}^\infty$ sur $\mathbb{R}_+^*$ et, $\forall\, x > 0,\ f'(x) = \underbrace{\frac{1}{2\sqrt{x}}\sin\left(\frac{1}{x}\right)}_{\underset{x\to\infty}{\sim}\frac{1}{2x^{\frac{3}{2}}}} - \underbrace{\frac{1}{x^{\frac{3}{2}}}\cos\left(\frac{1}{x}\right)}_{\underset{x\to\infty}{\sim}\frac{1}{x^{\frac{3}{2}}}}$ donc $f'(x) \underset{x\to\infty}{\sim} \frac{-1}{2x^{\frac{3}{2}}}$, ce qui montre que $f'(x) < 0$ pour x assez grand, donc que f décroît pour x assez grand, et on aboutit à la même conclusion.

- Tout cela est affreusement calculatoire (bien qu'il s'agisse de calculs que tout élève de Sup doit savoir faire !). Il y a une bien meilleure solution, qui consiste à effectuer directement un développement limité de u_n :

$$u_n = (-1)^n\sqrt{n}\left(\frac{1}{n} + O\left(\frac{1}{n^3}\right)\right) = \frac{(-1)^n}{\sqrt{n}} + O\left(\frac{1}{n^{\frac{5}{2}}}\right).$$

Solution (suite)

- On peut aussi remarquer que $|u_n| = f(n)$ avec $f(x) = \sqrt{x}\sin\left(\dfrac{1}{x}\right)$ et étudier le sens de variation de f.

  Allons-y :

  f est $\mathscr{C}^\infty$ sur $\mathbb{R}_+^*$ et, $\forall\, x > 0,\ f'(x) = \underbrace{\dfrac{1}{2\sqrt{x}}\sin\left(\dfrac{1}{x}\right)}_{\underset{x\to\infty}{\sim}\frac{1}{2x^{\frac{3}{2}}}} - \underbrace{\dfrac{1}{x^{\frac{3}{2}}}\cos\left(\dfrac{1}{x}\right)}_{\underset{x\to\infty}{\sim}\frac{1}{x^{\frac{3}{2}}}}$ donc $f'(x) \underset{x\to\infty}{\sim} \dfrac{-1}{2x^{\frac{3}{2}}}$, ce qui montre que $f'(x) < 0$ pour x assez grand, donc que f décroît pour x assez grand, et on aboutit à la même conclusion.

- Tout cela est affreusement calculatoire (bien qu'il s'agisse de calculs que tout élève de Sup doit savoir faire !). Il y a une bien meilleure solution, qui consiste à effectuer directement un développement limité de u_n :

$$u_n = (-1)^n\sqrt{n}\left(\frac{1}{n} + O\left(\frac{1}{n^3}\right)\right) = \frac{(-1)^n}{\sqrt{n}} + O\left(\frac{1}{n^{\frac{5}{2}}}\right).$$

Ainsi, $u_n = v_n + w_n$, avec $v_n = \dfrac{(-1)^n}{\sqrt{n}}$ et $w_n = O\left(\dfrac{1}{n^{\frac{5}{2}}}\right)$.

Solution (suite)

- On peut aussi remarquer que $|u_n| = f(n)$ avec $f(x) = \sqrt{x}\sin\left(\dfrac{1}{x}\right)$ et étudier le sens de variation de f.

  Allons-y :

  f est $\mathscr{C}^\infty$ sur $\mathbb{R}_+^*$ et, $\forall\, x > 0,\ f'(x) = \underbrace{\dfrac{1}{2\sqrt{x}}\sin\left(\dfrac{1}{x}\right)}_{\underset{x\to\infty}{\sim}\frac{1}{2x^{\frac{3}{2}}}} - \underbrace{\dfrac{1}{x^{\frac{3}{2}}}\cos\left(\dfrac{1}{x}\right)}_{\underset{x\to\infty}{\sim}\frac{1}{x^{\frac{3}{2}}}}$ donc $f'(x) \underset{x\to\infty}{\sim} \dfrac{-1}{2x^{\frac{3}{2}}}$, ce qui montre que $f'(x) < 0$ pour x assez grand, donc que f décroît pour x assez grand, et on aboutit à la même conclusion.

- Tout cela est affreusement calculatoire (bien qu'il s'agisse de calculs que tout élève de Sup doit savoir faire !). Il y a une bien meilleure solution, qui consiste à effectuer directement un développement limité de u_n :

$$u_n = (-1)^n\sqrt{n}\left(\frac{1}{n} + O\left(\frac{1}{n^3}\right)\right) = \frac{(-1)^n}{\sqrt{n}} + O\left(\frac{1}{n^{\frac{5}{2}}}\right).$$

Ainsi, $u_n = v_n + w_n$, avec $v_n = \dfrac{(-1)^n}{\sqrt{n}}$ et $w_n = O\left(\dfrac{1}{n^{\frac{5}{2}}}\right)$. La série de terme général v_n est convergente (série de Riemann alternée), et celle de terme général w_n est absolument convergente (comparaison à une série de Riemann).

Solution (suite)

- On peut aussi remarquer que $|u_n| = f(n)$ avec $f(x) = \sqrt{x}\sin\left(\dfrac{1}{x}\right)$ et étudier le sens de variation de f.

  Allons-y :

  f est $\mathscr{C}^\infty$ sur $\mathbb{R}_+^*$ et, $\forall\, x > 0$, $f'(x) = \underbrace{\dfrac{1}{2\sqrt{x}}\sin\left(\dfrac{1}{x}\right)}_{\underset{x\to\infty}{\sim}\frac{1}{2x^{\frac{3}{2}}}} - \underbrace{\dfrac{1}{x^{\frac{3}{2}}}\cos\left(\dfrac{1}{x}\right)}_{\underset{x\to\infty}{\sim}\frac{1}{x^{\frac{3}{2}}}}$ donc $f'(x) \underset{x\to\infty}{\sim} \dfrac{-1}{2x^{\frac{3}{2}}}$, ce qui

  montre que $f'(x) < 0$ pour x assez grand, donc que f décroît pour x assez grand, et on aboutit à la même conclusion.

- Tout cela est affreusement calculatoire (bien qu'il s'agisse de calculs que tout élève de Sup doit savoir faire !). Il y a une bien meilleure solution, qui consiste à effectuer directement un développement limité de u_n :

$$u_n = (-1)^n\sqrt{n}\left(\frac{1}{n} + O\left(\frac{1}{n^3}\right)\right) = \frac{(-1)^n}{\sqrt{n}} + O\left(\frac{1}{n^{\frac{5}{2}}}\right).$$

Ainsi, $u_n = v_n + w_n$, avec $v_n = \dfrac{(-1)^n}{\sqrt{n}}$ et $w_n = O\left(\dfrac{1}{n^{\frac{5}{2}}}\right)$. La série de terme général v_n est convergente (série de Riemann alternée), et celle de terme général w_n est absolument convergente (comparaison à une série de Riemann).

Il en résulte que $\sum u_n$ est la somme de deux séries convergentes, donc est convergente.

Solution (suite)

- On peut aussi remarquer que $|u_n| = f(n)$ avec $f(x) = \sqrt{x}\sin\left(\frac{1}{x}\right)$ et étudier le sens de variation de f.

  Allons-y :

  f est $\mathscr{C}^\infty$ sur $\mathbb{R}_+^*$ et, $\forall\, x > 0$, $f'(x) = \underbrace{\frac{1}{2\sqrt{x}}\sin\left(\frac{1}{x}\right)}_{\underset{x\to\infty}{\sim}\frac{1}{2x^{\frac{3}{2}}}} - \underbrace{\frac{1}{x^{\frac{3}{2}}}\cos\left(\frac{1}{x}\right)}_{\underset{x\to\infty}{\sim}\frac{1}{x^{\frac{3}{2}}}}$ donc $f'(x) \underset{x\to\infty}{\sim} \frac{-1}{2x^{\frac{3}{2}}}$, ce qui montre que $f'(x) < 0$ pour x assez grand, donc que f décroît pour x assez grand, et on aboutit à la même conclusion.

- Tout cela est affreusement calculatoire (bien qu'il s'agisse de calculs que tout élève de Sup doit savoir faire !). Il y a une bien meilleure solution, qui consiste à effectuer directement un développement limité de u_n :

$$u_n = (-1)^n\sqrt{n}\left(\frac{1}{n} + O\left(\frac{1}{n^3}\right)\right) = \frac{(-1)^n}{\sqrt{n}} + O\left(\frac{1}{n^{\frac{5}{2}}}\right).$$

Ainsi, $u_n = v_n + w_n$, avec $v_n = \frac{(-1)^n}{\sqrt{n}}$ et $w_n = O\left(\frac{1}{n^{\frac{5}{2}}}\right)$. La série de terme général v_n est convergente (série de Riemann alternée), et celle de terme général w_n est absolument convergente (comparaison à une série de Riemann).

Il en résulte que $\sum u_n$ est la somme de deux séries convergentes, donc est convergente.

On peut remarquer que $u_n \sim \frac{(-1)^n}{\sqrt{n}}$, et la série de Riemann alternée de terme général $\frac{(-1)^n}{\sqrt{n}}$ converge, **MAIS CELA NE PERMET PAS DE CONCLURE !!!** car il ne s'agit pas de séries de signe constant.

Exercice 2

Étude de la série de terme général $u_n = \sin\left(\pi\sqrt{n^2+1}\right)$.

Exercice 2

Étude de la série de terme général $u_n = \sin\left(\pi\sqrt{n^2+1}\right)$.

Solution

Ici la suite ne vérifie pas (a priori) les conditions du CSSA.

Mais là encore, un simple développement limité permet de résoudre l'exercice :

Exercice 2

Étude de la série de terme général $u_n = \sin\left(\pi\sqrt{n^2+1}\right)$.

Solution

Ici la suite ne vérifie pas (a priori) les conditions du CSSA.

Mais là encore, un simple développement limité permet de résoudre l'exercice :

$$\begin{aligned}
u_n &= \sin\left(\pi n\sqrt{1+\frac{1}{n^2}}\right) = \sin\left(\pi n\left(1+\frac{1}{2n^2}+O\left(\frac{1}{n^4}\right)\right)\right)\\
&= \sin\left(\pi n+\frac{\pi}{2n}+O\left(\frac{1}{n^3}\right)\right) = (-1)^n\sin\left(\frac{\pi}{2n}+O\left(\frac{1}{n^3}\right)\right)\\
&= \frac{(-1)^n\pi}{2n}+O\left(\frac{1}{n^3}\right)
\end{aligned}$$

Exercice 2

Étude de la série de terme général $u_n = \sin\left(\pi\sqrt{n^2+1}\right)$.

Solution

Ici la suite ne vérifie pas (a priori) les conditions du CSSA.

Mais là encore, un simple développement limité permet de résoudre l'exercice :

$$\begin{aligned} u_n &= \sin\left(\pi n\sqrt{1+\frac{1}{n^2}}\right) = \sin\left(\pi n\left(1+\frac{1}{2n^2}+O\left(\frac{1}{n^4}\right)\right)\right) \\ &= \sin\left(\pi n+\frac{\pi}{2n}+O\left(\frac{1}{n^3}\right)\right) = (-1)^n\sin\left(\frac{\pi}{2n}+O\left(\frac{1}{n^3}\right)\right) \\ &= \frac{(-1)^n\pi}{2n}+O\left(\frac{1}{n^3}\right) \end{aligned}$$

ce qui permet de conclure comme dans l'exercice précédent : $\sum u_n$ est somme d'une série semi-convergente et d'une série absolument convergente, elle est donc convergente.

Exercice 3

Étude de la série de terme général $u_n = \dfrac{(-1)^n}{\sqrt{n} + (-1)^{n+1}}$.

Exercice 3

Étude de la série de terme général $u_n = \dfrac{(-1)^n}{\sqrt{n} + (-1)^{n+1}}$.

Solution

Je vous laisse le soin de vérifier que (u_n) est bien alternée, tend vers 0 quans $n \to \infty$, mais que $(|u_n|)$ n'est pas décroissante : le CSSA ne s'applique pas !

Exercice 3

Étude de la série de terme général $u_n = \dfrac{(-1)^n}{\sqrt{n} + (-1)^{n+1}}$.

Solution

Je vous laisse le soin de vérifier que (u_n) est bien alternée, tend vers 0 quans $n \to \infty$, mais que $(|u_n|)$ n'est pas décroissante : le CSSA ne s'applique pas !

La solution passe donc par un ...développement limité !

Exercice 3

Étude de la série de terme général $u_n = \dfrac{(-1)^n}{\sqrt{n} + (-1)^{n+1}}$.

Solution

Je vous laisse le soin de vérifier que (u_n) est bien alternée, tend vers 0 quans $n \to \infty$, mais que $(|u_n|)$ n'est pas décroissante : le CSSA ne s'applique pas !

La solution passe donc par un ...développement limité !

Le calcul (facile) donne : $u_n = \dfrac{(-1)^n}{\sqrt{n}} + \dfrac{1}{n} + O\left(\dfrac{1}{n^{\frac{3}{2}}}\right)$.

Exercice 3

Étude de la série de terme général $u_n = \dfrac{(-1)^n}{\sqrt{n} + (-1)^{n+1}}$.

Solution

Je vous laisse le soin de vérifier que (u_n) est bien alternée, tend vers 0 quans $n \to \infty$, mais que $(|u_n|)$ n'est pas décroissante : le CSSA ne s'applique pas !

La solution passe donc par un ...développement limité !

Le calcul (facile) donne : $u_n = \dfrac{(-1)^n}{\sqrt{n}} + \dfrac{1}{n} + O\left(\dfrac{1}{n^{\frac{3}{2}}}\right)$.

Conclusion : $\sum u_n$ est somme d'une série semi-convergente, d'une série divergente et d'une série absolument convergente : elle est donc divergente.

Exercice 4

Étudier la série de terme général $u_n = \ln\left(1 + \sin \dfrac{(-1)^n}{n^\alpha}\right)$ pour $\alpha \in \mathbb{R}$.

Exercice 4

Étudier la série de terme général $u_n = \ln\left(1 + \sin\dfrac{(-1)^n}{n^\alpha}\right)$ pour $\alpha \in \mathbb{R}$.

Solution

- Si $\alpha \leqslant 0$, la suite $\sin\dfrac{(-1)^n}{n^\alpha}$ n'a pas de limite quand $n \to +\infty$. Dans ce cas, la série $\sum u_n$ diverge grossièrement.

Exercice 4

Étudier la série de terme général $u_n = \ln\left(1 + \sin\dfrac{(-1)^n}{n^\alpha}\right)$ pour $\alpha \in \mathbb{R}$.

Solution

- Si $\alpha \leqslant 0$, la suite $\sin\dfrac{(-1)^n}{n^\alpha}$ n'a pas de limite quand $n \to +\infty$. Dans ce cas, la série $\sum u_n$ diverge grossièrement.
- si $\alpha > 0$, $|u_n| \underset{n\to+\infty}{\sim} \dfrac{1}{n^\alpha}$ donc $\sum u_n$ converge absolument si et seulement si $\alpha > 1$ (théorème de comparaison de séries à termes positifs).

Exercice 4

Étudier la série de terme général $u_n = \ln\left(1 + \sin \dfrac{(-1)^n}{n^\alpha}\right)$ pour $\alpha \in \mathbb{R}$.

Solution

- Si $\alpha \leqslant 0$, la suite $\sin \dfrac{(-1)^n}{n^\alpha}$ n'a pas de limite quand $n \to +\infty$. Dans ce cas, la série $\sum u_n$ diverge grossièrement.
- si $\alpha > 0$, $|u_n| \underset{n\to+\infty}{\sim} \dfrac{1}{n^\alpha}$ donc $\sum u_n$ converge absolument si et seulement si $\alpha > 1$ (théorème de comparaison de séries à termes positifs).
- Si $\alpha \in]0\,;1]$, on effectue un développement limité :

$$u_n = \ln\left(1 + \frac{(-1)^n}{n^\alpha} + O\left(\frac{1}{n^{3\alpha}}\right)\right) = \underbrace{\frac{(-1)^n}{n^\alpha}}_{v_n} \underbrace{- \frac{1}{2n^{2\alpha}} + o\left(\frac{1}{n^{2\alpha}}\right)}_{w_n}$$

Exercice 4

Étudier la série de terme général $u_n = \ln\left(1 + \sin\dfrac{(-1)^n}{n^\alpha}\right)$ pour $\alpha \in \mathbb{R}$.

Solution

- Si $\alpha \leqslant 0$, la suite $\sin\dfrac{(-1)^n}{n^\alpha}$ n'a pas de limite quand $n \to +\infty$. Dans ce cas, la série $\sum u_n$ diverge grossièrement.
- si $\alpha > 0$, $|u_n| \underset{n\to+\infty}{\sim} \dfrac{1}{n^\alpha}$ donc $\sum u_n$ converge absolument si et seulement si $\alpha > 1$ (théorème de comparaison de séries à termes positifs).
- Si $\alpha \in \left]0\,;1\right]$, on effectue un développement limité :

$$u_n = \ln\left(1 + \frac{(-1)^n}{n^\alpha} + O\left(\frac{1}{n^{3\alpha}}\right)\right) = \underbrace{\frac{(-1)^n}{n^\alpha}}_{v_n} \underbrace{- \frac{1}{2n^{2\alpha}} + o\left(\frac{1}{n^{2\alpha}}\right)}_{w_n}$$

La série de terme général v_n est une série de Riemann alternée qui vérifie le CSSA, elle converge.

Exercice 4

Étudier la série de terme général $u_n = \ln\left(1 + \sin\dfrac{(-1)^n}{n^\alpha}\right)$ pour $\alpha \in \mathbb{R}$.

Solution

- Si $\alpha \leqslant 0$, la suite $\sin\dfrac{(-1)^n}{n^\alpha}$ n'a pas de limite quand $n \to +\infty$. Dans ce cas, la série $\sum u_n$ diverge grossièrement.
- si $\alpha > 0$, $|u_n| \underset{n\to+\infty}{\sim} \dfrac{1}{n^\alpha}$ donc $\sum u_n$ converge absolument si et seulement si $\alpha > 1$ (théorème de comparaison de séries à termes positifs).
- Si $\alpha \in \,]0\,;1]$, on effectue un développement limité :

$$u_n = \ln\left(1 + \frac{(-1)^n}{n^\alpha} + O\left(\frac{1}{n^{3\alpha}}\right)\right) = \underbrace{\frac{(-1)^n}{n^\alpha}}_{v_n} \underbrace{- \frac{1}{2n^{2\alpha}} + o\left(\frac{1}{n^{2\alpha}}\right)}_{w_n}$$

La série de terme général v_n est une série de Riemann alternée qui vérifie le CSSA, elle converge.

$w_n \underset{n\to+\infty}{\sim} \dfrac{1}{2n^{2\alpha}}$ donc par le critère de comparaison des séries à termes positifs (comparaison à une série de Riemann) , la série de terme général w_n converge si et seulement si $\alpha > \dfrac{1}{2}$.

Exercice 4

Étudier la série de terme général $u_n = \ln\left(1 + \sin\dfrac{(-1)^n}{n^\alpha}\right)$ pour $\alpha \in \mathbb{R}$.

Solution

- Si $\alpha \leqslant 0$, la suite $\sin\dfrac{(-1)^n}{n^\alpha}$ n'a pas de limite quand $n \to +\infty$. Dans ce cas, la série $\sum u_n$ diverge grossièrement.
- si $\alpha > 0$, $|u_n| \underset{n\to+\infty}{\sim} \dfrac{1}{n^\alpha}$ donc $\sum u_n$ converge absolument si et seulement si $\alpha > 1$ (théorème de comparaison de séries à termes positifs).
- Si $\alpha \in \,]0\,;1]$, on effectue un développement limité :

$$u_n = \ln\left(1 + \frac{(-1)^n}{n^\alpha} + O\left(\frac{1}{n^{3\alpha}}\right)\right) = \underbrace{\frac{(-1)^n}{n^\alpha}}_{v_n} \underbrace{- \frac{1}{2n^{2\alpha}} + o\left(\frac{1}{n^{2\alpha}}\right)}_{w_n}$$

La série de terme général v_n est une série de Riemann alternée qui vérifie le CSSA, elle converge.

$w_n \underset{n\to+\infty}{\sim} \dfrac{1}{2n^{2\alpha}}$ donc par le critère de comparaison des séries à termes positifs (comparaison à une série de Riemann) , la série de terme général w_n converge si et seulement si $\alpha > \dfrac{1}{2}$.

Conclusion : par le théorème d'opération sur les séries, la série $\sum u_n$ converge si et seulement si $\alpha > \dfrac{1}{2}$.

Exercice 5

Étude de la série de terme général $u_n = \sin\left(\pi n! \mathrm{e}\right)$.

Exercice 5

Étude de la série de terme général $u_n = \sin\left(\pi n! \mathrm{e}\right)$.

Solution

Cet exercice repose sur une grosse astuce !

Exercice 5

Étude de la série de terme général $u_n = \sin\left(\pi n! \mathrm{e}\right)$.

Solution

Cet exercice repose sur une grosse astuce !

On écrit l'inégalité de Taylor-Lagrange pour la fonction $x \mapsto \mathrm{e}^x$ entre 0 et 1, à l'ordre $n+1$:

$$\mathrm{e} = 1 + \frac{1}{1!} + \frac{1}{2!} + \cdots + \frac{1}{n!} + \frac{1}{(n+1)!} + r_n \quad \text{avec } |r_n| \leqslant \frac{\mathrm{e}}{(n+2)!}.$$

Exercice 5

Étude de la série de terme général $u_n = \sin\left(\pi n! \mathrm{e}\right)$.

Solution

Cet exercice repose sur une grosse astuce !

On écrit l'inégalité de Taylor-Lagrange pour la fonction $x \mapsto \mathrm{e}^x$ entre 0 et 1, à l'ordre $n+1$:

$$\mathrm{e} = 1 + \frac{1}{1!} + \frac{1}{2!} + \cdots + \frac{1}{n!} + \frac{1}{(n+1)!} + r_n \quad \text{avec } |r_n| \leqslant \frac{\mathrm{e}}{(n+2)!}.$$

Donc $\pi \mathrm{e} n! = \pi \times \underbrace{n!\left(1 + \frac{1}{1!} + \frac{1}{2!} + \cdots + \frac{1}{(n-3)!} + \frac{1}{(n-2)!}\right)}_{\text{entier pair !}} + \underbrace{\pi n!\left(\frac{1}{(n-1)!} + \frac{1}{n!}\right)}_{=\pi(n+1)} + \frac{\pi}{n+1} + r_n'$

avec $|r_n'| \leqslant \dfrac{\pi \mathrm{e}}{n^2}$, d'où

Exercice 5

Étude de la série de terme général $u_n = \sin\left(\pi n! \mathrm{e}\right)$.

Solution

Cet exercice repose sur une grosse astuce !

On écrit l'inégalité de Taylor-Lagrange pour la fonction $x \mapsto \mathrm{e}^x$ entre 0 et 1, à l'ordre $n+1$:

$$\mathrm{e} = 1 + \frac{1}{1!} + \frac{1}{2!} + \cdots + \frac{1}{n!} + \frac{1}{(n+1)!} + r_n \quad \text{avec } |r_n| \leqslant \frac{\mathrm{e}}{(n+2)!}.$$

Donc $\pi \mathrm{e} n! = \pi \times \underbrace{n! \left(1 + \frac{1}{1!} + \frac{1}{2!} + \cdots + \frac{1}{(n-3)!} + \frac{1}{(n-2)!}\right)}_{\text{entier pair !}} + \underbrace{\pi n! \left(\frac{1}{(n-1)!} + \frac{1}{n!}\right)}_{=\pi(n+1)} + \frac{\pi}{n+1} + r'_n$

avec $|r'_n| \leqslant \dfrac{\pi \mathrm{e}}{n^2}$, d'où

$$\begin{aligned} u_n &= \sin\left(2k\pi + (n+1)\pi + \frac{\pi}{n+1} + r'_n\right) = (-1)^{n+1} \sin\left(\frac{\pi}{n+1} + O\left(\frac{1}{n^2}\right)\right) \\ &= \frac{(-1)^{n+1}\pi}{n+1} + O\left(\frac{1}{n^2}\right). \end{aligned}$$

Exercice 5

Étude de la série de terme général $u_n = \sin\left(\pi n! \mathrm{e}\right)$.

Solution

Cet exercice repose sur une grosse astuce !

On écrit l'inégalité de Taylor-Lagrange pour la fonction $x \mapsto \mathrm{e}^x$ entre 0 et 1, à l'ordre $n+1$:

$$\mathrm{e} = 1 + \frac{1}{1!} + \frac{1}{2!} + \cdots + \frac{1}{n!} + \frac{1}{(n+1)!} + r_n \quad \text{avec } |r_n| \leqslant \frac{\mathrm{e}}{(n+2)!}.$$

Donc $\pi \mathrm{e} n! = \pi \times \underbrace{n!\left(1 + \frac{1}{1!} + \frac{1}{2!} + \cdots + \frac{1}{(n-3)!} + \frac{1}{(n-2)!}\right)}_{\text{entier pair !}} + \underbrace{\pi n!\left(\frac{1}{(n-1)!} + \frac{1}{n!}\right)}_{=\pi(n+1)} + \frac{\pi}{n+1} + r'_n$

avec $|r'_n| \leqslant \dfrac{\pi \mathrm{e}}{n^2}$, d'où

$$\begin{aligned} u_n &= \sin\left(2k\pi + (n+1)\pi + \frac{\pi}{n+1} + r'_n\right) = (-1)^{n+1} \sin\left(\frac{\pi}{n+1} + O\left(\frac{1}{n^2}\right)\right) \\ &= \frac{(-1)^{n+1}\pi}{n+1} + O\left(\frac{1}{n^2}\right). \end{aligned}$$

Il en résulte que $\sum u_n$ est la somme d'une série semi-convergente et d'une série absolument convergente, donc est convergente.

PRODUIT DE CAUCHY

Définition 7

Soit $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ et $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ deux suites à valeurs complexes.
On appelle <u>série produit de Cauchy</u> des séries de terme général u_n et v_n la série de terme général w_n avec :

$$\forall\, n \in \mathbb{N},\ \ w_n = \sum_{k=0}^{n} u_k v_{n-k} = \sum_{\substack{p+q=n\\ p,q\in\mathbb{N}}} u_p v_q\,.$$

Définition 7

Soit $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ et $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ deux suites à valeurs complexes.
On appelle série produit de Cauchy des séries de terme général u_n et v_n la série de terme général w_n avec :

$$\forall\, n \in \mathbb{N},\ \ w_n = \sum_{k=0}^{n} u_k v_{n-k} = \sum_{\substack{p+q=n \\ p,q\in\mathbb{N}}} u_p v_q\,.$$

Théorème 13

Si les séries $\sum\limits_{n\in\mathbb{N}} u_n$ et $\sum\limits_{n\in\mathbb{N}} v_n$ sont **absolument** convergentes, alors $\sum\limits_{n\in\mathbb{N}} w_n$ est absolument convergente, et de plus :

$$\sum_{n=0}^{+\infty} w_n = \left(\sum_{n=0}^{+\infty} u_n\right)\left(\sum_{n=0}^{+\infty} v_n\right).$$

Démonstration

- **1er cas :** On commence par traiter le cas où $\sum u_n$ et $\sum v_n$ sont deux séries de **nombres réels positifs**.

Démonstration

- **1er cas :** On commence par traiter le cas où $\sum u_n$ et $\sum v_n$ sont deux séries de **nombres réels positifs**.

  Notons, pour tout $n \in \mathbb{N}$:

  $$U_n = \sum_{k=0}^{n} u_k,\ V_n = \sum_{k=0}^{n} v_k \text{ et } W_n = \sum_{k=0}^{n} w_k$$

Démonstration

- **1er cas :** On commence par traiter le cas où $\sum u_n$ et $\sum v_n$ sont deux séries de **nombres réels positifs**.

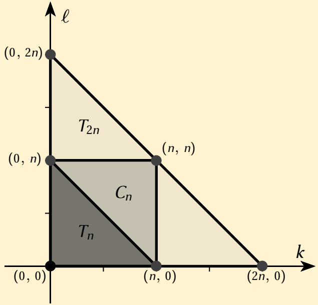
Notons, pour tout $n \in \mathbb{N}$:

$$U_n = \sum_{k=0}^{n} u_k,\ V_n = \sum_{k=0}^{n} v_k \text{ et } W_n = \sum_{k=0}^{n} w_k$$

et considérons les ensembles d'indices (k, ℓ) représentés ci-contre :

$$T_n = \{(k, \ell) \in [\![0\,;n]\!]^2,\ k + \ell \leqslant n\}$$
$$C_n = [\![0\,;n]\!]^2$$

Ainsi : $W_n = \sum_{i=0}^{n} w_i = \sum_{i=0}^{n} \sum_{k+\ell=i} u_k v_\ell = \sum_{(k,\ell)\in T_n} u_k v_\ell.$



Démonstration

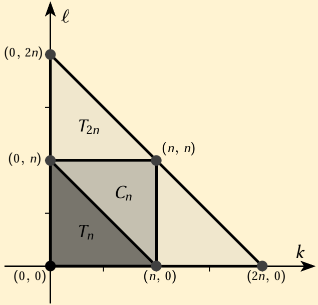
- **1er cas :** On commence par traiter le cas où $\sum u_n$ et $\sum v_n$ sont deux séries de **nombres réels positifs**.

Notons, pour tout $n \in \mathbb{N}$:

$$U_n = \sum_{k=0}^{n} u_k,\ V_n = \sum_{k=0}^{n} v_k \text{ et } W_n = \sum_{k=0}^{n} w_k$$

et considérons les ensembles d'indices (k, ℓ) représentés ci-contre :

$$T_n = \{(k, \ell) \in [\![0\,;n]\!]^2,\ k+\ell \leqslant n\}$$
$$C_n = [\![0\,;n]\!]^2$$



Ainsi : $W_n = \sum_{i=0}^{n} w_i = \sum_{i=0}^{n} \sum_{k+\ell=i} u_k v_\ell = \sum_{(k,\ell)\in T_n} u_k v_\ell$.

Les séries étant à termes positifs, on a : $\sum_{(k,\ell)\in T_n} u_k v_\ell \leqslant \sum_{(k,\ell)\in C_n} u_k v_\ell \leqslant \sum_{(k,\ell)\in T_{2n}} u_k v_\ell$,

c'est-à-dire $W_n \leqslant U_n V_n \leqslant W_{2n}$.

Démonstration

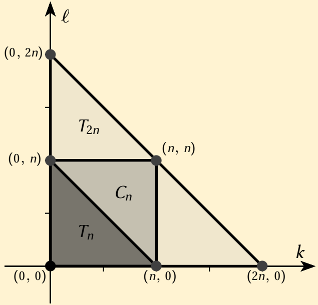
- **1er cas :** On commence par traiter le cas où $\sum u_n$ et $\sum v_n$ sont deux séries de **nombres réels positifs**.

Notons, pour tout $n \in \mathbb{N}$:

$$U_n = \sum_{k=0}^{n} u_k,\ V_n = \sum_{k=0}^{n} v_k \text{ et } W_n = \sum_{k=0}^{n} w_k$$

et considérons les ensembles d'indices (k, ℓ) représentés ci-contre :

$$T_n = \{(k,\ell) \in [\![0\,;n]\!]^2,\ k+\ell \leqslant n\}$$
$$C_n = [\![0\,;n]\!]^2$$



Ainsi : $W_n = \sum_{i=0}^{n} w_i = \sum_{i=0}^{n} \sum_{k+\ell=i} u_k v_\ell = \sum_{(k,\ell)\in T_n} u_k v_\ell$.

Les séries étant à termes positifs, on a : $\sum_{(k,\ell)\in T_n} u_k v_\ell \leqslant \sum_{(k,\ell)\in C_n} u_k v_\ell \leqslant \sum_{(k,\ell)\in T_{2n}} u_k v_\ell$,

c'est-à-dire $W_n \leqslant U_n V_n \leqslant W_{2n}$.

Notons $U = \sum_{n=0}^{+\infty} u_n$ et $V = \sum_{n=0}^{+\infty} v_n$. La première de ces inégalités implique (les séries étant à termes positifs) $W_n \leqslant UV$.

Démonstration

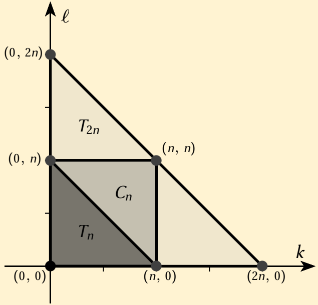
- **1er cas :** On commence par traiter le cas où $\sum u_n$ et $\sum v_n$ sont deux séries de **nombres réels positifs**.

Notons, pour tout $n \in \mathbb{N}$:

$$U_n = \sum_{k=0}^{n} u_k,\ V_n = \sum_{k=0}^{n} v_k \text{ et } W_n = \sum_{k=0}^{n} w_k$$

et considérons les ensembles d'indices (k, ℓ) représentés ci-contre :

$$T_n = \{(k, \ell) \in [\![0\,;n]\!]^2,\ k + \ell \leqslant n\}$$
$$C_n = [\![0\,;n]\!]^2$$



Ainsi : $W_n = \sum_{i=0}^{n} w_i = \sum_{i=0}^{n} \sum_{k+\ell=i} u_k v_\ell = \sum_{(k,\ell)\in T_n} u_k v_\ell$.

Les séries étant à termes positifs, on a : $\sum_{(k,\ell)\in T_n} u_k v_\ell \leqslant \sum_{(k,\ell)\in C_n} u_k v_\ell \leqslant \sum_{(k,\ell)\in T_{2n}} u_k v_\ell$,

c'est-à-dire $W_n \leqslant U_n V_n \leqslant W_{2n}$.

Notons $U = \sum_{n=0}^{+\infty} u_n$ et $V = \sum_{n=0}^{+\infty} v_n$. La première de ces inégalités implique (les séries étant à termes positifs) $W_n \leqslant UV$. Ainsi, les sommes partielles de la série (à termes positifs) $\sum w_n$ sont majorées ; cette série converge donc, et, si l'on note $W = \sum_{n=0}^{+\infty} w_n$, on aura $W \leqslant UV$.

Démonstration

- **1er cas :** On commence par traiter le cas où $\sum u_n$ et $\sum v_n$ sont deux séries de **nombres réels positifs**.

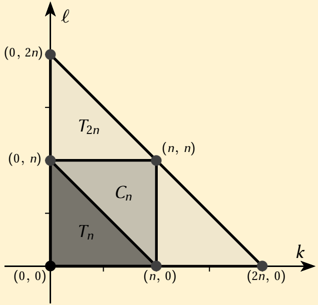
Notons, pour tout $n \in \mathbb{N}$:

$$U_n = \sum_{k=0}^{n} u_k,\ V_n = \sum_{k=0}^{n} v_k \text{ et } W_n = \sum_{k=0}^{n} w_k$$

et considérons les ensembles d'indices (k, ℓ) représentés ci-contre :

$$T_n = \{(k,\ell) \in [\![0\,;n]\!]^2,\ k+\ell \leqslant n\}$$

$$C_n = [\![0\,;n]\!]^2$$



Ainsi : $W_n = \sum_{i=0}^{n} w_i = \sum_{i=0}^{n} \sum_{k+\ell=i} u_k v_\ell = \sum_{(k,\ell)\in T_n} u_k v_\ell$.

Les séries étant à termes positifs, on a : $\sum_{(k,\ell)\in T_n} u_k v_\ell \leqslant \sum_{(k,\ell)\in C_n} u_k v_\ell \leqslant \sum_{(k,\ell)\in T_{2n}} u_k v_\ell$,

c'est-à-dire $W_n \leqslant U_n V_n \leqslant W_{2n}$.

Notons $U = \sum_{n=0}^{+\infty} u_n$ et $V = \sum_{n=0}^{+\infty} v_n$. La première de ces inégalités implique (les séries étant à termes positifs) $W_n \leqslant UV$. Ainsi, les sommes partielles de la série (à termes positifs) $\sum w_n$ sont majorées ; cette série converge donc, et, si l'on note $W = \sum_{n=0}^{+\infty} w_n$, on aura $W \leqslant UV$.

La deuxième inégalité implique alors, par passage à la limite, $UV \leqslant W$, et finalement : $W = UV$.

Démonstration (suite)

- **Cas général**
  On suppose ici que $\sum u_n$ et $\sum v_n$ sont deux séries absolument convergentes de nombres complexes.

Démonstration (suite)

- **Cas général**

  On suppose ici que $\sum u_n$ et $\sum v_n$ sont deux séries absolument convergentes de nombres complexes.

  On conserve les notations précédentes, et on note aussi $u'_n = |u_n|$, $v'_n = |v_n|$ et w'_n le terme général de la série produit de Cauchy des séries $\sum u'_n$ et $\sum v'_n$.

Démonstration (suite)

- **Cas général**

  On suppose ici que $\sum u_n$ et $\sum v_n$ sont deux séries absolument convergentes de nombres complexes.

  On conserve les notations précédentes, et on note aussi $u'_n = |u_n|$, $v'_n = |v_n|$ et w'_n le terme général de la série produit de Cauchy des séries $\sum u'_n$ et $\sum v'_n$.

  D'après le cas précédent, $\sum w'_n$ converge.

Démonstration (suite)

- **Cas général**

  On suppose ici que $\sum u_n$ et $\sum v_n$ sont deux séries absolument convergentes de nombres complexes.

  On conserve les notations précédentes, et on note aussi $u'_n = |u_n|$, $v'_n = |v_n|$ et w'_n le terme général de la série produit de Cauchy des séries $\sum u'_n$ et $\sum v'_n$.

  D'après le cas précédent, $\sum w'_n$ converge.

  On a aussi :

$$|w_n| = \left|\sum_{k=0}^{n} u_k v_{n-k}\right| \leqslant \sum_{k=0}^{n} |u_k v_{n-k}| = \sum_{k=0}^{n} u'_k v'_{n-k} = w'_n$$

Démonstration (suite)

- **Cas général**

  On suppose ici que $\sum u_n$ et $\sum v_n$ sont deux séries absolument convergentes de nombres complexes.

  On conserve les notations précédentes, et on note aussi $u'_n = |u_n|$, $v'_n = |v_n|$ et w'_n le terme général de la série produit de Cauchy des séries $\sum u'_n$ et $\sum v'_n$.

  D'après le cas précédent, $\sum w'_n$ converge.

  On a aussi :
  $$|w_n| = \left|\sum_{k=0}^{n} u_k v_{n-k}\right| \leqslant \sum_{k=0}^{n} |u_k v_{n-k}| = \sum_{k=0}^{n} u'_k v'_{n-k} = w'_n$$
  donc, d'après les règles de comparaison de séries à termes positifs, la série $\sum w_n$ est absolument convergente, donc convergente.

Démonstration (suite)

- **Cas général**

  On suppose ici que $\sum u_n$ et $\sum v_n$ sont deux séries absolument convergentes de nombres complexes.

  On conserve les notations précédentes, et on note aussi $u'_n = |u_n|$, $v'_n = |v_n|$ et w'_n le terme général de la série produit de Cauchy des séries $\sum u'_n$ et $\sum v'_n$.

  D'après le cas précédent, $\sum w'_n$ converge.

  On a aussi :
$$|w_n| = \left|\sum_{k=0}^{n} u_k v_{n-k}\right| \leqslant \sum_{k=0}^{n} |u_k v_{n-k}| = \sum_{k=0}^{n} u'_k v'_{n-k} = w'_n$$
  donc, d'après les règles de comparaison de séries à termes positifs, la série $\sum w_n$ est absolument convergente, donc convergente.

  Enfin, on a : $U_n V_n - W_n = \sum\limits_{(k,\ell)\in C_n \setminus T_n} u_k v_{n-k}$ donc

Démonstration (suite)

- **Cas général**

  On suppose ici que $\sum u_n$ et $\sum v_n$ sont deux séries absolument convergentes de nombres complexes.

  On conserve les notations précédentes, et on note aussi $u'_n = |u_n|$, $v'_n = |v_n|$ et w'_n le terme général de la série produit de Cauchy des séries $\sum u'_n$ et $\sum v'_n$.

  D'après le cas précédent, $\sum w'_n$ converge.

  On a aussi :

$$|w_n| = \left|\sum_{k=0}^{n} u_k v_{n-k}\right| \leqslant \sum_{k=0}^{n} |u_k v_{n-k}| = \sum_{k=0}^{n} u'_k v'_{n-k} = w'_n$$

  donc, d'après les règles de comparaison de séries à termes positifs, la série $\sum w_n$ est absolument convergente, donc convergente.

  Enfin, on a : $U_n V_n - W_n = \sum_{(k,\ell)\in C_n \setminus T_n} u_k v_{n-k}$ donc

$$|U_n V_n - W_n| \leqslant \sum_{(k,\ell)\in C_n \setminus T_n} |u_k|\,|v_{n-k}| = U'_n V'_n - W'_n\,.$$

Démonstration (suite)

- **Cas général**

  On suppose ici que $\sum u_n$ et $\sum v_n$ sont deux séries absolument convergentes de nombres complexes.

  On conserve les notations précédentes, et on note aussi $u'_n = |u_n|$, $v'_n = |v_n|$ et w'_n le terme général de la série produit de Cauchy des séries $\sum u'_n$ et $\sum v'_n$.

  D'après le cas précédent, $\sum w'_n$ converge.

  On a aussi :

$$|w_n| = \left|\sum_{k=0}^{n} u_k v_{n-k}\right| \leqslant \sum_{k=0}^{n} |u_k v_{n-k}| = \sum_{k=0}^{n} u'_k v'_{n-k} = w'_n$$

  donc, d'après les règles de comparaison de séries à termes positifs, la série $\sum w_n$ est absolument convergente, donc convergente.

  Enfin, on a : $U_n V_n - W_n = \sum_{(k,\ell)\in C_n \setminus T_n} u_k v_{n-k}$ donc

$$|U_n V_n - W_n| \leqslant \sum_{(k,\ell)\in C_n \setminus T_n} |u_k|\,|v_{n-k}| = U'_n V'_n - W'_n\,.$$

  Or on sait (cas précédent) que $\lim_{n\to\infty} U'_n V'_n - W'_n = 0$; on en déduit $\lim_{n\to\infty} U_n V_n - W_n = 0$, soit $W = UV$.

Application à l'exponentielle complexe

Proposition 2: Des développements en série à connaître

Pour tout $x \in \mathbb{R}$ on a :

$$e^x = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{x^n}{n!} \quad ; \quad \sin x = \sum_{n=0}^{+\infty} (-1)^n \frac{x^{2n+1}}{(2n+1)!} \quad ; \quad \cos x = \sum_{n=0}^{+\infty} (-1)^n \frac{x^{2n}}{(2n)!}.$$

Application à l'exponentielle complexe

Proposition 2: Des développements en série à connaître
Pour tout $x \in \mathbb{R}$ on a :

$$e^x = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{x^n}{n!} \quad ; \quad \sin x = \sum_{n=0}^{+\infty} (-1)^n \frac{x^{2n+1}}{(2n+1)!} \quad ; \quad \cos x = \sum_{n=0}^{+\infty} (-1)^n \frac{x^{2n}}{(2n)!}.$$

Démonstration

On ne démontrera ici que la première de ces relations, la méthode étant la même pour les autres.

Application à l'exponentielle complexe

Proposition 2: Des développements en série à connaître

Pour tout $x \in \mathbb{R}$ on a :

$$e^x = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{x^n}{n!} \quad ; \quad \sin x = \sum_{n=0}^{+\infty} (-1)^n \frac{x^{2n+1}}{(2n+1)!} \quad ; \quad \cos x = \sum_{n=0}^{+\infty} (-1)^n \frac{x^{2n}}{(2n)!}.$$

Démonstration

On ne démontrera ici que la première de ces relations, la méthode étant la même pour les autres.

On sait que la fonction exponentielle est $\mathscr{C}^\infty$ sur $\mathbb{R}$. L'inégalité de Taylor-Lagrange appliquée à $f : t \mapsto e^t$ entre 0 et x s'écrit :

Application à l'exponentielle complexe

Proposition 2: Des développements en série à connaître

Pour tout $x \in \mathbb{R}$ on a :

$$e^x = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{x^n}{n!} \quad ; \quad \sin x = \sum_{n=0}^{+\infty} (-1)^n \frac{x^{2n+1}}{(2n+1)!} \quad ; \quad \cos x = \sum_{n=0}^{+\infty} (-1)^n \frac{x^{2n}}{(2n)!}.$$

Démonstration

On ne démontrera ici que la première de ces relations, la méthode étant la même pour les autres.

On sait que la fonction exponentielle est $\mathscr{C}^\infty$ sur $\mathbb{R}$. L'inégalité de Taylor-Lagrange appliquée à $f : t \mapsto e^t$ entre 0 et x s'écrit :

$$\forall n \in \mathbb{N},\ \forall x \in \mathbb{R}, \quad \left| f(x) - \sum_{k=0}^{n} \frac{x^k}{k!} f^{(k)}(0) \right| \leqslant \frac{|x|^{n+1}}{(n+1)!} \sup_{t \in [0,x]} \left| f^{(n+1)}(t) \right|$$

soit :

Application à l'exponentielle complexe

Proposition 2: Des développements en série à connaître

Pour tout $x \in \mathbb{R}$ on a :

$$e^x = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{x^n}{n!} \quad ; \quad \sin x = \sum_{n=0}^{+\infty} (-1)^n \frac{x^{2n+1}}{(2n+1)!} \quad ; \quad \cos x = \sum_{n=0}^{+\infty} (-1)^n \frac{x^{2n}}{(2n)!}.$$

Démonstration

On ne démontrera ici que la première de ces relations, la méthode étant la même pour les autres.

On sait que la fonction exponentielle est $\mathscr{C}^\infty$ sur $\mathbb{R}$. L'inégalité de Taylor-Lagrange appliquée à $f : t \mapsto e^t$ entre 0 et x s'écrit :

$$\forall\, n \in \mathbb{N},\ \forall\, x \in \mathbb{R}, \quad \left| f(x) - \sum_{k=0}^{n} \frac{x^k}{k!} f^{(k)}(0) \right| \leqslant \frac{|x|^{n+1}}{(n+1)!} \sup_{t \in [0,x]} \left| f^{(n+1)}(t) \right|$$

soit :

$$\forall\, n \in \mathbb{N},\ \forall\, x \in \mathbb{R}, \quad \left| e^x - \sum_{k=0}^{n} \frac{x^k}{k!} \right| \leqslant \frac{|x|^{n+1}}{(n+1)!} \sup_{t \in [0,x]} \left| e^t \right|.$$

Application à l'exponentielle complexe

Proposition 2: Des développements en série à connaître

Pour tout $x \in \mathbb{R}$ on a :

$$e^x = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{x^n}{n!} \quad ; \quad \sin x = \sum_{n=0}^{+\infty} (-1)^n \frac{x^{2n+1}}{(2n+1)!} \quad ; \quad \cos x = \sum_{n=0}^{+\infty} (-1)^n \frac{x^{2n}}{(2n)!} .$$

Démonstration

On ne démontrera ici que la première de ces relations, la méthode étant la même pour les autres.

On sait que la fonction exponentielle est $\mathscr{C}^\infty$ sur $\mathbb{R}$. L'inégalité de Taylor-Lagrange appliquée à $f : t \mapsto e^t$ entre 0 et x s'écrit :

$$\forall n \in \mathbb{N},\ \forall x \in \mathbb{R}, \quad \left| f(x) - \sum_{k=0}^{n} \frac{x^k}{k!} f^{(k)}(0) \right| \leqslant \frac{|x|^{n+1}}{(n+1)!} \sup_{t \in [0,x]} \left| f^{(n+1)}(t) \right|$$

soit :

$$\forall n \in \mathbb{N},\ \forall x \in \mathbb{R}, \quad \left| e^x - \sum_{k=0}^{n} \frac{x^k}{k!} \right| \leqslant \frac{|x|^{n+1}}{(n+1)!} \sup_{t \in [0,x]} \left| e^t \right|.$$

Or, x étant fixé, $\lim\limits_{n \to \infty} \left(\frac{|x|^{n+1}}{(n+1)!} \right) = 0$ (comparaison des suites usuelles), donc :

Application à l'exponentielle complexe

Proposition 2: Des développements en série à connaître
Pour tout $x \in \mathbb{R}$ on a :

$$e^x = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{x^n}{n!} \quad ; \quad \sin x = \sum_{n=0}^{+\infty} (-1)^n \frac{x^{2n+1}}{(2n+1)!} \quad ; \quad \cos x = \sum_{n=0}^{+\infty} (-1)^n \frac{x^{2n}}{(2n)!}.$$

Démonstration

On ne démontrera ici que la première de ces relations, la méthode étant la même pour les autres.

On sait que la fonction exponentielle est $\mathscr{C}^\infty$ sur $\mathbb{R}$. L'inégalité de Taylor-Lagrange appliquée à $f : t \mapsto e^t$ entre 0 et x s'écrit :

$$\forall n \in \mathbb{N},\ \forall x \in \mathbb{R}, \quad \left| f(x) - \sum_{k=0}^{n} \frac{x^k}{k!} f^{(k)}(0) \right| \leqslant \frac{|x|^{n+1}}{(n+1)!} \sup_{t \in [0,x]} \left| f^{(n+1)}(t) \right|$$

soit :

$$\forall n \in \mathbb{N},\ \forall x \in \mathbb{R}, \quad \left| e^x - \sum_{k=0}^{n} \frac{x^k}{k!} \right| \leqslant \frac{|x|^{n+1}}{(n+1)!} \sup_{t \in [0,x]} \left| e^t \right|.$$

Or, x étant fixé, $\lim\limits_{n \to \infty} \left(\dfrac{|x|^{n+1}}{(n+1)!} \right) = 0$ (comparaison des suites usuelles), donc :

$$\lim_{n \to \infty} \left(\sum_{k=0}^{n} \frac{x^k}{k!} \right) = e^x.$$

Pour tout $z \in \mathbb{C}$, on a défini : $\mathrm{e}^z = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{z^n}{n!}$ (cette série est absolument convergente d'après la règle de d'Alembert, donc convergente).

La proposition précédente montre que la fonction ainsi définie coïncide sur $\mathbb{R}$ avec la fonction exponentielle « usuelle » (heureusement !).

Pour tout $z \in \mathbb{C}$, on a défini : $\mathrm{e}^z = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{z^n}{n!}$ (cette série est absolument convergente d'après la règle de d'Alembert, donc convergente).

La proposition précédente montre que la fonction ainsi définie coïncide sur $\mathbb{R}$ avec la fonction exponentielle « usuelle » (heureusement !).

Proposition 3

Pour tous $(z, z') \in \mathbb{C}^2$ on a : $\mathrm{e}^{z+z'} = \mathrm{e}^z \cdot \mathrm{e}^{z'}$.

Pour tout $z \in \mathbb{C}$, on a défini : $\mathrm{e}^z = \displaystyle\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{z^n}{n!}$ (cette série est absolument convergente d'après la règle de d'Alembert, donc convergente).

La proposition précédente montre que la fonction ainsi définie coïncide sur $\mathbb{R}$ avec la fonction exponentielle « usuelle » (heureusement !).

Proposition 3

Pour tous $(z, z') \in \mathbb{C}^2$ on a : $\mathrm{e}^{z+z'} = \mathrm{e}^z \cdot \mathrm{e}^{z'}$.

Démonstration

$$\mathrm{e}^z = \sum_{n=0}^{+\infty} \underbrace{\frac{z^n}{n!}}_{u_n} \text{ et } \mathrm{e}^{z'} = \sum_{n=0}^{+\infty} \underbrace{\frac{z'^n}{n!}}_{v_n} \cdot$$

Pour tout $z \in \mathbb{C}$, on a défini : $\mathrm{e}^z = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{z^n}{n!}$ (cette série est absolument convergente d'après la règle de d'Alembert, donc convergente).

La proposition précédente montre que la fonction ainsi définie coïncide sur $\mathbb{R}$ avec la fonction exponentielle « usuelle » (heureusement !).

Proposition 3

Pour tous $(z, z') \in \mathbb{C}^2$ on a : $\mathrm{e}^{z+z'} = \mathrm{e}^z \cdot \mathrm{e}^{z'}$.

Démonstration

$$\mathrm{e}^z = \sum_{n=0}^{+\infty} \underbrace{\frac{z^n}{n!}}_{u_n} \text{ et } \mathrm{e}^{z'} = \sum_{n=0}^{+\infty} \underbrace{\frac{z'^n}{n!}}_{v_n} .$$

Le produit de Cauchy des séries $\sum u_n$ et $\sum v_n$ est la série de terme général w_n avec :

Pour tout $z \in \mathbb{C}$, on a défini : $e^z = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{z^n}{n!}$ (cette série est absolument convergente d'après la règle de d'Alembert, donc convergente).

La proposition précédente montre que la fonction ainsi définie coïncide sur $\mathbb{R}$ avec la fonction exponentielle « usuelle » (heureusement !).

Proposition 3

Pour tous $(z, z') \in \mathbb{C}^2$ on a : $e^{z+z'} = e^z \cdot e^{z'}$.

Démonstration

$$e^z = \sum_{n=0}^{+\infty} \underbrace{\frac{z^n}{n!}}_{u_n} \text{ et } e^{z'} = \sum_{n=0}^{+\infty} \underbrace{\frac{z'^n}{n!}}_{v_n}.$$

Le produit de Cauchy des séries $\sum u_n$ et $\sum v_n$ est la série de terme général w_n avec :

$$w_n = \sum_{k=0}^{n} u_k v_{n-k} = \sum_{k=0}^{n} \frac{z^k z'^{n-k}}{k!(n-k)!} = \frac{1}{n!} \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} z^k z'^{n-k} = \frac{(z+z')^n}{n!}$$

d'où le résultat en appliquant simplement le théorème précédent, les deux séries étant absolument convergentes.

Corollaire:

Pour tout $z \in \mathbb{C}$, $e^z \neq 0$ et $\dfrac{1}{e^z} = e^{-z}$.

Corollaire:

Pour tout $z \in \mathbb{C}$, $e^z \neq 0$ et $\dfrac{1}{e^z} = e^{-z}$.

Démonstration

Il suffit de prendre $z' = -z$ dans la proposition précédente : $e^z \cdot e^{-z} = e^0 = 1$.

Corollaire:

Pour tout $z \in \mathbb{C}$, $\mathrm{e}^z \neq 0$ et $\dfrac{1}{\mathrm{e}^z} = \mathrm{e}^{-z}$.

Proposition 4

Pour tout $\theta \in \mathbb{R}$, $\mathrm{e}^{\mathrm{i}\theta} = \cos\theta + \mathrm{i}\sin\theta$.

Corollaire:

> Pour tout $z \in \mathbb{C}$, $e^z \neq 0$ et $\dfrac{1}{e^z} = e^{-z}$.

Proposition 4

Pour tout $\theta \in \mathbb{R}$, $e^{i\theta} = \cos\theta + i\sin\theta$.

Démonstration

Il suffit de considérer les séries parties réelle et imaginaire de la série $\sum \dfrac{z^n}{n!}$ lorsque $z = i\theta$, puis utiliser la proposition 2.

Corollaire:

Pour tout $z \in \mathbb{C}$, $e^z \neq 0$ et $\dfrac{1}{e^z} = e^{-z}$.

Proposition 4

Pour tout $\theta \in \mathbb{R}$, $e^{i\theta} = \cos\theta + i\sin\theta$.

Corollaire:

Si $z = x + iy$ avec x, y réels, on a : $e^z = e^{x+iy} = e^x \cdot e^{iy} = e^x(\cos y + i\sin y)$.

Corollaire:

> Pour tout $z \in \mathbb{C}$, $\mathrm{e}^z \neq 0$ et $\dfrac{1}{\mathrm{e}^z} = \mathrm{e}^{-z}$.

Proposition 4

Pour tout $\theta \in \mathbb{R}$, $\mathrm{e}^{\mathrm{i}\theta} = \cos\theta + \mathrm{i}\sin\theta$.

Corollaire:

> Si $z = x + \mathrm{i}y$ avec x, y réels, on a : $\mathrm{e}^z = \mathrm{e}^{x+\mathrm{i}y} = \mathrm{e}^x \cdot \mathrm{e}^{\mathrm{i}y} = \mathrm{e}^x(\cos y + \mathrm{i}\sin y)$.

Remarque : On peut définir sur $\mathbb{C}$ les fonctions $\sin$, $\cos$, sh, ch, etc... par :

$$\forall z \in \mathbb{C},\ \sin z = \frac{\mathrm{e}^{\mathrm{i}z} - \mathrm{e}^{-\mathrm{i}z}}{2\mathrm{i}} \quad \cos z = \frac{\mathrm{e}^{\mathrm{i}z} + \mathrm{e}^{-\mathrm{i}z}}{2} \quad \mathrm{sh}\, z = \frac{\mathrm{e}^{z} - \mathrm{e}^{-z}}{2} \quad \mathrm{ch}\, z = \frac{\mathrm{e}^{z} + \mathrm{e}^{-z}}{2}.$$

Par combinaison linéaire de séries convergentes, on aura alors, par exemple :

$$\forall z \in \mathbb{C},\ \sin z = \sum_{n=0}^{+\infty} (-1)^n \frac{z^{2n+1}}{(2n+1)!} \quad , \quad \mathrm{sh}\, z = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{z^{2n+1}}{(2n+1)!} \qquad \text{etc...}$$

On a aussi, pour tout $z \in \mathbb{C}$:

$$\cos^2 z + \sin^2 z = \left(\frac{\mathrm{e}^{\mathrm{i}z} + \mathrm{e}^{-\mathrm{i}z}}{2}\right)^2 + \left(\frac{\mathrm{e}^{\mathrm{i}z} - \mathrm{e}^{-\mathrm{i}z}}{2\mathrm{i}}\right)^2 = -\frac{1}{4}\left(e^{2\mathrm{i}z} + \mathrm{e}^{-2\mathrm{i}z} - 2\right) + \frac{1}{4}\left(e^{2\mathrm{i}z} + \mathrm{e}^{-2\mathrm{i}z} + 2\right) = 1.$$

etc...