SUITES ET SÉRIES DE FONCTIONS

Toutes les fonctions considérées ici sont définies sur un intervalle I de $\mathbb{R}$ et à valeurs dans $\mathbb{K}=\mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$.

I. Suites de fonctions

I.1. Convergence simple

Déf 1:

Soit $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite d'applications définies sur un intervalle I, à valeurs dans $\mathbb{K}$.
On dit que cette suite converge simplement sur I (en abrégé : CVS) si et seulement si

$$\text{pour tout } x\in I,\ \lim_{n\to+\infty} f_n(x) \text{ existe (dans } \mathbb{K}).$$

Dans ce cas, on peut définir une application $f\colon I \longrightarrow \mathbb{K}$ par :

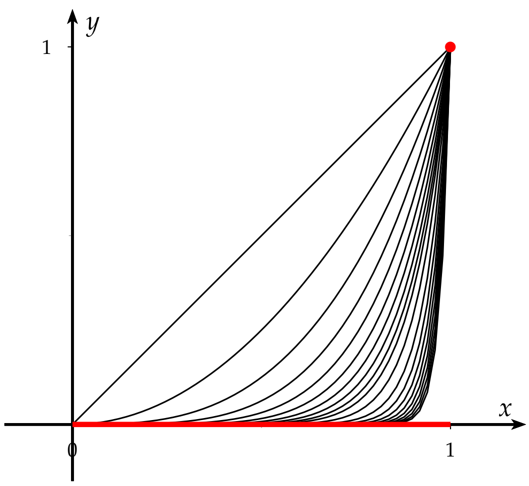
$$\forall x\in I,\ f(x)=\lim_{n\to+\infty} f_n(x).$$

f s'appelle la limite simple de la suite (f_n).

Exemples :

1. Soit, pour $n\in\mathbb{N}$, $f_n : \begin{cases} [0\,;1] & \longrightarrow \mathbb{R} \\ x & \longmapsto x^n. \end{cases}$

   Pour déterminer la limite simple de cette suite de fonctions, il suffit de déterminer $\lim\limits_{n\to+\infty} x^n$ selon les valeurs de x.
   On obtient immédiatement que la suite (f_n) converge simplement sur $[0\,;1]$ vers la fonction $f\colon x \longmapsto \begin{cases} 0 & \text{si } x\in[0\,;1[\\ 1 & \text{si } x=1. \end{cases}$



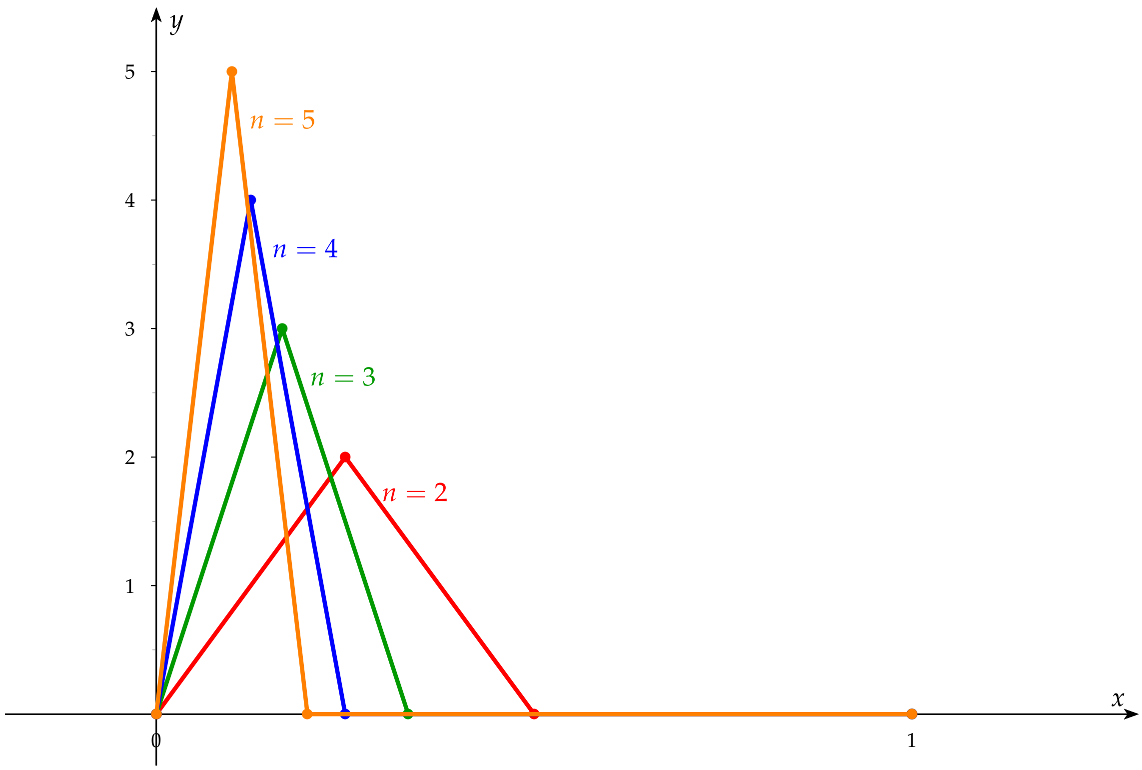
2. Soit, pour $n\in\mathbb{N}$, $n\geqslant 2$, f_n définie comme suit :

   $$f_n \text{ est continue affine par morceaux sur } [0\,;1],\quad f_n(0)=f_n\left(\tfrac{2}{n}\right)=f_n(1)=0,\quad f_n\left(\tfrac{1}{n}\right)=n.$$

   Alors la suite (f_n) converge simplement sur $[0\,;1]$ vers la fonction nulle.

   En effet, soit $x\in[0\,;1]$ fixé. Alors :
   - soit $x=0$ et alors $f_n(0)=0$ pour tout n donc $f_n(0)\underset{n\to+\infty}{\longrightarrow}0$;
   - soit $x\in\,]0\,;1]$, et alors on a $x>\frac{2}{n}$ pour n assez grand, d'où $f_n(x)=0$ à partir d'un certain rang et forcément $\lim\limits_{n\to+\infty} f_n(x)=0$.

Ce résultat n'est pas très intuitif, si l'on regarde le graphique :



I.2. Convergence uniforme

La convergence simple sur I d'une suite de fonctions (f_n) vers f s'écrit

$$\forall x \in I,\ f(x) = \lim_{n\to\infty} f_n(x).$$

ou encore, en réécrivant la définition de la limite :

$$\forall x \in I,\ \forall \varepsilon > 0,\ \exists \underbrace{n_0}_{\substack{\text{dépend de}\\ \varepsilon \text{ et de } x}} \in \mathbb{N},\ \forall n \in \mathbb{N},\ n \geqslant n_0 \Longrightarrow |f_n(x) - f(x)| < \varepsilon$$

S'il est normal que n_0 dépende de ε (plus on veut une approximation précise, plus il faut calculer de termes de la suite), il est parfois gênant qu'il dépende aussi de x (la suite ne converge pas partout vers f « à la même vitesse »). Cela a conduit à la définition suivante :

Déf 2:

Soit $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite d'applications définies sur un intervalle I, à valeurs dans $\mathbb{K}$, et f une application de I dans $\mathbb{K}$.
On dit que cette suite converge uniformément vers f sur I (en abrégé : CVU) si et seulement si

$$\forall \varepsilon > 0,\ \exists \underbrace{n_0}_{\substack{\text{ne dépend}\\ \text{que de } \varepsilon}} \in \mathbb{N},\ \forall n \in \mathbb{N},\ n \geqslant n_0 \Longrightarrow \forall x \in I,\ |f_n(x) - f(x)| < \varepsilon$$

Prop 1:

Si (f_n) converge uniformément vers f sur I, *alors* (f_n) converge simplement vers f.

Démonstration:

Immédiat : il suffit de lire les deux définitions.

Théorème 1:

Soit $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite d'applications définies sur un intervalle I, à valeurs dans $\mathbb{K}$, et f une application de I dans $\mathbb{K}$.
Alors (f_n) converge uniformément vers f sur I si et seulement si

- les fonctions $f_n - f$ sont bornées sur I (au moins à partir d'un certain rang) ;
- et $\lim\limits_{n\to+\infty} \|f_n - f\|_\infty^I = 0$, où on a posé : $\|f_n - f\|_\infty^I = \sup\limits_{x\in I} |f_n(x) - f(x)|$.

Démonstration:

En effet, dire que $\|f_n - f\|_\infty^I$ existe et tend vers 0 équivaut à

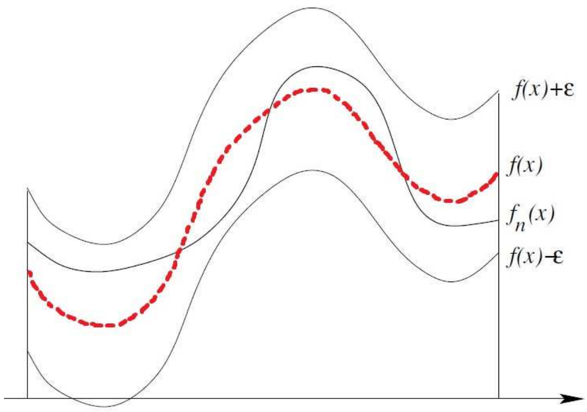
$$\forall\, \varepsilon > 0\,,\ \exists n_0 \in \mathbb{N} \text{ tq } n \geqslant n_0 \Longrightarrow \sup_{x\in I} |f_n(x) - f(x)| < \varepsilon$$

c'est-à-dire à :

$$\forall\, \varepsilon > 0\,,\ \exists n_0 \in \mathbb{N} \text{ tq } n \geqslant n_0 \Longrightarrow \forall\, x \in I\,,\ |f_n(x) - f(x)| < \epsilon,$$

ce qui est exactement la définition de la convergence uniforme de (f_n) vers f sur I (et cette définition implique que $f_n - f$ est bornée pour $n \geqslant n_0$).

La figure suivante donne l'interprétation géométrique de cette définition. Si la suite (f_n) converge uniformément vers f, alors pour n assez grand, le graphe de f_n reste dans un « tube » de largeur constante 2ε autour du graphe de f :

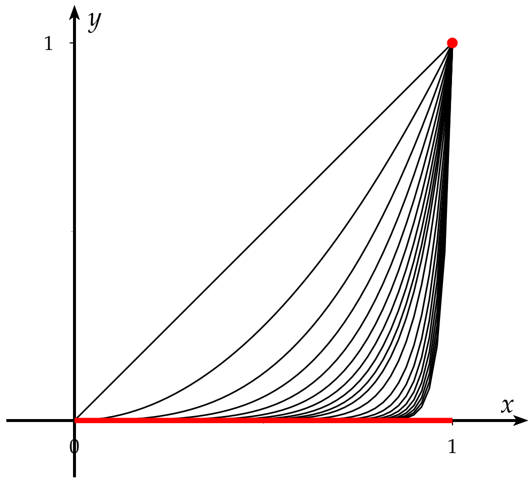


Exemples :

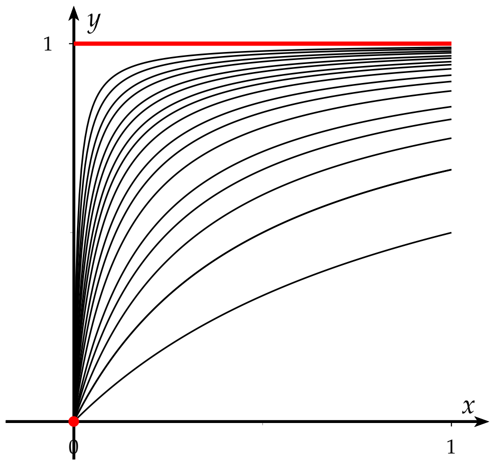
1. Soit, pour $n \in \mathbb{N}$, $f_n : \left\{\begin{array}{rcl} [0\,;1] & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ x & \longmapsto & x^n\,. \end{array}\right.$

   Alors la suite (f_n) converge simplement sur $[0\,;1]$ vers la fonction $f\colon x \longmapsto \begin{cases} 0 & \text{si } x \in [0\,;1[\\ 1 & \text{si } x = 1\,. \end{cases}$

   Or $\|f_n - f\|_\infty^{[0;1]} = \sup\limits_{x\in[0;1]} |f_n(x) - f(x)| = \sup\limits_{x\in[0;1[} x^n = 1$, donc *la suite (f_n) ne converge pas uniformément vers f sur $[0\,;1]$.*
   Cependant, il y a convergence uniforme sur tout segment de la forme $[0\,;a]$ avec $0 \leqslant a < 1$, puisque $\|f_n - f\|_\infty^{[0;a]} = \sup\limits_{x\in[0;a]} |f_n(x) - f(x)| = a^n$ tend vers 0 quand $n \longrightarrow +\infty$.



2. Soit, pour $n \in \mathbb{N}^*$, $f_n : \left\{ \begin{array}{ccc} [0\,;1] & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ x & \longmapsto & \dfrac{nx}{1+nx} \end{array} \right.$.

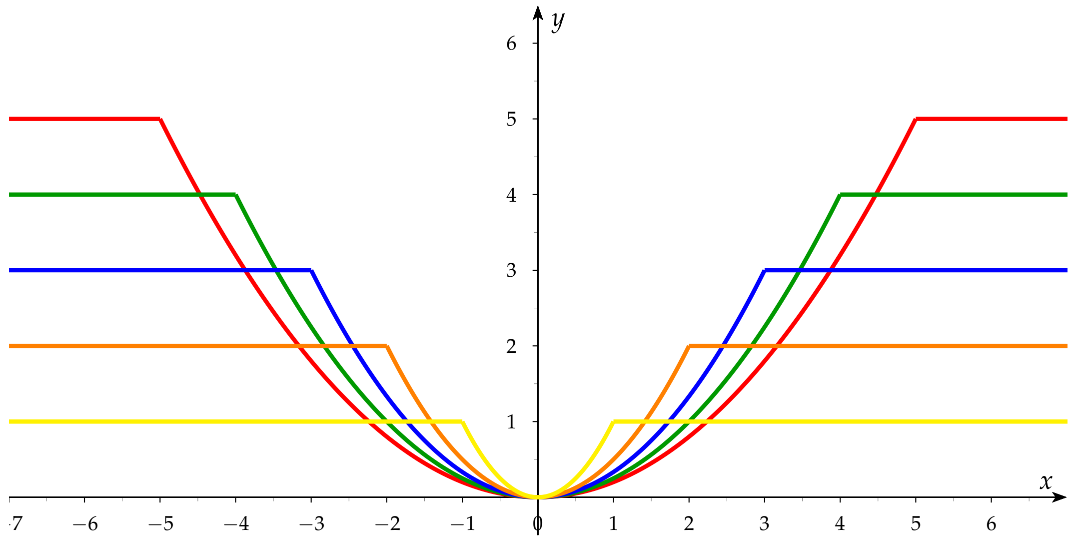


Si $x = 0$, $f_n(0) = 0$ pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, et sinon, $\lim\limits_{n \to +\infty} f_n(x) = \lim\limits_{n \to +\infty} \dfrac{nx}{nx} = 1$ donc la suite (f_n) converge simplement sur $[0\,;1]$ vers la fonction $f : x \longmapsto \begin{cases} 1 & \text{si } x \in]0\,;1] \\ 0 & \text{si } x = 0\,. \end{cases}$

Or $\|f_n - f\|_\infty^{[0;1]} = \sup\limits_{x \in [0;1]} |f_n(x) - f(x)| = \sup\limits_{x \in]0;1]} \dfrac{1}{1+nx} = 1$, donc *la suite* (f_n) *ne converge pas uniformément vers* f *sur* $[0\,;1]$.

Cependant, il y a convergence uniforme sur tout segment de la forme $[a\,;1]$ avec $0 < a \leqslant 1$, car $\|f_n - f\|_\infty^{[a;1]} = \sup\limits_{x \in [a;1]} |f_n(x) - f(x)| = \dfrac{1}{1+na}$ tend vers 0 quand $n \longrightarrow +\infty$.

3. Soit, pour $n \in \mathbb{N}^*$, $f_n : \left\{ \begin{array}{ccc} \mathbb{R} & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ x & \longmapsto & \min\left(n, \dfrac{x^2}{n}\right) \end{array} \right.$.



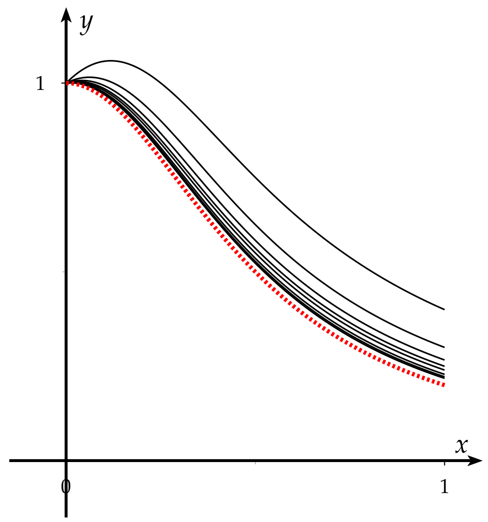
La suite (f_n) converge simplement sur $\mathbb{R}$ vers la fonction nulle. En effet :

Soit $x \in \mathbb{R}$, fixé. Il existe un entier n_0 tel que, pour tout $n \geqslant n_0$, on ait $\dfrac{x^2}{n} < n$ donc, pour $n \geqslant n_0$, $f_n(x) = \dfrac{x^2}{n}$ d'où $\lim\limits_{n\to+\infty} f_n(x) = 0$.

Cependant, *il n'y a pas convergence uniforme sur* $\mathbb{R}$, puisque $\sup\limits_{x\in\mathbb{R}} |f_n(x) - f(x)| = \sup\limits_{x\in\mathbb{R}} f_n(x) = n$.

Il y a cependant convergence uniforme sur tout segment $[-a\,;a]$ $(a > 0)$. En effet, à partir d'un certain rang n_0, on a $\dfrac{a^2}{n} < n$, donc pour tout $x \in [-a\,;a]$, on aura, pour $n \geqslant n_0$, $f_n(x) = \dfrac{x^2}{n}$ et $\sup\limits_{x\in[-a;a]} |f_n(x) - f(x)| = \dfrac{a^2}{n}$, qui tend vers 0 quand n tend vers $+\infty$.

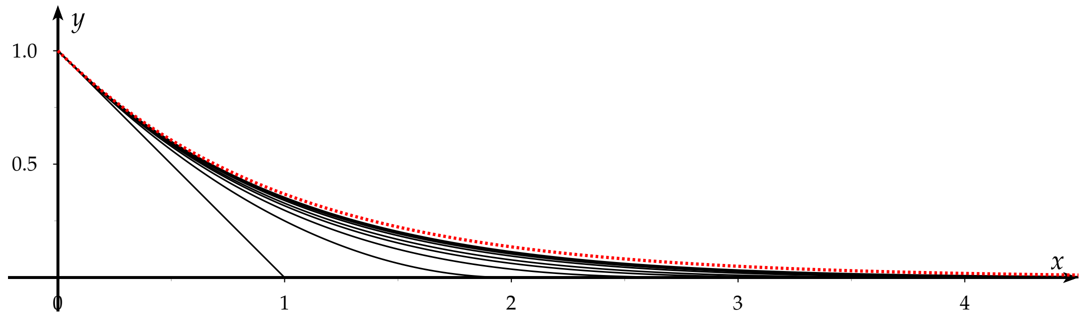
4. Soit, pour $n \in \mathbb{N}^*$, $f_n : \left\{\begin{array}{ccc} [0\,;1] & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ x & \longmapsto & \dfrac{x+n}{n+4nx^2} \end{array}\right.$.



La suite (f_n) converge simplement sur $[0\,;1]$ vers la fonction $f : x \longmapsto \dfrac{1}{1+4x^2}$.

Il y a ici convergence uniforme sur $[0\,;1]$ car :
$\forall\, x \in [0\,;1]$, $f_n(x) - f(x) = \dfrac{x}{n(1+4x^2)}$ donc $\|f_n - f\|_\infty^{[0;1]} = \sup\limits_{x\in[0;1]} |f_n(x) - f(x)| \leqslant \dfrac{1}{n}$.

5. Soit, pour $n \in \mathbb{N}^*$, $f_n : \left\{\begin{array}{ccc} \mathbb{R}_+ & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ x & \longmapsto & \begin{cases} \left(1 - \frac{x}{n}\right)^n & \text{si } x \in [0\,;n[\\ 0 & \text{si } x \geqslant n\,. \end{cases} \end{array}\right.$



La suite (f_n) converge simplement sur $\mathbb{R}_+$ vers la fonction $f\colon x \mapsto \mathrm{e}^{-x}$. En effet, pour $x \in \mathbb{R}_+$ fixé, on aura $x \in [0\,;n[$ à partir d'un certain rang donc $f_n(x) = \mathrm{e}^{n\ln\left(1-\frac{x}{n}\right)}$, et puisque $\ln\left(1-\frac{x}{n}\right) \underset{n\to+\infty}{\sim} -\frac{x}{n}$, on a $\lim\limits_{n\to+\infty} n\ln\left(1-\frac{x}{n}\right) = -x$ puis $\lim\limits_{n\to+\infty} f_n(x) = \mathrm{e}^{-x}$.

En étudiant la fonction $g_n\colon x \mapsto f(x) - f_n(x)$, nous allons montrer que $\|f_n - f\|_\infty^{\mathbb{R}_+} \leqslant \dfrac{1}{n\mathrm{e}}$, donc $\lim\limits_{n\to+\infty} \|f_n - f\|_\infty^{\mathbb{R}_+} = 0$, c'est-à-dire que la suite (f_n) converge uniformément vers f sur $\mathbb{R}_+$.

Solution:

$$g_n(x) = \begin{cases} \mathrm{e}^{-x} - \left(1-\frac{x}{n}\right)^n & \text{si } x \in [0\,;n[\\ \mathrm{e}^{-x} & \text{si } x \geqslant n\,. \end{cases}$$

- Pour $x \geqslant n$, $0 \leqslant g_n(x) \leqslant \mathrm{e}^{-n}$.
- Pour $x \in [0\,;n[$, on étudie les variations de g_n.

$g_n'(x) = -\left(\mathrm{e}^{-x} - \left(1-\frac{x}{n}\right)^{n-1}\right)$ donc

$$g_n'(x) \geqslant 0 \iff \mathrm{e}^{-x} \leqslant \left(1-\frac{x}{n}\right)^{n-1} \iff -x \leqslant (n-1)\ln\left(1-\frac{x}{n}\right) \iff h_n(x) \geqslant 0$$

où l'on a posé $h_n(x) = (n-1)\ln\left(1-\frac{x}{n}\right) + x$. On étudie alors rapidement h_n (toujours sur $[0\,;n[$).

$h_n'(x) = \dfrac{1-x}{n-x}$, et l'étude des variations de h_n montre qu'il existe $\alpha_n \in\,]1\,;n[$ tel que $h_n(\alpha_n) = 0$, et que $h_n(x) \geqslant 0$ pour $x \leqslant \alpha_n$ et $h_n(x) \leqslant 0$ pour $x \geqslant \alpha_n$.

On en déduit ainsi le tableau de variations de g_n (*non reproduit ici*), qui montre que $\forall\, x \in [0\,;n[$, $0 \leqslant g_n(x) \leqslant g_n(\alpha_n)$. On a aussi sur ce tableau $g_n(\alpha_n) \geqslant \mathrm{e}^{-n}$, de sorte que $\|g_n\|_\infty^{\mathbb{R}_+} = g_n(\alpha_n)$.

Il reste à estimer la valeur de $g_n(\alpha_n)$. Sachant que α_n est tel que $h_n(\alpha_n) = 0$, on a $\mathrm{e}^{-\alpha_n} = \left(1-\dfrac{\alpha_n}{n}\right)^{n-1}$ donc

$$g_n(\alpha_n) = \mathrm{e}^{-\alpha_n} - \left(1-\frac{\alpha_n}{n}\right)^n = \mathrm{e}^{-\alpha_n} - \left(1-\frac{\alpha_n}{n}\right)\mathrm{e}^{-\alpha_n} = \frac{\alpha_n}{n}\mathrm{e}^{-\alpha_n} \leqslant \frac{1}{n\mathrm{e}}$$

puisque une étude rapide montre que : $\forall\, x \in \mathbb{R}_+,\ x\mathrm{e}^{-x} \leqslant \dfrac{1}{\mathrm{e}}$.
Cela démontre le résultat annoncé.

Prop 2:

Soit $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite d'applications définies sur un intervalle I, à valeurs dans $\mathbb{K}$, qui converge *uniformément* sur I vers une application $f\colon I \longrightarrow \mathbb{K}$.
Si les f_n sont bornées sur I, alors f est bornée sur I.

Démonstration:

On applique la définition de la convergence uniforme, avec par exemple $\varepsilon = 1$; cela donne

$$\exists n_0 \in \mathbb{N} \text{ tq } \forall\, n \geqslant n_0\,,\ \ \forall\, x \in I\,,\ |f_n(x) - f(x)| \leqslant 1\,.$$

On a alors, en particulier :

$$\forall\, x \in I\,,\ \left|f(x) - f_{n_0}(x)\right| \leqslant 1$$

d'où, en utilisant l'inégalité triangulaire

$$\forall\, x \in I\,,\ |f(x)| \leqslant \left|f_{n_0}(x)\right| + 1 \leqslant \left\|f_{n_0}\right\|_\infty^I + 1$$

ce qui montre que f est bornée sur I.

Rem: Le résultat ne subsiste pas si il y a seulement convergence simple : considérer par exemple la suite de fonctions $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ définies sur $[0\,;1]$ par :

$$f_n(x) = \frac{n}{nx+1} \text{ si } x \in\,]0\,;1] \quad \text{et} \quad f_n(0) = 0\,.$$

Prop 3: et déf 3

L'ensemble $\mathscr{B}(I,\mathbb{K})$ des applications bornées de I dans $\mathbb{K}$ est un espace vectoriel normé pour la norme définie par

$$\forall f \in \mathscr{B}(I,\mathbb{K}), \quad \|f\|_\infty^I = \sup_{x\in I} |f(x)|$$

Cette norme s'appelle la norme de la convergence uniforme.

D'après la proposition 2, si (f_n) est une suite d'éléments de $\mathscr{B}(I,\mathbb{K})$ qui converge uniformément vers $f \in \mathcal{A}(I,\mathbb{K})$, alors $f \in \mathscr{B}(I,\mathbb{K})$, et la convergence uniforme de (f_n) vers f s'écrit alors

$$\lim_{n\to\infty} \|f_n - f\|_\infty^I = 0$$

c'est-à-dire que la suite (f_n) tend vers f dans l'espace vectoriel normé $\left(\mathscr{B}(I,\mathbb{K}), \|\ \|_\infty\right)$ (au sens qui a été vu dans le chapitre sur les espaces vectoriels normés).

II. Continuité de la limite d'une suite de fonctions

Théorème 2: Continuité de la limite

Soit (f_n) une suite d'applications de I dans $\mathbb{K}$, qui converge simplement vers une application $f\colon I \to \mathbb{K}$.

Soit $a \in I$. On suppose que :

- les f_n sont continues en a (au moins à partir d'un certain rang) ;
- il existe un voisinage V de a tel que *la suite* (f_n) *converge uniformément vers* f *sur* V.

Alors f est continue en a.

Démonstration:

Soit $\varepsilon > 0$. Par définition de la convergence uniforme, on a en particulier :

$$\exists N \in \mathbb{N} \text{ tq } \forall x \in V,\ |f_N(x) - f(x)| < \frac{\varepsilon}{3}\,.$$

Puisque f_N est continue en a on a :

$$\exists V' \in \mathscr{V}(a) \text{ tq } \forall x \in V',\ |f_N(x) - f_N(a)| < \frac{\varepsilon}{3}\,.$$

Donc, pour tout $x \in V \cap V'$ on aura, en utilisant l'inégalité triangulaire :

$$|f(x) - f(a)| \leqslant |f(x) - f_N(x)| + |f_N(x) - f_N(a)| + |f_N(a) - f(a)| < \epsilon$$

ce qui est la définition de la continuité de f en a.

Déf 4:

Si la suite (f_n) converge simplement vers f sur I et si, pour tout $a \in I$ il existe un voisinage V de a tel que la convergence de (f_n) vers f sur V soit uniforme, on dira qu'il y a convergence uniforme locale sur I.

Rem: Il est clair que, s'il y a convergence uniforme sur I entier, il y a a fortiori convergence uniforme locale ; la réciproque est fausse, comme le montre l'exemple de la suite de fonctions $(x \mapsto x^n)$ sur $[0\,;1[$.

Corollaire 2.1:

Si la suite (f_n) converge simplement vers f sur I, *la convergence étant uniforme locale*, et si les f_n sont continues sur I, alors f est continue sur I.

Démonstration:

En effet, pour tout $a \in I$ il existe un voisinage V de a tel que la suite (f_n) converge uniformément vers f sur V. D'après le théorème précédent, f est continue en a, et puisque cela est vrai pour tout $a \in I$, f est continue sur I.

Qui peut le plus peut le moins :

Corollaire 2.2:

Si la suite (f_n) converge uniformément vers f sur I, et si les f_n sont continues sur I, alors f est continue sur I.

Rem: Ce théorème peut parfois servir à montrer qu'il n'y a *pas* convergence uniforme.
Reprenons le premier exemple du chapitre, avec $f_n(x) = x^n$ pour $x \in [0\,;1]$. On a vu que la suite (f_n) converge simplement sur $[0\,;1]$ vers la fonction $f : x \longmapsto \begin{cases} 0 & \text{si } x \in [0\,;1[\\ 1 & \text{si } x = 1\,. \end{cases}$

Les f_n sont continues sur $[0\,;1]$ mais pas f : il ne peut donc pas y avoir convergence uniforme sur $[0\,;1]$.

III. Intégration d'une suite de fonctions sur un segment

Théorème 3: Interversion limite-intégrale sur un segment.

Soit (f_n) une suite de fonctions continues sur un segment $[a\,;b]$ de $\mathbb{R}$, et *convergeant uniformément sur* $[a\,;b]$ vers une fonction f.
Alors f est continue sur $[a\,;b]$ et

$$\int_a^b f(t)\,\mathrm{d}t = \lim_{n\to+\infty} \int_a^b f_n(t)\,\mathrm{d}t\,.$$

Démonstration:

La continuité de f est assurée par le théorème 2. La continuité des fonctions en présence assure aussi l'existence des intégrales considérées. On a alors

$$\left|\int_a^b f_n(t)\,\mathrm{d}t - \int_a^b f(t)\,\mathrm{d}t\right| = \left|\int_a^b (f_n(t)-f(t))\,\mathrm{d}t\right| \leqslant \int_a^b |f_n(t)-f(t)|\,\mathrm{d}t \leqslant \int_a^b \|f_n-f\|_\infty\,\mathrm{d}t = (b-a)\,\|f_n-f\|_\infty$$

et le résultat découle de $\lim\limits_{n\to+\infty} \|f_n-f\|_\infty = 0$.

Rem: Le théorème s'applique également à une suite de fonctions f_n *continues par morceaux*, qui converge uniformément sur $[a\,;b]$ vers une fonction f *continue par morceaux*. La démonstration est similaire, *mais il faut en plus vérifier la continuité par morceaux de f, celle-ci n'étant plus assurée par la convergence uniforme.*

Remarques :

Les deux hypothèses « convergence uniforme » et « l'intervalle d'intégration est un segment » sont indispensables, comme le montrent les exemples suivants.

1. Soit $(f_n)_{n\geqslant 1}$ la suite de fonctions définies sur $[0\,;1]$ par

$$f_n(0) = f_n\left(\tfrac{1}{n}\right) = f_n(1) = 0 \quad ; \quad f_n\left(\tfrac{1}{2n}\right) = n \quad \text{et} \quad f_n \text{ continue affine par morceaux.}$$

On a déjà montré que la suite (f_n) converge simplement sur $[0\,;1]$ vers la fonction nulle. Cependant, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, $\displaystyle\int_0^1 f_n(t)\,\mathrm{d}t = \frac{1}{2}$ ne converge pas vers 0 !

2. Soit $(f_n)_{n\geqslant 2}$ la suite de fonctions définies par :

$$f_n(t) = \frac{1}{n} \quad \text{pour } t \in \left[0\,;n-\tfrac{1}{n}\right] \quad ; \quad f_n(t) = 0 \quad \text{pour } t \geqslant n \quad \text{et} \quad f_n \text{ continue affine par morceaux.}$$

Alors $\|f_n\|_\infty^{\mathbb{R}_+} = \dfrac{1}{n}$ donc la suite (f_n) converge uniformément sur $\mathbb{R}_+$ vers la fonction nulle. Cependant, on vérifie facilement que $\displaystyle\lim_{n\to+\infty} \int_{\mathbb{R}_+} f_n = 1$.

IV. Dérivation d'une suite de fonctions

Rem: Soit (f_n) une suite de fonctions de classe $\mathscr{C}^1$, convergeant simplement sur un intervalle I vers une fonction f de classe $\mathscr{C}^1$.
On n'a pas nécessairement $(\lim f_n)' = \lim f_n'$, même s'il y a convergence uniforme !

Exemple

Soit $f_n : x \in \mathbb{R} \mapsto \dfrac{\sin nx}{\sqrt{n}}$ pour $n \in \mathbb{N}^*$.

Alors $\|f_n\|_\infty^{\mathbb{R}} = \dfrac{1}{\sqrt{n}}$, donc la suite (f_n) converge uniformément sur $\mathbb{R}$ vers la fonction nulle.

Cependant, $f_n'(x) = \sqrt{n}\cos nx$, et la suite (f_n') n'a même pas de limite simple !

Il faut donc des hypothèses supplémentaires pour pouvoir dériver la limite d'une suite de fonctions.

Théorème 4: Dérivation de la limite d'une suite de fonctions.

Soit (f_n) une suite de fonctions *de classe* $\mathscr{C}^1$ sur un intervalle I de $\mathbb{R}$, à valeurs dans $\mathbb{K}$. On suppose que :

a) La suite de fonctions (f_n) converge simplement sur I vers une fonction f.
b) La suite de fonctions (f_n') converge simplement sur I vers une fonction g, *la convergence étant uniforme locale sur* I .

Alors la fonction f est de classe $\mathscr{C}^1$ sur I, et, pour tout $x \in I$, $f'(x) = g(x)$ (soit, en abrégé, $(\lim f_n)' = \lim f_n'$).
De plus, la suite (f_n) converge uniformément localement vers f.

Démonstration:

- Puisque la suite de fonctions continues (f_n') converge uniformément localement vers g sur I, d'après le théorème 2 g est continue sur I.
- Soit $a \in I$, et V un intervalle contenant a sur lequel il y a convergence uniforme de la suite (f_n') vers g. Pour tout $x \in V$ on a $f_n(x) = f_n(a) + \displaystyle\int_a^x f_n'(t)\,\mathrm{d}t$. Puisque la convergence de la suite (f_n') vers g est uniforme sur le segment $[a\,;x]$ (ou $[x\,;a]$), le théorème 3 donne : $\displaystyle\lim_{n\to+\infty}\int_a^x f_n'(t)\,\mathrm{d}t = \int_a^x g(t)\,\mathrm{d}t$.
- De plus, la convergence simple de la suite (f_n) vers f donne $\displaystyle\lim_{n\to+\infty} f_n(x) = f(x)$ et $\displaystyle\lim_{n\to+\infty} f_n(a) = f(a)$.
- On en déduit, pour tout $x \in V$, $f(x) = f(a) + \displaystyle\int_a^x g(t)\,\mathrm{d}t$. Par suite, f est de classe $\mathscr{C}^1$ sur V et $f' = g$. Cela étant vrai au voisinage de tout $a \in I$, c'est vrai sur I (les notions de continuité et de dérivabilité sont des notions locales).
- Enfin, si a est un élément de I et si J est un segment contenant a sur lequel la suite (f_n') converge uniformément vers g (il en existe par hypothèse), on aura, grâce à l'inégalité triangulaire et à l'inégalité de la moyenne :
$$\forall\, x \in J,\ |f_n(x) - f(x)| = \left|(f_n(a) - f(a)) + \left(\int_a^x (f_n'(t) - g(t))dt\right)\right| \leqslant |f_n(a) - f(a)| + \ell(J)\,\|f_n' - g\|_\infty^J$$
en notant $\ell(J)$ la longueur de J.
Ainsi,
$$\|f_n - f\|_\infty^J \leqslant |f_n(a) - f(a)| + \ell(J)\,\|f_n' - g\|_\infty^J,$$
et puisque la convergence de (f_n') vers g est uniforme sur J, on a $\displaystyle\lim_{n\to+\infty}\|f_n' - g\|_\infty^J = 0$ d'où $\displaystyle\lim_{n\to+\infty}\|f_n - f\|_\infty^J = 0$, c'est-à-dire que la suite (f_n) converge uniformément vers f sur J.
Il y a donc bien CVUL de (f_n) vers f.

Corollaire 4.1: *Suites de fonctions de classe $\mathscr{C}^k$, $k \geqslant 1$.*

Soit (f_n) une suite de fonctions de classe $\mathscr{C}^k$ ($k \in \mathbb{N}^*$) sur un intervalle I de $\mathbb{R}$, à valeurs dans $\mathbb{K}$. On suppose que :

a) Pour tout $j \in [\![0\,;k-1]\!]$, la suite de fonctions $(f_n^{(j)})$ converge simplement sur I ;

b) La suite de fonctions $(f_n^{(k)})$ converge simplement sur I vers une fonction g, *la convergence étant uniforme locale.*

Alors, la fonction $f = \lim\limits_{n\to+\infty} f_n$ est de classe $\mathscr{C}^k$ sur I, on a $f^{(k)} = g$ et pour $j \in [\![0\,;k]\!]$, chaque suite $(f_n^{(j)})$ converge uniformément localement vers $f^{(j)}$.

Démonstration:

La démonstration se fait naturellement par récurrence sur k.

- Pour $k = 1$, il s'agit du théorème précédent.
- Supposons la proposition acquise au rang $k-1$ avec $k \geqslant 2$. Posons alors $h_n = f_n^{(k-1)}$. Les hypothèses permettent d'appliquer à la suite (h_n) le théorème 4; on en déduit que la suite (h_n) converge uniformément sur tout segment de I, sa limite h étant de classe $\mathscr{C}^1$ sur I et telle que $h' = g$.

  D'après l'hypothèse de récurrence, f est de classe $\mathscr{C}^{k-1}$ sur I et $f^{(k-1)} = h$, chaque suite $(f_n^{(j)})$ pour $0 \leqslant j \leqslant k-2$ convergeant uniformément vers $f^{(j)}$ sur tout segment inclus dans I.

  Ainsi $f^{(k-1)} = h$ est de classe $\mathscr{C}^1$ c'est-à-dire que f est de classe $\mathscr{C}^k$, avec $f^{(k)} = h' = g$ et la suite $(f_n^{(k-1)})$ converge uniformément localement vers $h = f^{(k-1)}$ ce qui établit le résultat à l'ordre k et achève la récurrence.

Corollaire 4.2: *Suites de fonctions de classe $\mathscr{C}^\infty$.*

Soit (f_n) une suite de fonctions de classe $\mathscr{C}^\infty$ sur un intervalle I de $\mathbb{R}$, à valeurs dans $\mathbb{K}$. On suppose que :

a) Pour tout $j \in \mathbb{N}$, la suite de fonctions $(f_n^{(j)})$ converge simplement sur I ;

b) Il existe $p \in \mathbb{N}^*$ tel que, pour tout $k \geqslant p$, la suite de fonctions $(f_n^{(k)})$ converge simplement sur I, *la convergence étant uniforme locale.*

Alors, la fonction $f = \lim\limits_{n\to+\infty} f_n$ est de classe $\mathscr{C}^\infty$ sur I, et pour $j \in \mathbb{N}$, chaque suite $(f_n^{(j)})$ converge uniformément localement vers $f^{(j)}$.

Démonstration:

On applique le corollaire précédent à tout ordre $k \geqslant p$.

V. Séries de fonctions

V.1. Généralités

Soit $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite d'applications d'un intervalle I dans $\mathbb{K}$. On peut alors considérer la suite de fonctions $(S_n)_{n\in\mathbb{N}}$ définies par

$$\forall\, x \in I\,,\ S_n(x) = \sum_{k=0}^{n} u_k(x)\,.$$

Étudier la série de fonctions $\sum\limits_{n\in\mathbb{N}} u_n$, c'est étudier la suite de fonctions (S_n).

Déf 5:

Soit $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite de fonctions dénies sur un intervalle I à valeurs dans $\mathbb{K}$.
On dit que la série de fonctions $\sum\limits_{n\in\mathbb{N}} u_n$ converge simplement sur I s'il existe une application $S : I \to \mathbb{K}$ telle que la suite de fonctions (S_n) converge simplement sur I vers S.
Cela signifie donc que, pour tout $x \in I$, la série $\sum\limits_{n\in\mathbb{N}} u_n(x)$, à valeurs dans $\mathbb{K}$, converge et que $S(x) = \sum\limits_{n=0}^{+\infty} u_n(x)$.
S s'appelle alors la somme de la série de fonctions $\sum\limits_{n\in\mathbb{N}} u_n$. On définit également le reste d'ordre n $R_n = S - S_n = \sum\limits_{k=n+1}^{+\infty} u_k$. La suite de fonctions (R_n) converge simplement sur I vers la fonction nulle.

Déf 6:

On dit que la série de fonctions $\sum_{n\in\mathbb{N}} u_n$ converge uniformément sur I s'il existe une application $S\colon I \to \mathbb{K}$ telle que la suite de fonctions (S_n) converge uniformément sur I vers S.

Théorème 5:

La série de fonctions $\sum_{n\in\mathbb{N}} u_n$ converge uniformément sur I si et seulement si elle converge simplement sur I et si la suite des restes (R_n) converge uniformément sur I vers la fonction nulle (autrement dit, $\lim_{n\to+\infty} \|R_n\|_\infty^I = 0$).

Démonstration:

En effet, si la série converge uniformément sur I, elle converge aussi simplement. On peut alors définir sa somme $S : I \to E$.
Par définition de la convergence uniforme de la suite (S_n) des sommes partielles vers S, la suite (R_n) converge uniformément sur I vers la fonction nulle, car

$$\lim_{n\to+\infty} \|R_n\|_\infty^I = \lim_{n\to+\infty} \|S - S_n\|_\infty^I = 0.$$

La réciproque est identique.

Rem: Comme pour les suites, on définit de la même manière la notion de *convergence uniforme locale* : lorsqu'il y a convergence uniforme au voisinage de tout point de I, c'est-à-dire si pour tout $a \in I$ il existe un voisinage V de a tel que $\lim_{n\to+\infty} \|R_n\|_\infty^V = 0$.

Exemples :

1. Étude de la série de fonctions $\sum_{n\geqslant 1} \frac{x^n}{n^2}$.

Solution:

- *Convergence simple :*
  Pour $|x| > 1$, $\frac{x^n}{n^2}$ ne tend pas vers 0 quand $n \to +\infty$, donc la série $\sum_{n\geqslant 1} \frac{x^n}{n^2}$ diverge grossièrement.

  Si $|x| \leqslant 1$, $\left|\frac{x^n}{n^2}\right| \leqslant \frac{1}{n^2}$ donc la série $\sum_{n\geqslant 1} \frac{x^n}{n^2}$ est absolument convergente (donc convergente) par comparaison à la série convergente à termes positifs $\sum_{n\geqslant 1} \frac{1}{n^2}$.

  En conclusion, la série converge simplement sur $[-1\,;1]$ et on peut donc poser :

  $$\forall\, x \in [-1\,;1]\,,\; f(x) = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{x^n}{n^2}\,.$$

- *Convergence uniforme :*
  Pour tout $x \in [-1\,;1]$, on a

  $$|R_n(x)| = \left|\sum_{k=n+1}^{+\infty} \frac{x^k}{k^2}\right| \leqslant \sum_{k=n+1}^{+\infty} \frac{|x|^k}{k^2} \leqslant \sum_{k=n+1}^{+\infty} \frac{1}{k^2}$$

  donc $\|R_n\|_\infty \leqslant \sum_{k=n+1}^{+\infty} \frac{1}{k^2}$ et $\lim_{n\to+\infty} \|R_n\|_\infty = 0$ puisque $\sum_{k=n+1}^{+\infty} \frac{1}{k^2}$ est le reste d'une série numérique convergente.

En conclusion, la série de fonctions $\sum_{n\geqslant 1} \frac{x^n}{n^2}$ converge uniformément vers f sur $[-1\,;1]$.

2. Étude de la série de fonctions $\sum_{n\geqslant 0} \frac{x^2}{(x^2+1)^n}$.

Solution:

- *Convergence simple :*
  - Pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u_n(0) = 0$ donc $\sum_{n=0}^{+\infty} u_n(0) = 0$.
  - Si $x \neq 0$, la série numérique $\sum_{n\geqslant 0} u_n(x)$ est une série géométrique de raison $\frac{1}{1+x^2} < 1$, donc elle converge, et sa somme S est telle que $S(x) = \frac{x^2}{1 - \frac{1}{1+x^2}} = 1 + x^2$.

  En conclusion, la série de fonctions converge simplement sur $\mathbb{R}$ vers la fonction $S : x \mapsto \begin{cases} 0 & \text{si } x = 0 \\ 1 + x^2 & \text{sinon}\,. \end{cases}$

- *Convergence uniforme :* Les u_n étant continues, il en est de même des sommes partielles de la série ; la fonction limite S n'étant pas continue, il ne peut pas y avoir convergence uniforme sur $\mathbb{R}$.

  Cependant : il y a convergence uniforme sur toute partie de $\mathbb{R}$ de la forme $A =]-\infty; -a] \cup [a; +\infty[$ avec $a > 0$.
  En effet, si $x \neq 0$,
  $$R_n(x) = \sum_{k=n+1}^{+\infty} \frac{x^2}{(x^2+1)^k} = \frac{x^2}{(x^2+1)^{n+1}} \frac{1}{1 - \frac{1}{x^2+1}} = \frac{1}{(x^2+1)^n}$$
  donc $\|R_n\|_\infty^A = \frac{1}{(a^2+1)^n} \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} 0$.
  On en déduit qu'il y a CVUL sur $\mathbb{R}^*$.

V.2. Convergence normale d'une série de fonctions

Déf 7:

On dit que la série de fonctions $\sum\limits_{n\in\mathbb{N}} u_n$ converge normalement sur I si :

- les fonctions u_n sont bornées sur I (au moins à partir d'un certain rang)
- et la série numérique $\sum\limits_{n\geqslant 0} \|u_n\|_\infty^I$ est convergente (en notant comme d'habitude : $\|u_n\|_\infty^I = \sup\limits_{x\in I} |u_n(x)|$).

Rem: Pour montrer que la série de fonctions $\sum\limits_{n\in N} u_n$ est normalement convergente, il suffit de trouver une suite $(\alpha_n)_{n\in\mathbb{N}}$ tel que $\|u_n\|_\infty^I \leqslant \alpha_n$ (c'est-à-dire $|u_n(x)| \leqslant \alpha_n$ pour tout $x \in I$), et telle que la série $\sum\limits_{n\in\mathbb{N}} \alpha_n$ converge.

Théorème 6:

Si $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est une suite d'applications de I dans $\mathbb{K}$ telle que la série de fonctions $\sum\limits_{n\in\mathbb{N}} u_n$ est *normalement convergente* sur I, alors :

a) Pour tout $x \in I$, la série $\sum\limits_{n\in\mathbb{N}} u_n(x)$ est absolument convergente dans $\mathbb{K}$.

b) La série de fonctions $\sum\limits_{n\in\mathbb{N}} u_n$ est uniformément convergente sur I.

☞ *Démonstration:*

Supposons donc $\sum\limits_{n\in\mathbb{N}} \|u_n\|_\infty^I$ convergente.
Puisque, pour tout $x \in I$, $|u_n(x)| \leqslant \|u_n\|_\infty^I$, par comparaison de séries à termes positifs, la série $\sum\limits_{n\in\mathbb{N}} |u_n(x)|$ converge. Cela signifie que la série $\sum\limits_{n\in\mathbb{N}} u_n(x)$ est absolument convergente. Elle est donc convergente, c'est-à-dire que la série de fonctions $\sum\limits_{n:\in\mathbb{N}} u_n$ converge simplement sur I.
On aura alors, pour tout $x \in I$
$$|R_n(x)| = \left|\sum_{k=n+1}^{+\infty} u_n(x)\right| \leqslant \sum_{k=n+1}^{+\infty} |u_n(x)| \leqslant \sum_{k=n+1}^{+\infty} \|u_n\|_\infty^I$$
d'où $\|R_n\|_\infty^I \leqslant \underbrace{\sum\limits_{k=n+1}^{+\infty} \|u_n\|_\infty^I}_{\text{reste d'une série numérique convergente}} \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} 0$, ce qui prouve la convergence uniforme de la série.

Rem: En utilisant les abréviations CVS, CVA, CVU et CVN pour convergence simple, absolue, uniforme et normale respectivement, on a donc la suite d'implications :

$$\begin{array}{ccccc} & & \sum\limits_{n\in\mathbb{N}} u_n(x) \text{ CVA } \forall x \in I & & \\ & \nearrow & & \searrow & \\ \sum\limits_{n\in\mathbb{N}} u_n \text{ CVN sur } I & & & & \sum\limits_{n\in\mathbb{N}} u_n \text{ CVS sur } I \\ & \searrow & & \nearrow & \\ & & \sum\limits_{n\in\mathbb{N}} u_n \text{ CVU sur } I & & \end{array}$$

Exemples :

1. Étude de la série de fonctions $\sum_{n\geqslant 1} \frac{1}{x^2+n^2}$.

Posons pour tout $x \in \mathbb{R}$, $u_n(x) = \frac{1}{x^2+n^2}$.
On a $|u_n(x)| \leqslant \frac{1}{n^2}$ pour tout x, donc $\|u_n\|_\infty^{\mathbb{R}} \leqslant \frac{1}{n^2}$.
La série à termes positifs $\sum_{n\geqslant 1} \frac{1}{n^2}$ étant convergente, il résulte du théorème de comparaison des séries à termes positifs que la série $\sum_{n\in\mathbb{N}} \|u_n\|_\infty^{\mathbb{R}}$ converge.
Ainsi, la série $\sum_{n\in\mathbb{N}} u_n$ est normalement, donc uniformément, convergente sur $\mathbb{R}$.

2. Exemple important : Étude de la série de fonctions $\sum_{n\geqslant 1} \frac{(-1)^{n-1}x^n}{n}$.

Solution:

On posera, pour tout $x \in \mathbb{R}$ et tout $n \in \mathbb{N}^*$, $u_n(x) = \frac{(-1)^{n-1}x^n}{n}$.

- *Convergence simple :*
  - Pour $|x| > 1$, $u_n(x)$ ne tend pas vers 0 quand $n \to +\infty$, donc la série $\sum_{n\in\mathbb{N}^*} u_n(x)$ diverge grossièrement.
  - Pour $x = 1$ la série converge (série harmonique alternée), et pour $x = -1$, la série diverge (série harmonique).
  - Pour $|x| < 1$, on a $|u_n(x)| \leqslant |x|^n$. Or la série à termes positifs $\sum_{n\in\mathbb{N}^*} |x|^n$ est une série géométrique de raison $|x| < 1$, donc converge. Les théorèmes de comparaison usuels sur les séries à termes réels positifs assurent alors la convergence absolue, donc la convergence, de la série $\sum_{n\geqslant 1} u_n(x)$.

  En conclusion : la série converge simplement sur l'intervalle $]-1\,;1]$.
- *Convergence normale :*

  Il n'y a pas convergence normale sur tout l'intervalle $]-1\,;1]$. En effet, $\|u_n\|_\infty = \frac{1}{n}$, et la série $\sum_{n\in\mathbb{N}^*} \frac{1}{n}$ diverge !

  Cependant, il y a convergence normale (donc uniforme) sur tout intervalle de la forme $[-a\,;a]$ avec $0 \leqslant a < 1$. En effet, $\|u_n\|_\infty^{[-a;a]} = \frac{a^n}{n}$, et la série $\sum_{n\in\mathbb{N}^*} \frac{a^n}{n}$ converge comme il a été vu plus haut.
- *Convergence uniforme :*

  Il n'y a pas convergence normale sur $[0\,;1]$, mais montrons cependant qu'il y a convergence uniforme sur $[0\,;1]$.

  En effet, en notant $R_n(x) = \sum_{k=n+1}^{+\infty} u_k(x) = \sum_{k=n+1}^{+\infty} \frac{(-1)^{k-1}x^k}{k}$, $R_n(x)$ est le reste d'ordre n d'une série alternée qui vérifie les hypothèses du CSSA (vérification immédiate). On a donc, pour tout $x \in [0\,;1]$, $|R_n(x)| \leqslant \left|\frac{x^{n+1}}{n+1}\right| \leqslant \frac{1}{n+1}$, donc $\|R_n\|_\infty^{[0;1]} \leqslant \frac{1}{n+1} \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} 0$, ce qui prouve la convergence uniforme sur $[0\,;1]$ (on en déduit facilement qu'il y a alors convergence uniforme sur tout intervalle de la forme $[a,1]$ avec $-1 < a \leqslant 0$).

V.3. Propriétés de la somme d'une série de fonctions

Le théorème suivant, important, est admis.

Théorème 7: Interversion des limites (ou « théorème de la double limite »).

Soit $\sum_{n\in\mathbb{N}} u_n$ une série de fonctions définies sur I, à valeurs dans $\mathbb{K}$.
Soit $a \in \overline{I}$ (éventuellement $\pm\infty$). On suppose que, pour tout entier n, la limite $\lim_{\substack{x\to a\\ x\in I}} u_n(x) = \ell_n$ existe, et que la série $\sum_{n\in\mathbb{N}} u_n$ est *uniformément convergente dans un voisinage de* a. Notons $S = \sum_{n=0}^{+\infty} u_n$.

Alors :
- La série $\sum_{n\in\mathbb{N}} \ell_n$ converge
- $\lim_{\substack{x\to a\\ x\in I}} S(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} \ell_n$ (c'est-à-dire en abrégé : $\lim_a \left(\sum_{n=0}^{+\infty} u_n\right) = \sum_{n=0}^{+\infty} \lim_a u_n$).

Les théorèmes qui suivent découlent directement des théorèmes similaires concernant les suites de fonctions (on applique ces théorèmes aux sommes partielles de la série de fonctions).

Théorème 8: Continuité de la somme

Soit $\sum\limits_{n\in\mathbb{N}} u_n$ une série de fonctions définies sur un intervalle I, à valeurs dans $\mathbb{K}$, telle que la série $\sum\limits_{n\in\mathbb{N}} u_n$ converge simplement sur I. Soit S sa somme. On suppose que :

- les u_n sont continues en a ;
- il existe un voisinage V de a tel que *la série* $\sum\limits_{n\in\mathbb{N}} u_n$ *converge uniformément sur* V.

Alors S est continue en a.

Corollaire 8.1:

Soit $\sum\limits_{n\in\mathbb{N}} u_n$ une série de fonctions définies sur un intervalle I, à valeurs dans $\mathbb{K}$.

Si les u_n sont continues sur I et si la série *converge uniformément localement sur* I, alors sa somme S est continue sur I.

Démonstration:

En effet, pour tout $a \in I$ il existe un voisinage V de a tel que la série $\sum u_n$ converge uniformément sur V. D'après le théorème précédent appliqué sur V, S est continue en a.
Ainsi S est continue en tout point de I c'est-à-dire sur I.

Théorème 9: Interversion série-intégrale sur un segment.

Soit $\sum\limits_{n\in\mathbb{N}} u_n$ une série de fonctions définies sur *un segment* $[a\,;b] \subset \mathbb{R}$, à valeurs dans $\mathbb{K}$.

On suppose que *les u_n sont continues sur* $[a\,;b]$, et que *la série* $\sum\limits_{n\in\mathbb{N}} u_n$ *converge uniformément sur* $[a\,;b]$.

Notons $S = \sum\limits_{n=0}^{+\infty} u_n$.

Alors S est continue sur $[a\,;b]$, la série $\sum\limits_{n\in\mathbb{N}} \int_a^b u_n(t)\,\mathrm{d}t$ converge, et $\int_a^b S(t)\,\mathrm{d}t = \sum\limits_{n=0}^{+\infty} \int_a^b u_n(t)\,\mathrm{d}t$.

Rem: Le théorème s'applique également lorsque les u_n sont seulement *continues par morceaux*, mais il faut alors vérifier la continuité par morceaux de S, celle-ci n'étant plus assurée par la convergence uniforme.

Théorème 10: Dérivation terme à terme

Soit $\sum\limits_{n\in\mathbb{N}} u_n$ une série de fonctions définies sur un intervalle I, à valeurs dans $\mathbb{K}$.

On suppose que :

a) les u_n sont de classe $\mathscr{C}^1$ sur I ;
b) la série de fonctions $\sum\limits_{n\in\mathbb{N}} u_n$ converge simplement sur I ; on notera S sa somme ;
c) la série de fonctions $\sum\limits_{n\in\mathbb{N}} u_n'$ converge simplement sur I, *la convergence étant uniforme locale sur* I.

Alors :

1. La fonction S est de classe $\mathscr{C}^1$ sur I ;
2. la série de fonctions $\sum\limits_{n\in\mathbb{N}} u_n$ converge uniformément localement sur I ;
3. pour tout $x \in I$, on a : $S'(x) = \sum\limits_{n=0}^{+\infty} u_n'(x)$.

Corollaire 10.1: *Séries de fonctions de classe $\mathscr{C}^k$, $k \geqslant 1$.*

Soit $\sum_{n\in\mathbb{N}} u_n$ une série de fonctions définies sur un intervalle I, à valeurs dans $\mathbb{K}$. On suppose que :

a) les u_n sont de classe $\mathscr{C}^k$ sur I ;

b) chaque série de fonctions $\sum_{n\in\mathbb{N}} u_n^{(j)}$ pour $j \in [\![0\,;k-1]\!]$ converge simplement sur I ;

c) la série de fonctions $\sum_{n\in\mathbb{N}} u_n^{(k)}$ converge simplement sur I, *la convergence étant uniforme locale sur* I.

Alors : la fonction somme S est de classe $\mathscr{C}^k$ sur I, chaque série $\sum u_n^{(j)}$ avec $j \in [\![0\,;k]\!]$ converge uniformément localement vers $S^{(j)}$, et :

$$\forall\, j \in [\![0\,;k]\!]\;,\; \forall\, x \in I\;,\; S^{(j)}(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} u_n^{(j)}(x)\,.$$

Corollaire 10.2: *Séries de fonctions de classe $\mathscr{C}^\infty$.*

Soit $\sum_{n\in\mathbb{N}} u_n$ une série de fonctions définies sur un intervalle I, à valeurs dans $\mathbb{K}$. On suppose que :

a) les u_n sont de classe $\mathscr{C}^\infty$ sur I ;

b) pour tout $j \in \mathbb{N}$, la série de fonctions $\sum_{n\in\mathbb{N}} u_n^{(j)}$ converge simplement sur I ;

c) il existe un entier $p \in \mathbb{N}^*$ tel que, pour tout entier $k \geqslant p$ la série de fonctions $\sum_{n\in\mathbb{N}} u_n^{(k)}$ converge simplement sur I, *la convergence étant uniforme locale sur* I.

Alors : la fonction somme S est de classe $\mathscr{C}^\infty$ sur I, chaque série $\sum u_n^{(j)}$ avec $j \in \mathbb{N}$ converge uniformément localement vers $S^{(j)}$ et :

$$\forall\, j \in \mathbb{N}\;,\; \forall\, x \in I\;,\; S^{(j)}(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} u_n^{(j)}(x)\,.$$

VI. Étude complète d'exemples

1. Soit $z \in \mathbb{C}$ et soit $e_z : \left\{\begin{array}{ccc} \mathbb{R} & \longrightarrow & \mathbb{C} \\ t & \longmapsto & \mathrm{e}^{tz} \end{array}\right.$.

Alors la fonction e_z est de classe $\mathscr{C}^\infty$ sur $\mathbb{R}$ et : $\forall\, t \in \mathbb{R},\ e_z'(t) = z\mathrm{e}^{tz}$.

Solution:

Pour tout $t \in \mathbb{R}$, notons $u_n(t) = \dfrac{t^n z^n}{n!}$, de sorte que $e_z(t) = \sum_{n=0}^{+\infty} u_n(t)$.

On a déjà vu que cette série converge simplement (absolument) sur $\mathbb{R}$ (cf. cours sur l'exponentielle complexe).

De plus, les u_n sont de classe $\mathscr{C}^1$ sur $\mathbb{R}$ et $\forall\, t \in \mathbb{R}$, $\forall\, n \in \mathbb{N}^*$, $u_n'(t) = \dfrac{t^{n-1}z^n}{(n-1)!}$. La série $\sum_{n\geqslant 1} u_n'$ converge normalement, donc uniformément, sur tout segment de la forme $[-A\,;A]$ avec $A > 0$ puisque $\|u_n'\|_\infty^A = \dfrac{A^{n-1}\,|z|^n}{(n-1)!}$, terme général d'une série convergente (de somme $|z|\,\mathrm{e}^{A|z|}$).

Le théorème de dérivation terme à terme s'applique donc : e_z est de classe $\mathscr{C}^1$ sur $\mathbb{R}$ et pour tout t réel, on a :

$$e_z'(t) = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{t^{n-1}z^n}{(n-1)!} = z \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{t^{n-1}z^{n-1}}{(n-1)!} = z\mathrm{e}^{tz}.$$

Rem: Par récurrence on a immédiatement : $\forall\, n \in \mathbb{N}$, e_z est de classe $\mathscr{C}^n$ sur $\mathbb{R}$ et $\forall\, t \in \mathbb{R}$, $e_z^{(n)}(t) = z^n \mathrm{e}^{tz}$. Et en particulier, pour $z = \mathrm{i}$ on obtient

$$e_{\mathrm{i}}^{(n)}(t) = \mathrm{i}^n \mathrm{e}^{\mathrm{i}t} = \mathrm{e}^{\mathrm{i}\left(t + n\frac{\pi}{2}\right)}.$$

On retrouve ainsi des résultats connus :

$$\forall\, n \in \mathbb{N},\ \forall\, t \in \mathbb{R},\ \cos^{(n)}(t) = \cos\left(t + n\frac{\pi}{2}\right) \quad \text{et} \quad \sin^{(n)}(t) = \sin\left(t + n\frac{\pi}{2}\right).$$

2. Étude de la série de fonctions $\displaystyle\sum_{n\geqslant 1} \frac{(-1)^{n-1}x^n}{n}$.

Solution:

- *Domaine de définition :*
  On a déjà vu que cette série de fonctions converge simplement sur $]-1\,;1]$; on peut donc définir sa somme
  $$\forall\, x \in\,]-1\,;1]\,,\ S(x) = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{(-1)^{n-1}x^n}{n}\,.$$
- *Continuité :*
  On a déjà vu que la série converge uniformément sur tout segment de la forme $[a,1]$ avec $-1 < a \leqslant 0$. Les u_n étant évidemment continues, il en résulte que S est continue sur tout intervalle de ce type, donc sur $]-1\,;1]$.
- *Dérivabilité :*
  Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, la fonction $u_n : x \mapsto \dfrac{(-1)^{n-1}x^n}{n}$ est de classe $\mathscr{C}^1$ sur $]-1\,;1]$, et $u_n'(x) = (-1)^n x^{n-1}$.
  Pour tout $a \in]0,1[$, $\|u_n'\|_\infty^{[-a;a]} = a^{n-1}$, donc la série $\displaystyle\sum_{n\geqslant 1} \|u_n'\|_\infty^{[-a;a]}$ est convergente (série géométrique). Il en résulte que la série $\displaystyle\sum_{n\geqslant 1} u_n'$ converge normalement, donc uniformément, sur tout segment inclus dans $]-1\,;1[$.
  Le théorème de dérivation terme à terme permet alors d'affirmer que S est de classe $\mathscr{C}^1$ sur $]-1\,;1[$ et que
  $$\forall\, x \in\,]-1\,;1[\,,\ S'(x) = \sum_{n=1}^{+\infty} (-1)^{n-1}x^{n-1} = \frac{1}{1+x}\,.$$
  S étant continue sur $]-1\,;1[$, on en déduit
  $$\forall\, x \in\,]-1\,;1[\,,\ S(x) = S(0) + \int_0^x S'(t)\,\mathrm{d}t = \ln(1+x)\,.$$
  Enfin, cette dernière égalité se prolonge en $x = 1$ par continuité. On a donc prouvé (résultat *à savoir par coeur)* :
  $$\boxed{\forall\, x \in\,]-1\,;1]\,,\ \ln(1+x) = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{(-1)^{n-1}x^n}{n}\,.}$$
  (pour $x = 1$, on retrouve la valeur bien connue de la série harmonique alternée).

3. Étude de la série de fonctions $\displaystyle\sum_{n\geqslant 1} \frac{a^n \cos nx}{n}$ avec $0 < a < 1$.

Solution:

On notera, pour tout $x \in \mathbb{R}$ et tout $n \geqslant 1$: $u_n(x) = \dfrac{a^n \cos nx}{n}$.

- *Domaine de définition et continuité :*
  Pour tout $x \in \mathbb{R}$, on a $|u_n(x)| \leqslant \dfrac{a^n}{n} \leqslant a^n$, donc $\|u_n\|_\infty^{\mathbb{R}} \leqslant a^n$. Par comparaison à une série géométrique, on en déduit que la série de fonctions $\displaystyle\sum_{n\geqslant 1} u_n$ est normalement donc uniformément convergente sur $\mathbb{R}$.
  On pourra donc poser :
  $$\forall\, x \in \mathbb{R}\,,\ S(x) = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{a^n \cos nx}{n}\,.$$
  De plus, les u_n étant continues sur $\mathbb{R}$, il en est de même de S par convergence uniforme.
- *Dérivabilité :*
  Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, la fonction u_n est de classe $\mathscr{C}^1$ sur $\mathbb{R}$ et, pour tout $x \in \mathbb{R}$, $u_n'(x) = -a^n \sin nx$. On a donc $\|u_n'\|_\infty^{\mathbb{R}} = a^n$, et la série de fonctions $\displaystyle\sum_{n\,geq1} u_n'$ converge normalement donc uniformément sur $\mathbb{R}$.
  Le théorème de dérivation terme à terme permet alors d'affirmer que S est de classe $\mathscr{C}^1$ sur $\mathbb{R} >$ et que
  $$\forall\, x \in \mathbb{R}\,,\ S'(x) = \sum_{n=1}^{+\infty} -a^n \sin nx = \sum_{n=0}^{+\infty} -a^n \sin nx\,.$$
  Calculons cette somme :
  $$S'(x) = -\mathcal{I}m\left(\sum_{n=0}^{+\infty} a^n \mathrm{e}^{\mathrm{i}nx}\right) = -\mathcal{I}m\left(\sum_{n=0}^{+\infty} (a\mathrm{e}^{\mathrm{i}x})^n\right) = -\mathcal{I}m\left(\frac{1}{1-a\mathrm{e}^{\mathrm{i}x}}\right) = -\frac{a\sin x}{a^2 - 2a\cos x + 1}$$
  Or, pour $x = 0$, $S(0) = \displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{a^n}{n} = -\ln(1-a)$ d'après l'exemple n°1, donc on aura, pour tout $x \in \mathbb{R}$:
  $$\begin{aligned} S(x) &= S(0) + \int_0^x S'(t)\,\mathrm{d}t = -\ln(1-a) + \int_0^x -\frac{a\sin t}{a^2 - 2a\cos t + 1} \\ &= -\ln(1-a) - \frac{1}{2}\Big[\ln\left|a^2 - 2a\cos t + 1\right|\Big]_0^x = -\ln(1-a) + \frac{1}{2}\ln((1-a)^2) - \frac{1}{2}\ln\left|a^2 - 2a\cos x + 1\right| \\ &= -\frac{1}{2}\ln(a^2 - 2a\cos x + 1) \quad (\text{puisque } a \in]0,1[) \end{aligned}$$

- *Application :* Calculer $I = \int_0^\pi \ln(a^2 - 2a\cos x + 1)\,\mathrm{d}x$.

  Ainsi, $I = -2\int_0^\pi S(x)\,\mathrm{d}x$.

  La série $S(x) = \sum_{n=1}^{+\infty} \dfrac{a^n \cos nx}{n}$ étant normalement donc uniformément convergente sur $\mathbb{R}$, donc sur $[0,\pi]$, on peut appliquer le théorème d'intégration terme à terme :

$$\int_0^\pi S(x)\,\mathrm{d}x = \sum_{n=1}^{+\infty}\int_0^\pi \frac{a^n\cos nx}{n}\,\mathrm{d}x = 0$$

  d'où : $I = 0$.

4. **Étude de la série de fonctions $\sum_{n\geqslant 1} \dfrac{1}{x^2+n^2}$.**

Donner un développement limité de la somme S à l'ordre 2 au voisinage de 0. Limite et équivalent de $S(x)$ lorsque $x \to +\infty$.

Solution:

On notera, pour tout $x \in \mathbb{R}$ et tout $n \geqslant 1$: $u_n(x) = \dfrac{1}{x^2+n^2}$.

a)
- Pour tout x réel, on a $|u_n(x)| \leqslant \dfrac{1}{n^2}$ donc $\|u_n\|_\infty^{\mathbb{R}} \leqslant \dfrac{1}{n^2}$ et d'après les théorèmes de comparaison sur les séries à termes positifs, on a $\sum \|u_n\|_\infty$ convergente.
  Ainsi la série de fonctions est-elle normalement, donc uniformément convergente, sur $\mathbb{R}$. Les u_n étant continues, il en résulte que la fonction somme S est continue sur $\mathbb{R}$.

- Les u_n sont de classe $\mathscr{C}^1$ sur $\mathbb{R}$ et pour tout x $u_n'(x) = \dfrac{-2x}{(x^2+n^2)^2}$. Sur tout intervalle $[-a\,;a]$ avec $A > 0$ on a $\|u_n'\|_\infty^{[-a;a]} \leqslant \dfrac{2A}{n^4}$ donc la série $\sum \|u_n'\|_\infty^{[-a;a]}$ est convergente.
  Il en résulte que la série de fonctions $\sum u_n'$ est normalement donc uniformément convergente sur tout segment inclus dans $\mathbb{R}$. D'après le théorème de dérivation, on en déduit que la fonction S est de classe $\mathscr{C}^1$ sur $\mathbb{R}$ et que pour tout x réel : $S'(x) = \sum_{n=1}^{+\infty} u_n'(x)$.

- En appliquant de nouveau ce même théorème de dérivation à la série de fonctions $\sum u_n'$ on montre facilement que S est de classe $\mathscr{C}^2$ sur $\mathbb{R}$ et que pour tout x réel : $S''(x) = \sum_{n=1}^{+\infty} u_n''(x)$.
  Le développement limité demandé s'obtient alors directement par la formule de Taylor-Young :

$$S(x) = S(0) + xS'(0) + \frac{x^2}{2}S''(0) + o(x^2) = \frac{\pi^2}{6} - \frac{\pi^4}{90}x^2 + o(x^2).$$

b)
- On a vu que $\sum u_n$ est uniformément convergente sur $\mathbb{R}$. Puisque, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, $\lim_{x\to+\infty} u_n(x) = 0$, le théorème d'interversion des limites s'applique et permet d'affirmer $\lim_{x\to+\infty} S(x) = 0$.

- Pour tout $x > 0$ la fonction $t \mapsto \dfrac{1}{x^2+t^2}$ est continue décroissante et positive sur $\mathbb{R}_+$. La méthode de comparaison série-intégrale conduit alors à

$$\forall n \geqslant 1,\ \int_n^{n+1} \frac{\mathrm{d}t}{x^2+t^2} \leqslant \frac{1}{x^2+n^2} \leqslant \int_{n-1}^{n} \frac{\mathrm{d}t}{x^2+t^2}$$

  donc en sommant, puisque les intégrales convergent :

$$\int_1^{+\infty} \frac{\mathrm{d}t}{x^2+t^2} \leqslant S(x) \leqslant \int_0^{+\infty} \frac{\mathrm{d}t}{x^2+t^2}.$$

  Une primitive de $t \mapsto \dfrac{1}{x^2+t^2}$ étant $t \mapsto \dfrac{1}{x}\operatorname{Arc\,tan}\dfrac{t}{x}$, on en tire

$$\forall x > 0,\ \frac{\pi}{2x} - \frac{1}{x}\operatorname{Arc\,tan}\frac{1}{x} \leqslant S(x) \leqslant \frac{\pi}{2x}$$

  d'où l'on tire facilement : $S(x) \underset{x\to+\infty}{\sim} \dfrac{\pi}{2x}$.

Rem : L'équivalent trouvé ci-dessus montre que :

$$\lim_{x\to 0}\left(\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{x}{x^2+n^2}\right) = \frac{\pi}{2}.$$

Il n'est donc pas toujours possible d'intervertir limite et $\sum$!

5. Pour $x > 1$ on pose $\zeta(x) = \sum_{n=1}^{+\infty} \dfrac{1}{n^x}$. Montrer que ζ est de classe $\mathscr{C}^\infty$ sur $]1\,;+\infty[$. Limite en $+\infty$? Limite et équivalent quand $x \to 1^+$.

Solution:

- Déjà, on sait, d'après le cours sur les séries de Rieman, que la fonction ζ est bien définie sur $]1\,;+\infty[$.
- Pour $n \in \mathbb{N}^*$ et $x > 1$ notons $u_n(x) = \dfrac{1}{n^x} = n^{-x} = \mathrm{e}^{-x\ln n}$. Les u_n sont des applications de classe $\mathscr{C}^\infty$ sur $]1\,;+\infty[$ et pour tout entier k, $u_n^{(k)}(x) = \dfrac{(-\ln n)^k}{n^x}$.

  Soit a un réel > 1. Pour tout $x > a$, $\left|u_n^{(k)}(x)\right| \leqslant \dfrac{(\ln n)^k}{n^a}$ donc $\left\|u_n^{(k)}\right\|_\infty^{[a,+\infty[} \leqslant \dfrac{(\ln n)^k}{n^a}$. Or les séries de terme général $\dfrac{(\ln n)^k}{n^a}$ sont des séries de Bertrand convergentes (savoir refaire la démonstration : on multiplie par n^α avec $a > \alpha > 1$ etc...)

  Il en résulte que les séries $\sum u_n^{(k)}$ sont normalement donc uniformément convergentes sur tout intervalle $[a,+\infty[\subset]1\,;+\infty[$, et, par application itérée du théorème de dérivation d'une série de fonctions (c'est-à-dire le corollaire 2 du théorème 10), on en déduit que la fonction ζ est de classe $\mathscr{C}^\infty$ sur $]1\,;+\infty[$ et que

$$\forall k \in \mathbb{N}\,,\ \forall x > 1\,,\ \zeta^{(k)}(x) = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{(-\ln n)^k}{n^x}.$$

- Pour tout $x > 1$ la fonction $t \mapsto \dfrac{1}{t^x}$ est continue décroissante positive sur $\mathbb{R}_+^*$. Comme dans l'exemple précédent, on utilise la méthode de comparaison série-intégrale :

  $\forall n \geqslant 1$, $\displaystyle\int_n^{n+1} \frac{\mathrm{d}t}{t^x} \leqslant \frac{1}{n^x}$ ce qui, en sommant de $n = 1$ jusqu'à $+\infty$ donne $\displaystyle\int_1^{+\infty} \frac{\mathrm{d}t}{t^x} \leqslant \zeta(x)$;

  et aussi $\forall n \geqslant 2$, $\displaystyle\frac{1}{n^x} \leqslant \int_{n-1}^{n} \frac{\mathrm{d}t}{t^x}$ ce qui, en sommant de $n = 2$ jusqu'à $+\infty$ donne $\displaystyle\zeta(x) - 1 \leqslant \int_1^{+\infty} \frac{\mathrm{d}t}{t^x}$.

  Finalement, on a l'encadrement :

$$\int_1^{+\infty} \frac{\mathrm{d}t}{t^x} \leqslant \zeta(x) \leqslant 1 + \int_1^{+\infty} \frac{\mathrm{d}t}{t^x}.$$

  On en déduit aisément : $\zeta(x) \underset{x\to1^+}{\sim} \dfrac{1}{x-1}$.

6. Étude de la série de fonctions $\sum_{n\geqslant1} (-1)^{n-1} \ln\left(1 + \dfrac{x}{n}\right)$ avec $x \geqslant 0$.

Équivalent de la somme S en 0^+ et en $+\infty$. Calculer $S(1)$.

Solution:

a)
- Il y a convergence simple de la série de fonctions sur $\mathbb{R}_+$ d'après le CSSA. La somme S de la série est donc définie sur $\mathbb{R}_+$.
- Si on note $R_n(x)$ le reste d'ordre n de la série, on a $|R_n(x)| \leqslant |u_{n+1}(x)| = \ln\left(1 + \dfrac{x}{n+1}\right) \leqslant \dfrac{x}{n+1}$, donc si a est un réel positif $\|R_n\|_\infty^{[0,a]} \leqslant \dfrac{a}{n+1} \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} 0$, ce qui prouve que la série converge uniformément sur tout segment de la forme $[0,a]$. Les u_n étant continues, il en résulte que S est continue sur tout tel segment, donc sur $\mathbb{R}_+$.

b) S étant continue sur $\mathbb{R}_+$, on a $\lim\limits_{x\to0^+} S(x) = S(0) = 0$. De plus, la série $\sum_{n\geqslant1} \dfrac{u_n(x)}{x}$ converge uniformément sur $\mathbb{R}_+^*$ puisque pour tout $x > 0$, le reste d'ordre n de cette série est majoré en valeur absolue par $\dfrac{1}{n+1}$ d'après le calcul précédent.

D'après le théorème d'interversion des limites on peut donc écrire

$$\lim_{x\to0^+} \frac{S(x)}{x} = \sum_{n=1}^{+\infty} \lim_{x\to0^+} \frac{u_n(x)}{x} = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{(-1)^{n-1}}{n} = \ln 2$$

ce qui prouve que $S(x) \underset{x\to0^+}{\sim} x\ln 2$.

Autre solution possible : On démontre, de la même façon que ci-dessus, que la série alternée $\sum_{n\geqslant1} u_n'(x)$ converge uniformément sur $\mathbb{R}_+$. En appliquant le théorème 10, on en déduit que S est de classe $\mathscr{C}^1$ sur $\mathbb{R}_+$.

On a alors le développement limité d'ordre 1 : $S(x) = S(0) + xS'(0) + o(x)$, qui donne l'équivalent cherché.

c) La recherche de l'équivalent en $+\infty$ est bien plus délicate. Deux méthodes sont possibles :

- *1ère méthode :* Cette méthode consiste à regrouper les termes 2 par 2 dans les sommes partielles, ce qui permet de se ramener à une série à termes positifs. Pour tout $x \geqslant 0$ et tout $n \in \mathbb{N}^*$ on a

$$S_{2n}(x) = \sum_{k=1}^{2n} u_k(x) = \sum_{k=1}^{n} [u_{2k-1}(x) + u_{2k}(x)] = \sum_{k=1}^{n} \left[\ln\left(1 + \frac{x}{2k-1}\right) - \ln\left(1 + \frac{x}{2k}\right)\right].$$

  Soit alors pour $x > 0$ fixé et $t \geqslant 1$, $f(t) = \ln\left(1 + \dfrac{x}{2t-1}\right) - \ln\left(1 + \dfrac{x}{2t}\right)$.

Un calcul simple donne $f'(t) = -\dfrac{4t-1+x}{t(2t-1)(2t+x)(2t-1+x)}$ donc $f'(t) \leqslant 0$ et f est décroissante. La méthode de comparaison série intégrale, comme dans l'exemple précédent, conduit alors à

$$\int_1^{n+1} f(t)\,\mathrm{d}t \leqslant \sum_{k=1}^{n} f(k) \leqslant f(1) + \int_1^{n} f(t)\,\mathrm{d}t$$

Lorsque $n \to +\infty$ les intégrales convergent (d'après le th. du cours sur la comparaison série-intégrale) donc on aura :

$$\int_1^{+\infty} f(t)\,\mathrm{d}t \leqslant S(x) \leqslant \ln(1+x) - \ln\left(1+\frac{x}{2}\right) + \int_1^{+\infty} f(t)\,\mathrm{d}t$$

Les intégrales se calculent assez facilement (surtout avec MAPLE® !) et l'on aboutit à

$$\frac{1}{2}x\ln\left(\frac{x+2}{x+1}\right) + \frac{1}{2}\ln\left(\frac{(x+2)^2}{x+1}\right) - \ln 2 \leqslant S(x) \leqslant \text{(expression affreuse)}$$

puis l'on trouve que les deux expressions qui encadrent $S(x)$ sont toutes deux équivalentes à $\dfrac{1}{2}\ln x$ lorsque $x \to +\infty$, ce qui permet d'en déduire $S(x) \underset{x\to+\infty}{\sim} \dfrac{1}{2}\ln x$.

– *2ème méthode :* Cette méthode repose sur une petite astuce. Elle consiste à écrire :

$$2S(x) = S(x) + S(x) = u_1(x) + \sum_{n=1}^{+\infty} u_{n+1}(x) + \sum_{n=1}^{+\infty} u_n(x) = u_1(x) + \sum_{n=1}^{+\infty} [u_n(x) + u_{n+1}(x)]$$

donc

$$\begin{aligned} S(x) &= \frac{u_1(x)}{2} + \sum_{n=1}^{+\infty} (-1)^{n-1}\left[\ln\left(1+\frac{x}{n}\right) - \ln\left(1+\frac{x}{n+1}\right)\right] \\ &= \frac{1}{2}\ln(1+x) + \sum_{n=1}^{+\infty} (-1)^{n-1}\left[\ln\left(1+\frac{x}{n}\right) - \ln\left(1+\frac{x}{n+1}\right)\right] \end{aligned}$$

En posant $v_n(x) = \ln\left(1+\dfrac{x}{n}\right) - \ln\left(1+\dfrac{x}{n+1}\right)$, on vérifie que la suite $(v_n(x))_{n\in\mathbb{N}^*}$ est décroissante (utiliser la convexité de $g : t \mapsto \ln\left(1+\dfrac{x}{t}\right)$, qui donne $g(n+1) \leqslant \dfrac{1}{2}[g(n)+g(n+2)]$).
On en déduit que la série $\sum\limits_{n\in\mathbb{N}^*} (-1)^{n-1} v_n(x)$ vérifie le CSSA, ce qui permet de démontrer par majoration uniforme de son reste qu'elle converge uniformément sur $\mathbb{R}_+$ (en effet le reste d'ordre n de cette série est majoré par $v_{n+1}(x) = \ln\left(\dfrac{n+1+x}{n+2+x}\cdot\dfrac{n+2}{n+1}\right) \leqslant \ln\left(\dfrac{n+2}{n+1}\right) \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} 0$). Donc, d'après le théorème d'interversion des limites, on aura

$$\lim_{x\to+\infty}\left(\sum_{n=1}^{+\infty}(-1)^{n-1}\left[\ln\left(1+\frac{x}{n}\right) - \ln\left(1+\frac{x}{n+1}\right)\right]\right) = \sum_{n=1}^{+\infty}(-1)^{n-1}\ln\left(\frac{n+1}{n}\right)$$

et puisque cette quantité est un réel fini et que $\lim\limits_{x\to+\infty}\ln(1+x) = +\infty$ on en déduit

$$S(x) \underset{x\to+\infty}{\sim} \frac{1}{2}\ln(1+x) \sim \frac{1}{2}\ln x\,.$$

d) $S(1) = \sum\limits_{n=1}^{+\infty}(-1)^{n-1}\ln\left(1+\dfrac{1}{n}\right)$. En regroupant les termes deux par deux, comme dans la 1ère méthode ci-dessus, on obtient :

$$S(1) = \sum_{k=1}^{+\infty}\left[\ln\left(1+\frac{1}{2k-1}\right) - \ln\left(1+\frac{1}{2k}\right)\right] = \sum_{k=1}^{+\infty}\ln\left(\frac{(2k)^2}{(2k-1)(2k+1)}\right)$$

d'où

$$S(1) = \lim_{n\to+\infty}\sum_{k=1}^{n}\ln\left(\frac{(2k)^2}{(2k-1)(2k+1)}\right) = \lim_{n\to+\infty}\ln\prod_{k=1}^{n}\frac{(2k)^2}{(2k-1)(2k+1)}\,.$$

Or :

$$\prod_{k=1}^{n}\frac{(2k)^2}{(2k-1)(2k+1)} = \frac{4^n(n!)^2}{\left(\dfrac{(2n)!}{2^n n!}\right)^2(2n+1)} = \frac{4^{2n}(n!)^4}{(2n+1)((2n)!)^2} \underbrace{\underset{n\to+\infty}{\sim}}_{\text{formule de Stirling}} \frac{4^{2n}\left(\dfrac{n}{\mathrm{e}}\right)^{4n}(2\pi n)^2}{(2n+1)\left(\dfrac{2n}{e}\right)^{4n}4\pi n} = \frac{\pi n}{2n+1} \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} \frac{\pi}{2}$$

et donc : $S(1) = \ln\left(\dfrac{\pi}{2}\right)$.

⋆ ⋆ ⋆ ⋆
⋆ ⋆ ⋆
⋆ ⋆
⋆