Chapitre XIV : Séries entières

PSI*

Janvier 2023

Lycée d'Arsonval

DÉFINITION

Définition

Définition 1

Soit (a_n) une suite de nombres complexes.
On appelle <u>série entière</u> de la variable complexe z et de coefficients (a_n) la série de fonctions $\sum\limits_{n\in\mathbb{N}} a_n z^n$.

Définition

Définition 1

Soit (a_n) une suite de nombres complexes.
On appelle série entière de la variable complexe z et de coefficients (a_n) la série de fonctions $\sum_{n\in\mathbb{N}} a_n z^n$.

Le domaine de convergence de cette série est $D = \left\{ z \in \mathbb{C} \;\middle|\; \sum_{n\in\mathbb{N}} a_n z^n \text{ converge} \right\}$; c'est le domaine de définition de la fonction somme de la série entière, définie par :

$$\forall\, z \in D\ ,\ f(z) = \sum_{n=0}^{+\infty} a_n z^n\,.$$

Définition

Définition 1

Soit (a_n) une suite de nombres complexes.
On appelle série entière de la variable complexe z et de coefficients (a_n) la série de fonctions $\sum_{n\in\mathbb{N}} a_n z^n$.

Le domaine de convergence de cette série est $D = \left\{ z \in \mathbb{C} \;\middle|\; \sum_{n\in\mathbb{N}} a_n z^n \text{ converge} \right\}$; c'est le domaine de définition de la fonction somme de la série entière, définie par :

$$\forall\, z \in D\ ,\ f(z) = \sum_{n=0}^{+\infty} a_n z^n\,.$$

Remarque : Dans les écritures ci-dessus, on pose $z^0 = 1$, même si $z = 0$. Ainsi, on a toujours $0 \in D$, et $f(0) = a_0$.

Exemples

1. Un polynôme en z est une série entière dont les coefficients sont nuls à partir d'un certain rang. Dans ce cas, $D = \mathbb{C}$.

Exemples

1. Un polynôme en z est une série entière dont les coefficients sont nuls à partir d'un certain rang. Dans ce cas, $D = \mathbb{C}$.

2. $\sum\limits_{n\in\mathbb{N}} \dfrac{z^n}{n!}$ est une série entière pour laquelle $D = \mathbb{C}$ (sa somme est e^z).

Exemples

1. Un polynôme en z est une série entière dont les coefficients sont nuls à partir d'un certain rang. Dans ce cas, $D = \mathbb{C}$.

2. $\sum_{n\in\mathbb{N}} \frac{z^n}{n!}$ est une série entière pour laquelle $D = \mathbb{C}$ (sa somme est e^z).

3. $\sum_{n\in\mathbb{N}} n!z^n$ est une série entière pour laquelle $D = \{0\}$

Exemples

1. Un polynôme en z est une série entière dont les coefficients sont nuls à partir d'un certain rang. Dans ce cas, $D = \mathbb{C}$.

2. $\displaystyle\sum_{n\in\mathbb{N}} \frac{z^n}{n!}$ est une série entière pour laquelle $D = \mathbb{C}$ (sa somme est e^z).

3. $\displaystyle\sum_{n\in\mathbb{N}} n!z^n$ est une série entière pour laquelle $D = \{0\}$ (en effet, pour tout $z \neq 0$, la suite $(n!z^n)$ n'est pas bornée, d'après les résultats sur les croissances comparées des suites usuelles).

Exemples

1. Un polynôme en z est une série entière dont les coefficients sont nuls à partir d'un certain rang. Dans ce cas, $D = \mathbb{C}$.

2. $\displaystyle\sum_{n\in\mathbb{N}} \frac{z^n}{n!}$ est une série entière pour laquelle $D = \mathbb{C}$ (sa somme est e^z).

3. $\displaystyle\sum_{n\in\mathbb{N}} n!z^n$ est une série entière pour laquelle $D = \{0\}$ (en effet, pour tout $z \neq 0$, la suite $\left(n!z^n\right)$ n'est pas bornée, d'après les résultats sur les croissances comparées des suites usuelles).

4. Si a est un complexe non nul, $\displaystyle\sum_{n\in\mathbb{N}} \frac{z^n}{a^n}$ est une série entière pour laquelle $D = \{z \in \mathbb{C} \text{ tq } |z| < |a|\}$ est le disque ouvert de centre 0 et de rayon $|a|$ (et, pour tout $z \in D$, on a ici $f(z) = \dfrac{a}{a-z}$).

Exemples

1. Un polynôme en z est une série entière dont les coefficients sont nuls à partir d'un certain rang. Dans ce cas, $D = \mathbb{C}$.

2. $\displaystyle\sum_{n\in\mathbb{N}} \frac{z^n}{n!}$ est une série entière pour laquelle $D = \mathbb{C}$ (sa somme est e^z).

3. $\displaystyle\sum_{n\in\mathbb{N}} n!z^n$ est une série entière pour laquelle $D = \{0\}$ (en effet, pour tout $z \neq 0$, la suite $(n!z^n)$ n'est pas bornée, d'après les résultats sur les croissances comparées des suites usuelles).

4. Si a est un complexe non nul, $\displaystyle\sum_{n\in\mathbb{N}} \frac{z^n}{a^n}$ est une série entière pour laquelle $D = \{z \in \mathbb{C} \text{ tq } |z| < |a|\}$ est le disque ouvert de centre 0 et de rayon $|a|$ (et, pour tout $z \in D$, on a ici $f(z) = \dfrac{a}{a-z}$).

5. Si a est un complexe non nul, $\displaystyle\sum_{n\in\mathbb{N}} \frac{z^n}{n^2 a^n}$ est une série entière pour laquelle $D = \{z \in \mathbb{C} \text{ tq } |z| \leqslant |a|\}$ est le disque fermé de centre 0 et de rayon $|a|$.

RAYON DE CONVERGENCE D'UNE SÉRIE ENTIÈRE

Définition du rayon de convergence et propriétés

Ce paragraphe détaille les propriétés du domaine de convergence d'une série entière. Tous les résultats sont basés sur le théorème suivant, très important.

Définition du rayon de convergence et propriétés

Ce paragraphe détaille les propriétés du domaine de convergence d'une série entière. Tous les résultats sont basés sur le théorème suivant, très important.

Théorème 1: *Lemme d'Abel*

Soit $\sum_{n\in\mathbb{N}} a_n z^n$ une série entière.

On suppose qu'il existe un complexe non nul z_0 tel que la suite $(a_n z_0^n)$ soit bornée.

Alors, pour tout complexe z tel que $|z| < |z_0|$, la série numérique $\sum_{n\in\mathbb{N}} a_n z^n$ est absolument convergente.

Définition du rayon de convergence et propriétés

Ce paragraphe détaille les propriétés du domaine de convergence d'une série entière. Tous les résultats sont basés sur le théorème suivant, très important.

Théorème 1: *Lemme d'Abel*

Soit $\sum\limits_{n\in\mathbb{N}} a_n z^n$ une série entière.

On suppose qu'il existe un complexe non nul z_0 tel que la suite $(a_n z_0^n)$ soit bornée.

Alors, pour tout complexe z tel que $|z| < |z_0|$, la série numérique $\sum\limits_{n\in\mathbb{N}} a_n z^n$ est absolument convergente.

Démonstration

Par hypothèse : $\exists M \in \mathbb{R}_+$ tq $\forall\, n \in \mathbb{N}$, $\left|a_n z_0^n\right| \leqslant M$.

Définition du rayon de convergence et propriétés

Ce paragraphe détaille les propriétés du domaine de convergence d'une série entière. Tous les résultats sont basés sur le théorème suivant, très important.

Théorème 1: *Lemme d'Abel*

Soit $\sum_{n\in\mathbb{N}} a_n z^n$ une série entière.

On suppose qu'il existe un complexe non nul z_0 tel que la suite $(a_n z_0^n)$ soit bornée.

Alors, pour tout complexe z tel que $|z| < |z_0|$, la série numérique $\sum_{n\in\mathbb{N}} a_n z^n$ est absolument convergente.

Démonstration

Par hypothèse : $\exists M \in \mathbb{R}_+$ tq $\forall\, n \in \mathbb{N}$, $\left|a_n z_0^n\right| \leqslant M$.

Puisque $z_0 \neq 0$ on a alors, pour tout $z \in \mathbb{C}$:

$$|a_n z^n| = |a_n z_0^n| \left|\frac{z}{z_0}\right|^n \leqslant M \left|\frac{z}{z_0}\right|^n .$$

Définition du rayon de convergence et propriétés

Ce paragraphe détaille les propriétés du domaine de convergence d'une série entière. Tous les résultats sont basés sur le théorème suivant, très important.

Théorème 1: *Lemme d'Abel*

Soit $\sum\limits_{n\in\mathbb{N}} a_n z^n$ une série entière.

On suppose qu'il existe un complexe non nul z_0 tel que la suite $(a_n z_0^n)$ soit bornée.

Alors, pour tout complexe z tel que $|z| < |z_0|$, la série numérique $\sum\limits_{n\in\mathbb{N}} a_n z^n$ est absolument convergente.

Démonstration

Par hypothèse : $\exists M \in \mathbb{R}_+$ tq $\forall\, n \in \mathbb{N}$, $\left|a_n z_0^n\right| \leqslant M$.

Puisque $z_0 \neq 0$ on a alors, pour tout $z \in \mathbb{C}$:

$$|a_n z^n| = |a_n z_0^n| \left|\frac{z}{z_0}\right|^n \leqslant M \left|\frac{z}{z_0}\right|^n .$$

Or, si $|z| < |z_0|$, la série géométrique $\sum\limits_{n\in\mathbb{N}} \left|\frac{z}{z_0}\right|^n$ est convergente, d'où le résultat d'après les théorèmes de comparaison sur les séries à termes positifs.

Définition 2

Soit $\sum_{n\in\mathbb{N}} a_n z^n$ une série entière. L'ensemble I des réels positifs r tels que la suite $(a_n r^n)$ soit bornée est un intervalle contenant 0 (en effet, $0 \in I$ et si $r > 0$ appartient à I, tout réel r' tel que $0 \leqslant r' \leqslant r$ appartient aussi à I).

Définition 2

Soit $\sum_{n\in\mathbb{N}} a_n z^n$ une série entière. L'ensemble I des réels positifs r tels que la suite $(a_n r^n)$ soit bornée est un intervalle contenant 0 (en effet, $0 \in I$ et si $r > 0$ appartient à I, tout réel r' tel que $0 \leqslant r' \leqslant r$ appartient aussi à I).

On appelle alors rayon de convergence R de cette série entière la borne supérieure (dans $\overline{\mathbb{R}}$) de cet intervalle :

$$R = \sup\left\{r \in \mathbb{R}_+ \mid \left(a_n r^n\right) \text{ bornée}\right\} \text{ ou } R = \sup\left\{r \in \mathbb{R}_+ \mid \left(|a_n|\, r^n\right) \text{ bornée}\right\} \quad \left(R \in \mathbb{R}_+ \cup \{+\infty\}\right).$$

Définition 2

Soit $\sum\limits_{n\in\mathbb{N}} a_n z^n$ une série entière. L'ensemble I des réels positifs r tels que la suite $(a_n r^n)$ soit bornée est un intervalle contenant 0 (en effet, $0 \in I$ et si $r > 0$ appartient à I, tout réel r' tel que $0 \leqslant r' \leqslant r$ appartient aussi à I).

On appelle alors rayon de convergence R de cette série entière la borne supérieure (dans $\overline{\mathbb{R}}$) de cet intervalle :

$$R = \sup\left\{r \in \mathbb{R}_+ \mid (a_n r^n) \text{ bornée}\right\} \text{ ou } R = \sup\left\{r \in \mathbb{R}_+ \mid (|a_n|\, r^n) \text{ bornée}\right\} \quad (R \in \mathbb{R}_+ \cup \{+\infty\}).$$

Il y a deux cas particuliers importants.

Définition 2

Soit $\sum_{n\in\mathbb{N}} a_n z^n$ une série entière. L'ensemble I des réels positifs r tels que la suite $(a_n r^n)$ soit bornée est un intervalle contenant 0 (en effet, $0 \in I$ et si $r > 0$ appartient à I, tout réel r' tel que $0 \leqslant r' \leqslant r$ appartient aussi à I).

On appelle alors <u>rayon de convergence</u> R de cette série entière la borne supérieure (dans $\overline{\mathbb{R}}$) de cet intervalle :

$$R = \sup\left\{r \in \mathbb{R}_+ \mid (a_n r^n) \text{ bornée}\right\} \text{ ou } R = \sup\left\{r \in \mathbb{R}_+ \mid (|a_n|\, r^n) \text{ bornée}\right\} \quad (R \in \mathbb{R}_+ \cup \{+\infty\}).$$

Il y a deux cas particuliers importants.

1. Si $R = 0$, quel que soit z non nul, la suite $(a_n z^n)$ n'est pas bornée : la série $\sum_{n\in\mathbb{N}} a_n z^n$ est alors grossièrement divergente. Elle ne converge que pour $z = 0$.

   Exemple : $\sum_{n\in\mathbb{N}} n!\, z^n$.

Définition 2

Soit $\sum_{n\in\mathbb{N}} a_n z^n$ une série entière. L'ensemble I des réels positifs r tels que la suite $(a_n r^n)$ soit bornée est un intervalle contenant 0 (en effet, $0 \in I$ et si $r > 0$ appartient à I, tout réel r' tel que $0 \leqslant r' \leqslant r$ appartient aussi à I).

On appelle alors rayon de convergence R de cette série entière la borne supérieure (dans $\overline{\mathbb{R}}$) de cet intervalle :

$$R = \sup\left\{r \in \mathbb{R}_+ \mid (a_n r^n) \text{ bornée}\right\} \text{ ou } R = \sup\left\{r \in \mathbb{R}_+ \mid (|a_n|\, r^n) \text{ bornée}\right\} \quad (R \in \mathbb{R}_+ \cup \{+\infty\}).$$

Il y a deux cas particuliers importants.

1. Si $R = 0$, quel que soit z non nul, la suite $(a_n z^n)$ n'est pas bornée : la série $\sum_{n\in\mathbb{N}} a_n z^n$ est alors grossièrement divergente. Elle ne converge que pour $z = 0$.

   Exemple : $\sum_{n\in\mathbb{N}} n! z^n$.

2. Si $R = +\infty$, la suite $(a_n r^n)$ est bornée pour tout $r \in \mathbb{R}_+$. Puisque, pour tout complexe z, il existe $r \in \mathbb{R}_+$ tel que $|z| < r$, il résulte du lemme d'Abel que la série entière $\sum_{n\in\mathbb{N}} a_n z^n$ est absolument convergente pour tout $z \in \mathbb{C}$.

   Exemple : $\sum_{n\in\mathbb{N}} \dfrac{z^n}{n!}$.

Définition 2

Soit $\sum_{n\in\mathbb{N}} a_n z^n$ une série entière. L'ensemble I des réels positifs r tels que la suite $(a_n r^n)$ soit bornée est un intervalle contenant 0 (en effet, $0 \in I$ et si $r > 0$ appartient à I, tout réel r' tel que $0 \leqslant r' \leqslant r$ appartient aussi à I).

On appelle alors rayon de convergence R de cette série entière la borne supérieure (dans $\overline{\mathbb{R}}$) de cet intervalle :

$$R = \sup\left\{r \in \mathbb{R}_+ \mid (a_n r^n) \text{ bornée}\right\} \text{ ou } R = \sup\left\{r \in \mathbb{R}_+ \mid (|a_n|\, r^n) \text{ bornée}\right\} \quad (R \in \mathbb{R}_+ \cup \{+\infty\}).$$

Il y a deux cas particuliers importants.

1. Si $R = 0$, quel que soit z non nul, la suite $(a_n z^n)$ n'est pas bornée : la série $\sum_{n\in\mathbb{N}} a_n z^n$ est alors grossièrement divergente. Elle ne converge que pour $z = 0$.

   Exemple : $\sum_{n\in\mathbb{N}} n! z^n$.

2. Si $R = +\infty$, la suite $(a_n r^n)$ est bornée pour tout $r \in \mathbb{R}_+$. Puisque, pour tout complexe z, il existe $r \in \mathbb{R}_+$ tel que $|z| < r$, il résulte du lemme d'Abel que la série entière $\sum_{n\in\mathbb{N}} a_n z^n$ est absolument convergente pour tout $z \in \mathbb{C}$.

   Exemple : $\sum_{n\in\mathbb{N}} \frac{z^n}{n!}$.

Dans le cas général, on a le théorème suivant.

Théorème 2

Soit $\sum_{n\in\mathbb{N}} a_n z^n$ une série entière de rayon de convergence R.

1. Si $R > 0$, alors :

$$\text{pour tout } z \text{ tel que } |z| < R, \text{ la série } \sum_{n\in\mathbb{N}} a_n z^n \text{ est absolument convergente.}$$

Théorème 2

Soit $\sum\limits_{n\in\mathbb{N}} a_n z^n$ une série entière de rayon de convergence R.

1. Si $R > 0$, alors :
   pour tout z tel que $|z| < R$, la série $\sum\limits_{n\in\mathbb{N}} a_n z^n$ est absolument convergente.
2. Si $R < +\infty$ alors :
   pour tout z tel que $|z| > R$, la série $\sum\limits_{n\in\mathbb{N}} a_n z^n$ est (grossièrement) divergente.

Théorème 2

Soit $\sum_{n\in\mathbb{N}} a_n z^n$ une série entière de rayon de convergence R.

1. Si $R > 0$, alors :
   pour tout z tel que $|z| < R$, la série $\sum_{n\in\mathbb{N}} a_n z^n$ est absolument convergente.
2. Si $R < +\infty$ alors :
   pour tout z tel que $|z| > R$, la série $\sum_{n\in\mathbb{N}} a_n z^n$ est (grossièrement) divergente.

Démonstration

1. On suppose ici $R > 0$.

   Si $|z| < R$ alors, par définition de la borne supérieure (=plus petit majorant), il existe r tel que $|z| < r \leqslant R$ et tel que la suite $(a_n r^n)$ est bornée.

Théorème 2

Soit $\sum_{n\in\mathbb{N}} a_n z^n$ une série entière de rayon de convergence R.

1. Si $R > 0$, alors :
   pour tout z tel que $|z| < R$, la série $\sum_{n\in\mathbb{N}} a_n z^n$ est absolument convergente.
2. Si $R < +\infty$ alors :
   pour tout z tel que $|z| > R$, la série $\sum_{n\in\mathbb{N}} a_n z^n$ est (grossièrement) divergente.

Démonstration

1. On suppose ici $R > 0$.

   Si $|z| < R$ alors, par définition de la borne supérieure (=plus petit majorant), il existe r tel que $|z| < r \leqslant R$ et tel que la suite $(a_n r^n)$ est bornée. Le résultat découle alors directement du lemme d'Abel.

Théorème 2

Soit $\sum_{n\in\mathbb{N}} a_n z^n$ une série entière de rayon de convergence R.

1. Si $R > 0$, alors :
   pour tout z tel que $|z| < R$, la série $\sum_{n\in\mathbb{N}} a_n z^n$ est absolument convergente.
2. Si $R < +\infty$ alors :
   pour tout z tel que $|z| > R$, la série $\sum_{n\in\mathbb{N}} a_n z^n$ est (grossièrement) divergente.

Démonstration

1. On suppose ici $R > 0$.

   Si $|z| < R$ alors, par définition de la borne supérieure (=plus petit majorant), il existe r tel que $|z| < r \leqslant R$ et tel que la suite $(a_n r^n)$ est bornée. Le résultat découle alors directement du lemme d'Abel.
2. On suppose ici R réel fini.

   Si $|z| > R$ alors, par définition de la borne supérieure, la suite $(a_n z^n)$ n'est pas bornée.

Théorème 2

Soit $\sum_{n \in \mathbb{N}} a_n z^n$ une série entière de rayon de convergence R.

1. Si $R > 0$, alors :
   pour tout z tel que $|z| < R$, la série $\sum_{n \in \mathbb{N}} a_n z^n$ est absolument convergente.
2. Si $R < +\infty$ alors :
   pour tout z tel que $|z| > R$, la série $\sum_{n \in \mathbb{N}} a_n z^n$ est (grossièrement) divergente.

Démonstration

1. On suppose ici $R > 0$.

   Si $|z| < R$ alors, par définition de la borne supérieure (=plus petit majorant), il existe r tel que $|z| < r \leqslant R$ et tel que la suite $(a_n r^n)$ est bornée. Le résultat découle alors directement du lemme d'Abel.

2. On suppose ici R réel fini.

   Si $|z| > R$ alors, par définition de la borne supérieure, la suite $(a_n z^n)$ n'est pas bornée. La série $\sum_{n \in \mathbb{N}} a_n z^n$ est donc grossièrement divergente.

Ce qui est important pour l'étude d'une série entière est la recherche des z tels que la suite $(a_n z^n)$ soit bornée.

Théorème 2

Soit $\sum_{n\in\mathbb{N}} a_n z^n$ une série entière de rayon de convergence R.

1. Si $R > 0$, alors :
   pour tout z tel que $|z| < R$, la série $\sum_{n\in\mathbb{N}} a_n z^n$ est absolument convergente.
2. Si $R < +\infty$ alors :
   pour tout z tel que $|z| > R$, la série $\sum_{n\in\mathbb{N}} a_n z^n$ est (grossièrement) divergente.

Démonstration

1. On suppose ici $R > 0$.

   Si $|z| < R$ alors, par définition de la borne supérieure (=plus petit majorant), il existe r tel que $|z| < r \leqslant R$ et tel que la suite $(a_n r^n)$ est bornée. Le résultat découle alors directement du lemme d'Abel.

2. On suppose ici R réel fini.

   Si $|z| > R$ alors, par définition de la borne supérieure, la suite $(a_n z^n)$ n'est pas bornée. La série $\sum_{n\in\mathbb{N}} a_n z^n$ est donc grossièrement divergente.

Ce qui est important pour l'étude d'une série entière est la recherche des z tels que la suite $(a_n z^n)$ soit bornée.

Cependant, d'autres caractérisations du rayon de convergence peuvent être utiles.

Proposition 1

Soit $\sum_{n\in\mathbb{N}} a_n z^n$ une série entière. Son rayon de convergence R peut être défini par l'une des égalités suivantes :

a) $R = \sup\{|z| \text{ tq la série } \sum a_n z^n \text{ est absolument convergente}\}$;

b) $R = \sup\{|z| \text{ tq la série } \sum a_n z^n \text{ est convergente}\}$;

c) $R = \sup\left\{|z| \text{ tq } \lim\limits_{n\to+\infty} a_n z^n = 0\right\}$;

d) $R = \sup\{|z| \text{ tq la suite } (a_n z^n) \text{ est bornée}\}$.

Proposition 1

Soit $\sum_{n\in\mathbb{N}} a_n z^n$ une série entière. Son rayon de convergence R peut être défini par l'une des égalités suivantes :

a) $R = \sup\{|z| \text{ tq la série } \sum a_n z^n \text{ est absolument convergente}\}$;

b) $R = \sup\{|z| \text{ tq la série } \sum a_n z^n \text{ est convergente}\}$;

c) $R = \sup\left\{|z| \text{ tq } \lim_{n\to+\infty} a_n z^n = 0\right\}$;

d) $R = \sup\{|z| \text{ tq la suite } (a_n z^n) \text{ est bornée}\}$.

Démonstration

Notons $E_a = \{|z| \text{ tq la série } \sum a_n z^n \text{ est absolument convergente}\}$ et $R_a = \sup E_a$; notons de même E_b, E_c et E_d les trois autres ensembles de l'énoncé, et R_b, R_c et R_d leurs bornes supérieures (dans $\overline{\mathbb{R}}$).

Proposition 1

Soit $\sum\limits_{n \in \mathbb{N}} a_n z^n$ une série entière. Son rayon de convergence R peut être défini par l'une des égalités suivantes :

a) $R = \sup \{|z| \text{ tq la série } \sum a_n z^n \text{ est absolument convergente}\}$;

b) $R = \sup \{|z| \text{ tq la série } \sum a_n z^n \text{ est convergente}\}$;

c) $R = \sup \left\{|z| \text{ tq } \lim\limits_{n \to +\infty} a_n z^n = 0\right\}$;

d) $R = \sup \{|z| \text{ tq la suite } (a_n z^n) \text{ est bornée}\}$.

Démonstration

Notons $E_a = \{|z| \text{ tq la série } \sum a_n z^n \text{ est absolument convergente}\}$ et $R_a = \sup E_a$; notons de même E_b, E_c et E_d les trois autres ensembles de l'énoncé, et R_b, R_c et R_d leurs bornes supérieures (dans $\overline{\mathbb{R}}$).

- Par définition, le rayon de convergence de la série entière est $R = R_d$.

Proposition 1

Soit $\sum_{n\in\mathbb{N}} a_n z^n$ une série entière. Son rayon de convergence R peut être défini par l'une des égalités suivantes :

a) $R = \sup\left\{|z| \text{ tq la série } \sum a_n z^n \text{ est absolument convergente}\right\}$;

b) $R = \sup\left\{|z| \text{ tq la série } \sum a_n z^n \text{ est convergente}\right\}$;

c) $R = \sup\left\{|z| \text{ tq } \lim\limits_{n\to+\infty} a_n z^n = 0\right\}$;

d) $R = \sup\left\{|z| \text{ tq la suite } (a_n z^n) \text{ est bornée}\right\}$.

Démonstration

Notons $E_a = \left\{|z| \text{ tq la série } \sum a_n z^n \text{ est absolument convergente}\right\}$ et $R_a = \sup E_a$; notons de même E_b, E_c et E_d les trois autres ensembles de l'énoncé, et R_b, R_c et R_d leurs bornes supérieures (dans $\overline{\mathbb{R}}$).

- Par définition, le rayon de convergence de la série entière est $R = R_d$.
- Puisque $E_a \subset E_b \subset E_c \subset E_d$, on a $R_a \leqslant R_b \leqslant R_c \leqslant R_d$.

Proposition 1

Soit $\sum_{n\in\mathbb{N}} a_n z^n$ une série entière. Son rayon de convergence R peut être défini par l'une des égalités suivantes :

a) $R = \sup\left\{|z| \text{ tq la série } \sum a_n z^n \text{ est absolument convergente}\right\}$;

b) $R = \sup\left\{|z| \text{ tq la série } \sum a_n z^n \text{ est convergente}\right\}$;

c) $R = \sup\left\{|z| \text{ tq } \lim\limits_{n\to+\infty} a_n z^n = 0\right\}$;

d) $R = \sup\left\{|z| \text{ tq la suite } (a_n z^n) \text{ est bornée}\right\}$.

Démonstration

Notons $E_a = \{|z| \text{ tq la série } \sum a_n z^n \text{ est absolument convergente}\}$ et $R_a = \sup E_a$; notons de même E_b, E_c et E_d les trois autres ensembles de l'énoncé, et R_b, R_c et R_d leurs bornes supérieures (dans $\overline{\mathbb{R}}$).

- Par définition, le rayon de convergence de la série entière est $R = R_d$.
- Puisque $E_a \subset E_b \subset E_c \subset E_d$, on a $R_a \leqslant R_b \leqslant R_c \leqslant R_d$.
- Si $R_d = 0$ ou $R_d = +\infty$, c'est terminé (cf. les remarques précédentes).

Proposition 1

Soit $\sum_{n\in\mathbb{N}} a_n z^n$ une série entière. Son rayon de convergence R peut être défini par l'une des égalités suivantes :

a) $R = \sup\left\{|z| \text{ tq la série } \sum a_n z^n \text{ est absolument convergente}\right\}$;

b) $R = \sup\left\{|z| \text{ tq la série } \sum a_n z^n \text{ est convergente}\right\}$;

c) $R = \sup\left\{|z| \text{ tq } \lim\limits_{n\to+\infty} a_n z^n = 0\right\}$;

d) $R = \sup\left\{|z| \text{ tq la suite } (a_n z^n) \text{ est bornée}\right\}$.

Démonstration

Notons $E_a = \left\{|z| \text{ tq la série } \sum a_n z^n \text{ est absolument convergente}\right\}$ et $R_a = \sup E_a$; notons de même E_b, E_c et E_d les trois autres ensembles de l'énoncé, et R_b, R_c et R_d leurs bornes supérieures (dans $\overline{\mathbb{R}}$).

- Par définition, le rayon de convergence de la série entière est $R = R_d$.
- Puisque $E_a \subset E_b \subset E_c \subset E_d$, on a $R_a \leqslant R_b \leqslant R_c \leqslant R_d$.
- Si $R_d = 0$ ou $R_d = +\infty$, c'est terminé (cf. les remarques précédentes). Sinon, il reste donc à montrer $R_d \leqslant R_a$.

Proposition 1

Soit $\sum_{n\in\mathbb{N}} a_n z^n$ une série entière. Son rayon de convergence R peut être défini par l'une des égalités suivantes :

a) $R = \sup\left\{|z| \text{ tq la série } \sum a_n z^n \text{ est absolument convergente}\right\}$;

b) $R = \sup\left\{|z| \text{ tq la série } \sum a_n z^n \text{ est convergente}\right\}$;

c) $R = \sup\left\{|z| \text{ tq } \lim\limits_{n\to+\infty} a_n z^n = 0\right\}$;

d) $R = \sup\left\{|z| \text{ tq la suite } (a_n z^n) \text{ est bornée}\right\}$.

Démonstration

Notons $E_a = \{|z| \text{ tq la série } \sum a_n z^n \text{ est absolument convergente}\}$ et $R_a = \sup E_a$; notons de même E_b, E_c et E_d les trois autres ensembles de l'énoncé, et R_b, R_c et R_d leurs bornes supérieures (dans $\overline{\mathbb{R}}$).

- Par définition, le rayon de convergence de la série entière est $R = R_d$.
- Puisque $E_a \subset E_b \subset E_c \subset E_d$, on a $R_a \leqslant R_b \leqslant R_c \leqslant R_d$.
- Si $R_d = 0$ ou $R_d = +\infty$, c'est terminé (cf. les remarques précédentes). Sinon, il reste donc à montrer $R_d \leqslant R_a$.

  Par définition de la borne supérieure de E_d, pour tout $\varepsilon > 0$ il existe $z_0 \in E_d$ tel que $R_d - \varepsilon < |z_0| \leqslant R_d$. Puisque $R_d > 0$ on peut supposer ε assez petit pour que $R_d - \varepsilon > 0$; soit alors $z \in \mathbb{C}$ tel que $|z| = R_d - \varepsilon$. Puisque $z_0 \in E_d$, la suite $(a_n z_0^n)$ est bornée, donc d'après le lemme d'Abel, puisque $|z| < |z_0|$, la série $\sum_{n\in\mathbb{N}} a_n z^n$ est absolument convergente, c'est-à-dire $|z| \in E_a$.

Proposition 1

Soit $\sum\limits_{n\in\mathbb{N}} a_n z^n$ une série entière. Son rayon de convergence R peut être défini par l'une des égalités suivantes :

a) $R = \sup\left\{|z| \text{ tq la série } \sum a_n z^n \text{ est absolument convergente}\right\}$;

b) $R = \sup\left\{|z| \text{ tq la série } \sum a_n z^n \text{ est convergente}\right\}$;

c) $R = \sup\left\{|z| \text{ tq } \lim\limits_{n\to+\infty} a_n z^n = 0\right\}$;

d) $R = \sup\left\{|z| \text{ tq la suite } (a_n z^n) \text{ est bornée}\right\}$.

Démonstration

Notons $E_a = \left\{|z| \text{ tq la série } \sum a_n z^n \text{ est absolument convergente}\right\}$ et $R_a = \sup E_a$; notons de même E_b, E_c et E_d les trois autres ensembles de l'énoncé, et R_b, R_c et R_d leurs bornes supérieures (dans $\overline{\mathbb{R}}$).

- Par définition, le rayon de convergence de la série entière est $R = R_d$.
- Puisque $E_a \subset E_b \subset E_c \subset E_d$, on a $R_a \leqslant R_b \leqslant R_c \leqslant R_d$.
- Si $R_d = 0$ ou $R_d = +\infty$, c'est terminé (cf. les remarques précédentes). Sinon, il reste donc à montrer $R_d \leqslant R_a$.

  Par définition de la borne supérieure de E_d, pour tout $\varepsilon > 0$ il existe $z_0 \in E_d$ tel que $R_d - \varepsilon < |z_0| \leqslant R_d$. Puisque $R_d > 0$ on peut supposer ε assez petit pour que $R_d - \varepsilon > 0$; soit alors $z \in \mathbb{C}$ tel que $|z| = R_d - \varepsilon$. Puisque $z_0 \in E_d$, la suite $(a_n z_0^n)$ est bornée, donc d'après le lemme d'Abel, puisque $|z| < |z_0|$, la série $\sum\limits_{n\in\mathbb{N}} a_n z^n$ est absolument convergente, c'est-à-dire $|z| \in E_a$.

  Il en résulte $|z| \leqslant R_a$ c'est-à-dire $R_d - \varepsilon \leqslant R_a$;

Proposition 1

Soit $\sum_{n\in\mathbb{N}} a_n z^n$ une série entière. Son rayon de convergence R peut être défini par l'une des égalités suivantes :

a) $R = \sup\left\{|z| \text{ tq la série } \sum a_n z^n \text{ est absolument convergente}\right\}$;

b) $R = \sup\left\{|z| \text{ tq la série } \sum a_n z^n \text{ est convergente}\right\}$;

c) $R = \sup\left\{|z| \text{ tq } \lim_{n\to+\infty} a_n z^n = 0\right\}$;

d) $R = \sup\left\{|z| \text{ tq la suite } (a_n z^n) \text{ est bornée}\right\}$.

Démonstration

Notons $E_a = \{|z| \text{ tq la série } \sum a_n z^n \text{ est absolument convergente}\}$ et $R_a = \sup E_a$; notons de même E_b, E_c et E_d les trois autres ensembles de l'énoncé, et R_b, R_c et R_d leurs bornes supérieures (dans $\overline{\mathbb{R}}$).

- Par définition, le rayon de convergence de la série entière est $R = R_d$.
- Puisque $E_a \subset E_b \subset E_c \subset E_d$, on a $R_a \leqslant R_b \leqslant R_c \leqslant R_d$.
- Si $R_d = 0$ ou $R_d = +\infty$, c'est terminé (cf. les remarques précédentes). Sinon, il reste donc à montrer $R_d \leqslant R_a$.

  Par définition de la borne supérieure de E_d, pour tout $\varepsilon > 0$ il existe $z_0 \in E_d$ tel que $R_d - \varepsilon < |z_0| \leqslant R_d$. Puisque $R_d > 0$ on peut supposer ε assez petit pour que $R_d - \varepsilon > 0$; soit alors $z \in \mathbb{C}$ tel que $|z| = R_d - \varepsilon$. Puisque $z_0 \in E_d$, la suite $(a_n z_0^n)$ est bornée, donc d'après le lemme d'Abel, puisque $|z| < |z_0|$, la série $\sum_{n\in\mathbb{N}} a_n z^n$ est absolument convergente, c'est-à-dire $|z| \in E_a$.

  Il en résulte $|z| \leqslant R_a$ c'est-à-dire $R_d - \varepsilon \leqslant R_a$; cela étant vrai pour tout $\varepsilon > 0$ assez petit, on en déduit $R_d \leqslant R_a$: cqfd.

Définition 3

Soit $\sum\limits_{n\in\mathbb{N}} a_n z^n$ une série entière de rayon de convergence $R > 0$.

On appelle disque ouvert de convergence de cette série entière l'ensemble

$$D = \{z \in \mathbb{C} \text{ tq } |z| < R\} \quad \text{(boule ouverte de centre 0 et de rayon } R\text{)}.$$

Rem : Dans le cas d'une série entière $\sum\limits_{n\in\mathbb{N}} a_n x^n$ de la variable réelle x, on parle alors de l'intervalle ouvert de convergence $]-R\,;R[$.

Définition 3

Soit $\sum_{n\in\mathbb{N}} a_n z^n$ une série entière de rayon de convergence $R > 0$.

On appelle disque ouvert de convergence de cette série entière l'ensemble

$$D = \{z \in \mathbb{C} \text{ tq } |z| < R\} \quad \text{(boule ouverte de centre 0 et de rayon } R\text{)}.$$

Rem : Dans le cas d'une série entière $\sum_{n\in\mathbb{N}} a_n x^n$ de la variable réelle x, on parle alors de l'intervalle ouvert de convergence $]-R\,;R[$.

Ce disque ouvert de convergence est donc caractérisé par les propriétés suivantes :

- Si $z \in D$, la série entière $\sum_{n\in\mathbb{N}} a_n z^n$ est absolument convergente.
- Si $z \notin \overline{D}$, la série entière $\sum_{n\in\mathbb{N}} a_n z^n$ est (grossièrement) divergente.
- Si $|z| = R$ on ne peut rien dire *a priori* (le cercle de centre 0 et de rayon R s'appelle parfois le cercle d'incertitude).

Détermination du rayon de convergence : application de la définition.

Les remarques qui suivent découlent directement de la définition du rayon de convergence d'une série entière (ou de l'une des définitions équivalentes vues plus haut), et peuvent aider à sa détermination (ou à un encadrement).

Détermination du rayon de convergence : application de la définition.

Les remarques qui suivent découlent directement de la définition du rayon de convergence d'une série entière (ou de l'une des définitions équivalentes vues plus haut), et peuvent aider à sa détermination (ou à un encadrement).

Soit $\sum_{n\in\mathbb{N}} a_n z^n$ une série entière et R son rayon de convergence.

Détermination du rayon de convergence : application de la définition.

Les remarques qui suivent découlent directement de la définition du rayon de convergence d'une série entière (ou de l'une des définitions équivalentes vues plus haut), et peuvent aider à sa détermination (ou à un encadrement).

Soit $\sum_{n\in\mathbb{N}} a_n z^n$ une série entière et R son rayon de convergence.

- Si la série $\sum a_n z^n$ converge pour $z = z_0$, alors $R \geqslant |z_0|$.

Détermination du rayon de convergence : application de la définition.

Les remarques qui suivent découlent directement de la définition du rayon de convergence d'une série entière (ou de l'une des définitions équivalentes vues plus haut), et peuvent aider à sa détermination (ou à un encadrement).

Soit $\sum_{n \in \mathbb{N}} a_n z^n$ une série entière et R son rayon de convergence.

- Si la série $\sum a_n z^n$ converge pour $z = z_0$, alors $R \geqslant |z_0|$.
- Si la série $\sum a_n z^n$ diverge pour $z = z_1$ alors $R \leqslant |z_1|$.

Détermination du rayon de convergence : application de la définition.

Les remarques qui suivent découlent directement de la définition du rayon de convergence d'une série entière (ou de l'une des définitions équivalentes vues plus haut), et peuvent aider à sa détermination (ou à un encadrement).

Soit $\sum_{n\in\mathbb{N}} a_n z^n$ une série entière et R son rayon de convergence.

- Si la série $\sum a_n z^n$ converge pour $z = z_0$, alors $R \geqslant |z_0|$.
- Si la série $\sum a_n z^n$ diverge pour $z = z_1$ alors $R \leqslant |z_1|$.
- Si la série $\sum a_n z^n$ converge non absolument pour $z = z_2$, alors $R = |z_2|$.

Détermination du rayon de convergence : application de la définition.

Les remarques qui suivent découlent directement de la définition du rayon de convergence d'une série entière (ou de l'une des définitions équivalentes vues plus haut), et peuvent aider à sa détermination (ou à un encadrement).

Soit $\sum_{n\in\mathbb{N}} a_n z^n$ une série entière et R son rayon de convergence.

- Si la série $\sum a_n z^n$ converge pour $z = z_0$, alors $R \geqslant |z_0|$.
- Si la série $\sum a_n z^n$ diverge pour $z = z_1$ alors $R \leqslant |z_1|$.
- Si la série $\sum a_n z^n$ converge non absolument pour $z = z_2$, alors $R = |z_2|$.
- Si la suite $(a_n z^n)$ est bornée pour $z = z_0$, alors $R \geqslant |z_0|$.

Détermination du rayon de convergence : application de la définition.

Les remarques qui suivent découlent directement de la définition du rayon de convergence d'une série entière (ou de l'une des définitions équivalentes vues plus haut), et peuvent aider à sa détermination (ou à un encadrement).

Soit $\sum\limits_{n\in\mathbb{N}} a_n z^n$ une série entière et R son rayon de convergence.

- Si la série $\sum a_n z^n$ converge pour $z = z_0$, alors $R \geqslant |z_0|$.
- Si la série $\sum a_n z^n$ diverge pour $z = z_1$ alors $R \leqslant |z_1|$.
- Si la série $\sum a_n z^n$ converge non absolument pour $z = z_2$, alors $R = |z_2|$.
- Si la suite $(a_n z^n)$ est bornée pour $z = z_0$, alors $R \geqslant |z_0|$.
- Si la suite $(a_n z^n)$ ne converge pas vers 0 pour $z = z_1$, alors $R \leqslant |z_1|$.

Détermination du rayon de convergence : application de la définition.

Les remarques qui suivent découlent directement de la définition du rayon de convergence d'une série entière (ou de l'une des définitions équivalentes vues plus haut), et peuvent aider à sa détermination (ou à un encadrement).

Soit $\sum_{n\in\mathbb{N}} a_n z^n$ une série entière et R son rayon de convergence.

- Si la série $\sum a_n z^n$ converge pour $z = z_0$, alors $R \geqslant |z_0|$.
- Si la série $\sum a_n z^n$ diverge pour $z = z_1$ alors $R \leqslant |z_1|$.
- Si la série $\sum a_n z^n$ converge non absolument pour $z = z_2$, alors $R = |z_2|$.
- Si la suite $(a_n z^n)$ est bornée pour $z = z_0$, alors $R \geqslant |z_0|$.
- Si la suite $(a_n z^n)$ ne converge pas vers 0 pour $z = z_1$, alors $R \leqslant |z_1|$.
- Si la suite $(a_n z^n)$ est bornée mais ne converge pas vers 0 pour $z = z_2$, alors $R = |z_2|$.

Exemples

1. $\displaystyle\sum_{n\in\mathbb{N}^*} \frac{z^n}{n}$ est semi-convergente pour $z=-1$: son rayon de convergence est donc $R=1$.

Exemples

1. $\displaystyle\sum_{n\in\mathbb{N}^*} \frac{z^n}{n}$ est semi-convergente pour $z = -1$: son rayon de convergence est donc $R = 1$.

   On peut aussi dire : la série diverge pour $z = 1$, donc $R \leqslant 1$; et elle converge absolument pour $|z| < 1$ (par comparaison à la série géométrique de terme général $|z|^n$), donc $R \geqslant 1$.

Exemples

1. $\displaystyle\sum_{n\in\mathbb{N}^*} \frac{z^n}{n}$ est semi-convergente pour $z=-1$: son rayon de convergence est donc $R=1$.

   On peut aussi dire : la série diverge pour $z=1$, donc $R \leqslant 1$; et elle converge absolument pour $|z|<1$ (par comparaison à la série géométrique de terme général $|z|^n$), donc $R \geqslant 1$.

2. $\displaystyle\sum_{n\in\mathbb{N}^*} \frac{z^n}{n^2}$ converge (absolument) pour $z=1$: son rayon de convergence R est donc supérieur ou égal à 1;

Exemples

1. $\displaystyle\sum_{n\in\mathbb{N}^*} \frac{z^n}{n}$ est semi-convergente pour $z=-1$: son rayon de convergence est donc $R=1$.

   On peut aussi dire : la série diverge pour $z=1$, donc $R\leqslant 1$; et elle converge absolument pour $|z|<1$ (par comparaison à la série géométrique de terme général $|z|^n$), donc $R\geqslant 1$.

2. $\displaystyle\sum_{n\in\mathbb{N}^*} \frac{z^n}{n^2}$ converge (absolument) pour $z=1$: son rayon de convergence R est donc supérieur ou égal à 1; puisque la suite $\left(\dfrac{z^n}{n^2}\right)$ ne converge pas vers 0 dès que $|z|>1$, on a : $R\leqslant 1$.

Exemples

1. $\sum_{n\in\mathbb{N}^*} \frac{z^n}{n}$ est semi-convergente pour $z=-1$: son rayon de convergence est donc $R=1$.

   On peut aussi dire : la série diverge pour $z=1$, donc $R \leqslant 1$; et elle converge absolument pour $|z|<1$ (par comparaison à la série géométrique de terme général $|z|^n$), donc $R \geqslant 1$.

2. $\sum_{n\in\mathbb{N}^*} \frac{z^n}{n^2}$ converge (absolument) pour $z=1$: son rayon de convergence R est donc supérieur ou égal à 1; puisque la suite $\left(\frac{z^n}{n^2}\right)$ ne converge pas vers 0 dès que $|z|>1$, on a : $R \leqslant 1$. En définitive, $R=1$.

3. $\sum_{n\in\mathbb{N}} \frac{z^n}{(3+(-1)^n)^n}$:

Exemples

1. $\sum_{n\in\mathbb{N}^*} \frac{z^n}{n}$ est semi-convergente pour $z = -1$: son rayon de convergence est donc $R = 1$.

   On peut aussi dire : la série diverge pour $z = 1$, donc $R \leqslant 1$; et elle converge absolument pour $|z| < 1$ (par comparaison à la série géométrique de terme général $|z|^n$), donc $R \geqslant 1$.

2. $\sum_{n\in\mathbb{N}^*} \frac{z^n}{n^2}$ converge (absolument) pour $z = 1$: son rayon de convergence R est donc supérieur ou égal à 1; puisque la suite $\left(\frac{z^n}{n^2}\right)$ ne converge pas vers 0 dès que $|z| > 1$, on a : $R \leqslant 1$. En définitive, $R = 1$.

3. $\sum_{n\in\mathbb{N}} \frac{z^n}{(3+(-1)^n)^n}$: $\left|\frac{z^n}{(3+(-1)^n)^n}\right| \leqslant \frac{|z|^n}{2^n}$: cette suite est donc bornée pour $z = 2$, mais elle ne converge pas vers 0 lorsque $z = 2$, donc $R = 2$.

Les deux premiers exemples sont un cas particulier du résultat suivant, qui figure désormais au programme, donc qui peut être utilisé directement.

Proposition 2

Pour tout réel α, le rayon de convergence R de la série entière $\sum_{n\in\mathbb{N}^*} n^\alpha z^n$ est égal à 1.

Exemples

1. $\displaystyle\sum_{n\in\mathbb{N}^*} \frac{z^n}{n}$ est semi-convergente pour $z=-1$: son rayon de convergence est donc $R=1$.

   On peut aussi dire : la série diverge pour $z=1$, donc $R\leqslant 1$; et elle converge absolument pour $|z|<1$ (par comparaison à la série géométrique de terme général $|z|^n$), donc $R\geqslant 1$.

2. $\displaystyle\sum_{n\in\mathbb{N}^*} \frac{z^n}{n^2}$ converge (absolument) pour $z=1$: son rayon de convergence R est donc supérieur ou égal à 1; puisque la suite $\left(\dfrac{z^n}{n^2}\right)$ ne converge pas vers 0 dès que $|z|>1$, on a : $R\leqslant 1$. En définitive, $R=1$.

3. $\displaystyle\sum_{n\in\mathbb{N}} \frac{z^n}{(3+(-1)^n)^n}$: $\left|\dfrac{z^n}{(3+(-1)^n)^n}\right| \leqslant \dfrac{|z|^n}{2^n}$: cette suite est donc bornée pour $z=2$, mais elle ne converge pas vers 0 lorsque $z=2$, donc $R=2$.

Les deux premiers exemples sont un cas particulier du résultat suivant, qui figure désormais au programme, donc qui peut être utilisé directement.

Proposition 2

Pour tout réel α, le rayon de convergence R de la série entière $\displaystyle\sum_{n\in\mathbb{N}^*} n^\alpha z^n$ est égal à 1.

Démonstration

Soit $r\geqslant 0$. D'après les règles dites « de croissances comparées », quel que soit le signe de α, la suite $n^\alpha r^n$ tend vers 0 (donc est bornée) si $r<1$ et tend vers $+\infty$ si $r>1$.

Exemples

1. $\sum_{n\in\mathbb{N}^*} \frac{z^n}{n}$ est semi-convergente pour $z = -1$: son rayon de convergence est donc $R = 1$.

   On peut aussi dire : la série diverge pour $z = 1$, donc $R \leqslant 1$; et elle converge absolument pour $|z| < 1$ (par comparaison à la série géométrique de terme général $|z|^n$), donc $R \geqslant 1$.

2. $\sum_{n\in\mathbb{N}^*} \frac{z^n}{n^2}$ converge (absolument) pour $z = 1$: son rayon de convergence R est donc supérieur ou égal à 1; puisque la suite $\left(\frac{z^n}{n^2}\right)$ ne converge pas vers 0 dès que $|z| > 1$, on a : $R \leqslant 1$. En définitive, $R = 1$.

3. $\sum_{n\in\mathbb{N}} \frac{z^n}{(3+(-1)^n)^n}$: $\left|\frac{z^n}{(3+(-1)^n)^n}\right| \leqslant \frac{|z|^n}{2^n}$: cette suite est donc bornée pour $z = 2$, mais elle ne converge pas vers 0 lorsque $z = 2$, donc $R = 2$.

Les deux premiers exemples sont un cas particulier du résultat suivant, qui figure désormais au programme, donc qui peut être utilisé directement.

Proposition 2

Pour tout réel α, le rayon de convergence R de la série entière $\sum_{n\in\mathbb{N}^*} n^\alpha z^n$ est égal à 1.

Démonstration

Soit $r \geqslant 0$. D'après les règles dites « de croissances comparées », quel que soit le signe de α, la suite $n^\alpha r^n$ tend vers 0 (donc est bornée) si $r < 1$ et tend vers $+\infty$ si $r > 1$.

Directement par définition du rayon de convergence, on a $R = 1$.

Détermination du rayon de convergence : utilisation des règles de comparaison.

Théorème 3

Soient $\sum\limits_{n\in\mathbb{N}} a_n z^n$ et $\sum\limits_{n\in\mathbb{N}} b_n z^n$ deux séries entières de rayons de convergences respectifs R_a et R_b.

1. Si $a_n \underset{n\to+\infty}{\sim} b_n$, alors $R_a = R_b$.
2. Si $|a_n| \leqslant |b_n|$ (au moins à partir d'un certain rang), alors $R_a \geqslant R_b$.
3. Si $a_n = O(b_n)$ ou $a_n = o(b_n)$, alors $R_a \geqslant R_b$.

Détermination du rayon de convergence : utilisation des règles de comparaison.

Théorème 3

Soient $\sum\limits_{n\in\mathbb{N}} a_n z^n$ et $\sum\limits_{n\in\mathbb{N}} b_n z^n$ deux séries entières de rayons de convergences respectifs R_a et R_b.

1. Si $a_n \underset{n\to+\infty}{\sim} b_n$, alors $R_a = R_b$.
2. Si $|a_n| \leqslant |b_n|$ (au moins à partir d'un certain rang), alors $R_a \geqslant R_b$.
3. Si $a_n = O(b_n)$ ou $a_n = o(b_n)$, alors $R_a \geqslant R_b$.

Démonstration

1. Si $a_n \underset{n\to+\infty}{\sim} b_n$, alors $(a_n z^n)$ bornée $\iff$ $(b_n z^n)$ bornée d'où l'égalité des rayons de convergence.

Détermination du rayon de convergence : utilisation des règles de comparaison.

Théorème 3

Soient $\sum\limits_{n\in\mathbb{N}} a_n z^n$ et $\sum\limits_{n\in\mathbb{N}} b_n z^n$ deux séries entières de rayons de convergences respectifs R_a et R_b.

1. Si $a_n \underset{n\to+\infty}{\sim} b_n$, alors $R_a = R_b$.
2. Si $|a_n| \leqslant |b_n|$ (au moins à partir d'un certain rang), alors $R_a \geqslant R_b$.
3. Si $a_n = O(b_n)$ ou $a_n = o(b_n)$, alors $R_a \geqslant R_b$.

Démonstration

1. Si $a_n \underset{n\to+\infty}{\sim} b_n$, alors $(a_n z^n)$ bornée $\iff$ $(b_n z^n)$ bornée d'où l'égalité des rayons de convergence.
2. Supposons $|a_n| \leqslant |b_n|$. Pour tout z tel que $|z| < R_b$, la série $\sum\limits_{n\in\mathbb{N}} |b_n|\,|z|^n$ converge, donc puisque $0 \leqslant |a_n|\,|z|^n \leqslant |b_n|\,|z|^n$, la série $\sum\limits_{n\in\mathbb{N}} |a_n|\,|z|^n$ converge également, donc $|z| \leqslant R_a$.

Détermination du rayon de convergence : utilisation des règles de comparaison.

Théorème 3

Soient $\sum_{n\in\mathbb{N}} a_n z^n$ et $\sum_{n\in\mathbb{N}} b_n z^n$ deux séries entières de rayons de convergences respectifs R_a et R_b.

1. Si $a_n \underset{n\to+\infty}{\sim} b_n$, alors $R_a = R_b$.
2. Si $|a_n| \leqslant |b_n|$ (au moins à partir d'un certain rang), alors $R_a \geqslant R_b$.
3. Si $a_n = O(b_n)$ ou $a_n = o(b_n)$, alors $R_a \geqslant R_b$.

Démonstration

1. Si $a_n \underset{n\to+\infty}{\sim} b_n$, alors $(a_n z^n)$ bornée $\iff$ $(b_n z^n)$ bornée d'où l'égalité des rayons de convergence.
2. Supposons $|a_n| \leqslant |b_n|$. Pour tout z tel que $|z| < R_b$, la série $\sum_{n\in\mathbb{N}} |b_n|\,|z|^n$ converge, donc puisque $0 \leqslant |a_n|\,|z|^n \leqslant |b_n|\,|z|^n$, la série $\sum_{n\in\mathbb{N}} |a_n|\,|z|^n$ converge également, donc $|z| \leqslant R_a$.

   Ainsi : $\forall\, z \in \mathbb{C}\ ,\ |z| < R_b \Longrightarrow |z| \leqslant R_a$. Cela implique $R_b \leqslant R_a$ (détailler...).

Détermination du rayon de convergence : utilisation des règles de comparaison.

Théorème 3

Soient $\sum\limits_{n\in\mathbb{N}} a_n z^n$ et $\sum\limits_{n\in\mathbb{N}} b_n z^n$ deux séries entières de rayons de convergences respectifs R_a et R_b.

1. Si $a_n \underset{n\to+\infty}{\sim} b_n$, alors $R_a = R_b$.
2. Si $|a_n| \leqslant |b_n|$ (au moins à partir d'un certain rang), alors $R_a \geqslant R_b$.
3. Si $a_n = O(b_n)$ ou $a_n = o(b_n)$, alors $R_a \geqslant R_b$.

Démonstration

1. Si $a_n \underset{n\to+\infty}{\sim} b_n$, alors $(a_n z^n)$ bornée $\iff$ $(b_n z^n)$ bornée d'où l'égalité des rayons de convergence.
2. Supposons $|a_n| \leqslant |b_n|$. Pour tout z tel que $|z| < R_b$, la série $\sum\limits_{n\in\mathbb{N}} |b_n| \, |z|^n$ converge, donc puisque $0 \leqslant |a_n| \, |z|^n \leqslant |b_n| \, |z|^n$, la série $\sum\limits_{n\in\mathbb{N}} |a_n| \, |z|^n$ converge également, donc $|z| \leqslant R_a$.

   Ainsi : $\forall\, z \in \mathbb{C}$, $|z| < R_b \Longrightarrow |z| \leqslant R_a$. Cela implique $R_b \leqslant R_a$ (détailler...).
3. Conséquence immédiate du résultat précédent puisque $a_n = O(b_n)$ s'écrit : $\exists M \in \mathbb{R}_+$ tq $|a_n| \leqslant M\,|b_n|$.

Exemple 1

Rayon de convergence de la série entière $\sum_{n\in\mathbb{N}} a_n z^n$ où a_n désigne la n-ième décimale après la virgule dans l'écriture décimale illimitée de π.

Exemple 1

Rayon de convergence de la série entière $\sum_{n\in\mathbb{N}} a_n z^n$ où a_n désigne la n-ième décimale après la virgule dans l'écriture décimale illimitée de π.

Solution

On a $a_n \leqslant 9$ pour tout n donc le rayon de convergence R de la série entière $\sum_{n\in\mathbb{N}} a_n z^n$ est supérieure à celui de la série entière $\sum_{n\in\mathbb{N}} 9z^n$, qui est égal à 1 (série géométrique de raison z) :

$$R \geqslant 1.$$

Exemple 1

Rayon de convergence de la série entière $\sum_{n\in\mathbb{N}} a_n z^n$ où a_n désigne la n-ième décimale après la virgule dans l'écriture décimale illimitée de π.

Solution

On a $a_n \leqslant 9$ pour tout n donc le rayon de convergence R de la série entière $\sum_{n\in\mathbb{N}} a_n z^n$ est supérieure à celui de la série entière $\sum_{n\in\mathbb{N}} 9z^n$, qui est égal à 1 (série géométrique de raison z) :

$$R \geqslant 1.$$

De plus la série numérique $\sum_{n\in\mathbb{N}} a_n$ diverge puisque son terme général ne tend pas vers 0 : en effet, si la suite (a_n) tendait vers 0, comme il s'agit d'une suite d'entiers, elle serait constante égale à 0 à partir d'un certain rang, et le nombre π serait un nombre décimal....

Exemple 1

Rayon de convergence de la série entière $\sum_{n\in\mathbb{N}} a_n z^n$ où a_n désigne la n-ième décimale après la virgule dans l'écriture décimale illimitée de π.

Solution

On a $a_n \leqslant 9$ pour tout n donc le rayon de convergence R de la série entière $\sum_{n\in\mathbb{N}} a_n z^n$ est supérieure à celui de la série entière $\sum_{n\in\mathbb{N}} 9z^n$, qui est égal à 1 (série géométrique de raison z) :

$$R \geqslant 1.$$

De plus la série numérique $\sum_{n\in\mathbb{N}} a_n$ diverge puisque son terme général ne tend pas vers 0 : en effet, si la suite (a_n) tendait vers 0, comme il s'agit d'une suite d'entiers, elle serait constante égale à 0 à partir d'un certain rang, et le nombre π serait un nombre décimal....
Puisque la série entière $\sum_{n\in\mathbb{N}} a_n z^n$ diverge pour $z = 1$ on a

$$R \leqslant 1$$

et finalement, $R = 1$.

Exemple 2

Rayon de convergence de la série entière $\sum_{n\in\mathbb{N}^*} d_n z^n$ où d_n est le nombre de diviseurs de n.

Exemple 2

Rayon de convergence de la série entière $\sum\limits_{n\in\mathbb{N}^*} d_n z^n$ où d_n est le nombre de diviseurs de n.

Solution

Facilement, on a : $1 \leqslant d_n \leqslant n$ pour tout $n \in \mathbb{N}^*$,

Exemple 2

Rayon de convergence de la série entière $\sum_{n\in\mathbb{N}^*} d_n z^n$ où d_n est le nombre de diviseurs de n.

Solution

Facilement, on a : $1 \leqslant d_n \leqslant n$ pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, donc le rayon de convergence R de la série entière $\sum_{n\in\mathbb{N}^*} d_n z^n$ est compris entre celui de la série entière $\sum z^n$, qui vaut 1, et celui de la série entière $\sum nz^n$, qui vaut 1 aussi (cf. proposition 2).

Donc $R = 1$.

Exemple 2

Rayon de convergence de la série entière $\sum\limits_{n\in\mathbb{N}^*} d_n z^n$ où d_n est le nombre de diviseurs de n.

Exemple 3

Rayon de convergence de la série entière $\sum\limits_{n\in\mathbb{N}} (\cos n) z^n$. Quelle est sa somme ?

Exemple 2

Rayon de convergence de la série entière $\sum_{n\in\mathbb{N}^*} d_n z^n$ où d_n est le nombre de diviseurs de n.

Exemple 3

Rayon de convergence de la série entière $\sum_{n\in\mathbb{N}} (\cos n) z^n$. Quelle est sa somme ?

Solution

- Puisque $|\cos n| \leqslant 1$, le rayon de convergence R de la série entière $\sum_{n\in\mathbb{N}} (\cos n) z^n$ est supérieur à celui de la série entière $\sum z^n$, soit $R \geqslant 1$.

Exemple 2

Rayon de convergence de la série entière $\sum_{n\in\mathbb{N}^*} d_n z^n$ où d_n est le nombre de diviseurs de n.

Exemple 3

Rayon de convergence de la série entière $\sum_{n\in\mathbb{N}} (\cos n) z^n$. Quelle est sa somme ?

Solution

- Puisque $|\cos n| \leqslant 1$, le rayon de convergence R de la série entière $\sum_{n\in\mathbb{N}} (\cos n) z^n$ est supérieur à celui de la série entière $\sum z^n$, soit $R \geqslant 1$.

  On sait (exercice classique) que la suite $(\cos n)$ est divergente ; il en résulte que la série $\sum \cos n$ diverge, donc $R \leqslant 1$.

Exemple 2

Rayon de convergence de la série entière $\sum_{n\in\mathbb{N}^*} d_n z^n$ où d_n est le nombre de diviseurs de n.

Exemple 3

Rayon de convergence de la série entière $\sum_{n\in\mathbb{N}} (\cos n) z^n$. Quelle est sa somme ?

Solution

- Puisque $|\cos n| \leqslant 1$, le rayon de convergence R de la série entière $\sum_{n\in\mathbb{N}} (\cos n) z^n$ est supérieur à celui de la série entière $\sum z^n$, soit $R \geqslant 1$.

  On sait (exercice classique) que la suite $(\cos n)$ est divergente ; il en résulte que la série $\sum \cos n$ diverge, donc $R \leqslant 1$.

  En conclusion, $R = 1$.

Exemple 2

Rayon de convergence de la série entière $\sum_{n\in\mathbb{N}^*} d_n z^n$ où d_n est le nombre de diviseurs de n.

Exemple 3

Rayon de convergence de la série entière $\sum_{n\in\mathbb{N}} (\cos n) z^n$. Quelle est sa somme ?

Solution

- Puisque $|\cos n| \leqslant 1$, le rayon de convergence R de la série entière $\sum_{n\in\mathbb{N}} (\cos n) z^n$ est supérieur à celui de la série entière $\sum z^n$, soit $R \geqslant 1$.

  On sait (exercice classique) que la suite $(\cos n)$ est divergente ; il en résulte que la série $\sum \cos n$ diverge, donc $R \leqslant 1$.

  En conclusion, $R = 1$.

- Pour $|z| < 1$ on a : $\displaystyle\sum_{n=0}^{+\infty} e^{in} z^n = \frac{1}{1 - e^{i} z}$ (série géométrique de raison ze^{i} avec $\left|ze^{i}\right| < 1$), et aussi $\displaystyle\sum_{n=0}^{+\infty} e^{-in} z^n = \frac{1}{1 - e^{-i} z}$.

Exemple 2

Rayon de convergence de la série entière $\sum\limits_{n\in\mathbb{N}^*} d_n z^n$ où d_n est le nombre de diviseurs de n.

Exemple 3

Rayon de convergence de la série entière $\sum\limits_{n\in\mathbb{N}} (\cos n) z^n$. Quelle est sa somme ?

Solution

- Puisque $|\cos n| \leqslant 1$, le rayon de convergence R de la série entière $\sum\limits_{n\in\mathbb{N}} (\cos n) z^n$ est supérieur à celui de la série entière $\sum z^n$, soit $R \geqslant 1$.

  On sait (exercice classique) que la suite $(\cos n)$ est divergente ; il en résulte que la série $\sum \cos n$ diverge, donc $R \leqslant 1$.

  En conclusion, $R = 1$.

- Pour $|z| < 1$ on a : $\sum\limits_{n=0}^{+\infty} \mathrm{e}^{\mathrm{i}n} z^n = \dfrac{1}{1 - \mathrm{e}^{\mathrm{i}} z}$ (série géométrique de raison $z\mathrm{e}^{\mathrm{i}}$ avec $\left|z\mathrm{e}^{\mathrm{i}}\right| < 1$), et aussi $\sum\limits_{n=0}^{+\infty} \mathrm{e}^{-\mathrm{i}n} z^n = \dfrac{1}{1 - \mathrm{e}^{-\mathrm{i}} z}$.

  On en déduit :

$$\sum_{n=0}^{+\infty} (\cos n) z^n = \frac{1}{2} \left(\frac{1}{1 - \mathrm{e}^{\mathrm{i}} z} + \frac{1}{1 - \mathrm{e}^{-\mathrm{i}} z} \right) = \dots \qquad \text{(à arranger si l'on veut).}$$

Exemple 4

Rayon de convergence de la série entière $\sum_{n\in\mathbb{N}} (\operatorname{ch} n) z^n$. Quelle est sa somme ?

Exemple 4

Rayon de convergence de la série entière $\sum_{n\in\mathbb{N}} (\operatorname{ch} n) z^n$. Quelle est sa somme ?

Solution

Puisque $\operatorname{ch} n \underset{n\to+\infty}{\sim} \frac{1}{2}\mathrm{e}^n$, le rayon de convergence R de la série entière $\sum_{n\in\mathbb{N}} (\operatorname{ch} n) z^n$ est égal à celui de la série entière $\sum_{n\in\mathbb{N}} \mathrm{e}^n z^n$, soit $R = \dfrac{1}{\mathrm{e}}$ (la série géométrique de raison $\mathrm{e}z$ converge si et seulement si $|\mathrm{e}z| < 1$).

Exemple 4

Rayon de convergence de la série entière $\sum_{n\in\mathbb{N}} (\operatorname{ch} n) z^n$. Quelle est sa somme ?

Solution

Puisque $\operatorname{ch} n \underset{n\to+\infty}{\sim} \frac{1}{2}\mathrm{e}^n$, le rayon de convergence R de la série entière $\sum_{n\in\mathbb{N}} (\operatorname{ch} n) z^n$ est égal à celui de la série entière $\sum_{n\in\mathbb{N}} \mathrm{e}^n z^n$, soit $R = \dfrac{1}{\mathrm{e}}$ (la série géométrique de raison $\mathrm{e}z$ converge si et seulement si $|\mathrm{e}z| < 1$).

Pour $|z| < \dfrac{1}{\mathrm{e}}$, on peut écrire

$$\sum_{n=0}^{+\infty} (\operatorname{ch} n) z^n = \frac{1}{2}\left(\sum_{n=0}^{+\infty} \mathrm{e}^n z^n + \sum_{n=0}^{+\infty} \mathrm{e}^{-n} z^n\right)$$

car les deux séries convergent.

Exemple 4

Rayon de convergence de la série entière $\sum_{n\in\mathbb{N}} (\operatorname{ch} n)z^n$. Quelle est sa somme ?

Solution

Puisque $\operatorname{ch} n \underset{n\to+\infty}{\sim} \frac{1}{2}\mathrm{e}^n$, le rayon de convergence R de la série entière $\sum_{n\in\mathbb{N}} (\operatorname{ch} n)z^n$ est égal à celui de la série entière $\sum_{n\in\mathbb{N}} \mathrm{e}^n z^n$, soit $R = \dfrac{1}{\mathrm{e}}$ (la série géométrique de raison $\mathrm{e}z$ converge si et seulement si $|\mathrm{e}z| < 1$).

Pour $|z| < \dfrac{1}{\mathrm{e}}$, on peut écrire

$$\sum_{n=0}^{+\infty} (\operatorname{ch} n)z^n = \frac{1}{2}\left(\sum_{n=0}^{+\infty} \mathrm{e}^n z^n + \sum_{n=0}^{+\infty} \mathrm{e}^{-n} z^n\right)$$

car les deux séries convergent. La somme cherchée est donc égale à $\dfrac{1}{2}\left(\dfrac{1}{1-\mathrm{e}z} + \dfrac{1}{1-\frac{z}{\mathrm{e}}}\right)\cdot$

Détermination du rayon de convergence : utilisation de la règle de d'Alembert.

On considère ici une série entière $\sum_{n\in\mathbb{N}} a_n z^n$ telle que, pour tout entier n, $a_n \neq 0$.

Pour tout $z \in \mathbb{C}^*$, la suite de terme général $u_n = a_n z^n$ ne s'annule donc pas. On peut alors essayer d'appliquer la règle de d'Alembert à la série à termes positifs $\sum |u_n|$, en étudiant la limite éventuelle lorsque $n \to +\infty$ du rapport $\dfrac{|u_{n+1}|}{|u_n|}$, c'est-à-dire de l'expression $\left|\dfrac{a_{n+1}}{a_n}\right| |z|$.

Détermination du rayon de convergence : utilisation de la règle de d'Alembert.

On considère ici une série entière $\sum_{n\in\mathbb{N}} a_n z^n$ telle que, pour tout entier n, $a_n \neq 0$.

Pour tout $z \in \mathbb{C}^*$, la suite de terme général $u_n = a_n z^n$ ne s'annule donc pas. On peut alors essayer d'appliquer la règle de d'Alembert à la série à termes positifs $\sum |u_n|$, en étudiant la limite éventuelle lorsque $n \to +\infty$ du rapport $\dfrac{|u_{n+1}|}{|u_n|}$, c'est-à-dire de l'expression $\left|\dfrac{a_{n+1}}{a_n}\right| |z|$.

On rappelle que, si $\ell = \lim\limits_{n\to+\infty} \dfrac{|u_{n+1}|}{|u_n|}$ existe (dans $\overline{\mathbb{R}}$) :

- si $\ell < 1$, la série de terme général u_n est absolument convergente ;
- et si $\ell > 1$, cette série est (grossièrement) divergente.

Exemple 1

Rayon de convergence de la série entière $\displaystyle\sum_{n\in\mathbb{N}^*} \frac{n!}{n^n} z^n$.

Exemple 1

Rayon de convergence de la série entière $\sum_{n\in\mathbb{N}^*} \frac{n!}{n^n} z^n$.

Solution

Pour $n \in \mathbb{N}^*$ et $z \neq 0$, posons $u_n = \frac{n!}{n^n} z^n$. Alors

$$\frac{|u_{n+1}|}{|u_n|} = \frac{(n+1)!}{(n+1)^{n+1}} \frac{n^n}{n!} |z| = \left(\frac{n}{n+1}\right)^n |z| .$$

Exemple 1

Rayon de convergence de la série entière $\displaystyle\sum_{n\in\mathbb{N}^*} \frac{n!}{n^n} z^n$.

Solution

Pour $n \in \mathbb{N}^*$ et $z \neq 0$, posons $u_n = \dfrac{n!}{n^n} z^n$. Alors

$$\frac{|u_{n+1}|}{|u_n|} = \frac{(n+1)!}{(n+1)^{n+1}} \frac{n^n}{n!} |z| = \left(\frac{n}{n+1}\right)^n |z| .$$

Or (calcul classique, déjà fait et à connaître) :

$$\lim_{n\to+\infty} \left(\frac{n+1}{n}\right)^n = \lim_{n\to+\infty} \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n = \lim_{n\to+\infty} \mathrm{e}^{n \ln\left(1+\frac{1}{n}\right)} = \mathrm{e} \qquad \left(\text{car } \ln\left(1+\tfrac{1}{n}\right) \underset{+\infty}{\sim} \tfrac{1}{n}\right)$$

Exemple 1

Rayon de convergence de la série entière $\displaystyle\sum_{n\in\mathbb{N}^*} \frac{n!}{n^n} z^n$.

Solution

Pour $n \in \mathbb{N}^*$ et $z \neq 0$, posons $u_n = \dfrac{n!}{n^n} z^n$. Alors

$$\frac{|u_{n+1}|}{|u_n|} = \frac{(n+1)!}{(n+1)^{n+1}} \frac{n^n}{n!} |z| = \left(\frac{n}{n+1}\right)^n |z| .$$

Or (calcul classique, déjà fait et à connaître) :

$$\lim_{n\to+\infty} \left(\frac{n+1}{n}\right)^n = \lim_{n\to+\infty} \left(1+\frac{1}{n}\right)^n = \lim_{n\to+\infty} \mathrm{e}^{n\ln\left(1+\frac{1}{n}\right)} = \mathrm{e} \qquad \left(\text{car } \ln\left(1+\tfrac{1}{n}\right) \underset{+\infty}{\sim} \tfrac{1}{n}\right)$$

donc $\displaystyle\lim_{n\to+\infty} \frac{|u_{n+1}|}{|u_n|} = \frac{|z|}{\mathrm{e}}$. La règle de d'Alembert pour les séries numériques permet alors de dire que :

Exemple 1

Rayon de convergence de la série entière $\sum_{n \in \mathbb{N}^*} \frac{n!}{n^n} z^n$.

Solution

Pour $n \in \mathbb{N}^*$ et $z \neq 0$, posons $u_n = \frac{n!}{n^n} z^n$. Alors

$$\frac{|u_{n+1}|}{|u_n|} = \frac{(n+1)!}{(n+1)^{n+1}} \frac{n^n}{n!} |z| = \left(\frac{n}{n+1}\right)^n |z| .$$

Or (calcul classique, déjà fait et à connaître) :

$$\lim_{n \to +\infty} \left(\frac{n+1}{n}\right)^n = \lim_{n \to +\infty} \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n = \lim_{n \to +\infty} \mathrm{e}^{n \ln\left(1+\frac{1}{n}\right)} = \mathrm{e} \qquad (\text{car } \ln\left(1 + \tfrac{1}{n}\right) \underset{+\infty}{\sim} \tfrac{1}{n})$$

donc $\lim_{n \to +\infty} \frac{|u_{n+1}|}{|u_n|} = \frac{|z|}{\mathrm{e}}$. La règle de d'Alembert pour les séries numériques permet alors de dire que :

- si $|z| < \mathrm{e}$, la série de terme général u_n est (absolument) convergente ;

Exemple 1

Rayon de convergence de la série entière $\sum_{n\in\mathbb{N}^*} \frac{n!}{n^n} z^n$.

Solution

Pour $n \in \mathbb{N}^*$ et $z \neq 0$, posons $u_n = \frac{n!}{n^n} z^n$. Alors

$$\frac{|u_{n+1}|}{|u_n|} = \frac{(n+1)!}{(n+1)^{n+1}} \frac{n^n}{n!} |z| = \left(\frac{n}{n+1}\right)^n |z| .$$

Or (calcul classique, déjà fait et à connaître) :

$$\lim_{n\to+\infty} \left(\frac{n+1}{n}\right)^n = \lim_{n\to+\infty} \left(1+\frac{1}{n}\right)^n = \lim_{n\to+\infty} \mathrm{e}^{n\ln\left(1+\frac{1}{n}\right)} = \mathrm{e} \qquad \left(\text{car } \ln\left(1+\tfrac{1}{n}\right) \underset{+\infty}{\sim} \tfrac{1}{n}\right)$$

donc $\lim_{n\to+\infty} \frac{|u_{n+1}|}{|u_n|} = \frac{|z|}{\mathrm{e}}$. La règle de d'Alembert pour les séries numériques permet alors de dire que :

- si $|z| < \mathrm{e}$, la série de terme général u_n est (absolument) convergente ;
- et si $|z| > \mathrm{e}$, elle diverge.

Exemple 1

Rayon de convergence de la série entière $\displaystyle\sum_{n\in\mathbb{N}^*} \frac{n!}{n^n} z^n$.

Solution

Pour $n \in \mathbb{N}^*$ et $z \neq 0$, posons $u_n = \dfrac{n!}{n^n} z^n$. Alors

$$\frac{|u_{n+1}|}{|u_n|} = \frac{(n+1)!}{(n+1)^{n+1}} \frac{n^n}{n!} |z| = \left(\frac{n}{n+1}\right)^n |z|.$$

Or (calcul classique, déjà fait et à connaître) :

$$\lim_{n\to+\infty} \left(\frac{n+1}{n}\right)^n = \lim_{n\to+\infty} \left(1+\frac{1}{n}\right)^n = \lim_{n\to+\infty} \mathrm{e}^{n\ln\left(1+\frac{1}{n}\right)} = \mathrm{e} \qquad \left(\text{car } \ln\left(1+\tfrac{1}{n}\right) \underset{+\infty}{\sim} \tfrac{1}{n}\right)$$

donc $\displaystyle\lim_{n\to+\infty} \frac{|u_{n+1}|}{|u_n|} = \frac{|z|}{\mathrm{e}}$. La règle de d'Alembert pour les séries numériques permet alors de dire que :

- si $|z| < \mathrm{e}$, la série de terme général u_n est (absolument) convergente ;
- et si $|z| > \mathrm{e}$, elle diverge.

En conclusion, le rayon de convergence cherché est égal à e.

Exemple 2

Rayon de convergence de la série entière $\sum_{n\in\mathbb{N}} \frac{n}{2^n} z^{3n}$.

Exemple 2

Rayon de convergence de la série entière $\sum_{n\in\mathbb{N}} \frac{n}{2^n} z^{3n}$.

Solution

Posons $u_n = \frac{n}{2^n} z^{3n}$. Pour $z \neq 0$ on a

$$\frac{|u_{n+1}|}{|u_n|} = \frac{n+1}{2^{n+1}} \frac{2^n}{n} \frac{\left|z^{3(n+1)}\right|}{|z^{3n}|} = \frac{n+1}{2n} |z|^3 .$$

Exemple 2

Rayon de convergence de la série entière $\sum_{n\in\mathbb{N}} \frac{n}{2^n} z^{3n}$.

Solution

Posons $u_n = \frac{n}{2^n} z^{3n}$. Pour $z \neq 0$ on a

$$\frac{|u_{n+1}|}{|u_n|} = \frac{n+1}{2^{n+1}} \frac{2^n}{n} \frac{\left|z^{3(n+1)}\right|}{|z^{3n}|} = \frac{n+1}{2n} |z|^3 .$$

Donc $\lim\limits_{n\to+\infty} \frac{|u_{n+1}|}{|u_n|} = \frac{|z|^3}{2}$.

Exemple 2

Rayon de convergence de la série entière $\displaystyle\sum_{n\in\mathbb{N}} \frac{n}{2^n} z^{3n}$.

Solution

Posons $u_n = \dfrac{n}{2^n} z^{3n}$. Pour $z \neq 0$ on a

$$\frac{|u_{n+1}|}{|u_n|} = \frac{n+1}{2^{n+1}} \frac{2^n}{n} \frac{\left|z^{3(n+1)}\right|}{\left|z^{3n}\right|} = \frac{n+1}{2n} |z|^3 .$$

Donc $\displaystyle\lim_{n\to+\infty} \frac{|u_{n+1}|}{|u_n|} = \frac{|z|^3}{2}$. D'après la règle de d'Alembert pour les séries numériques :

- si $|z|^3 < 2$, c'est-à-dire si $|z| < \sqrt[3]{2}$, la série de terme général u_n est (absolument) convergente ;

Exemple 2

Rayon de convergence de la série entière $\sum_{n\in\mathbb{N}} \frac{n}{2^n} z^{3n}$.

Solution

Posons $u_n = \frac{n}{2^n} z^{3n}$. Pour $z \neq 0$ on a

$$\frac{|u_{n+1}|}{|u_n|} = \frac{n+1}{2^{n+1}} \frac{2^n}{n} \frac{\left|z^{3(n+1)}\right|}{|z^{3n}|} = \frac{n+1}{2n} |z|^3 .$$

Donc $\lim_{n\to+\infty} \frac{|u_{n+1}|}{|u_n|} = \frac{|z|^3}{2}$. D'après la règle de d'Alembert pour les séries numériques :

- si $|z|^3 < 2$, c'est-à-dire si $|z| < \sqrt[3]{2}$, la série de terme général u_n est (absolument) convergente ;
- et si $|z| > \sqrt[3]{2}$, elle diverge.

Exemple 2

Rayon de convergence de la série entière $\sum_{n\in\mathbb{N}} \frac{n}{2^n} z^{3n}$.

Solution

Posons $u_n = \frac{n}{2^n} z^{3n}$. Pour $z \neq 0$ on a

$$\frac{|u_{n+1}|}{|u_n|} = \frac{n+1}{2^{n+1}} \frac{2^n}{n} \frac{\left|z^{3(n+1)}\right|}{|z^{3n}|} = \frac{n+1}{2n} |z|^3 .$$

Donc $\lim_{n\to+\infty} \frac{|u_{n+1}|}{|u_n|} = \frac{|z|^3}{2}$. D'après la règle de d'Alembert pour les séries numériques :

- si $|z|^3 < 2$, c'est-à-dire si $|z| < \sqrt[3]{2}$, la série de terme général u_n est (absolument) convergente ;
- et si $|z| > \sqrt[3]{2}$, elle diverge.

En conclusion, le rayon de convergence cherché est égal à $\sqrt[3]{2}$.

Exemple 3

Rayon de convergence de la série entière $\sum_{n\in\mathbb{N}} n! z^{n^2}$.

Exemple 3

Rayon de convergence de la série entière $\sum_{n\in\mathbb{N}} n! z^{n^2}$.

Solution

Posons $u_n = n! z^{n^2}$. Pour $z \neq 0$ on a

$$\frac{|u_{n+1}|}{|u_n|} = (n+1)\,|z|^{(n+1)^2 - n^2} = (n+1)\,|z|^{2n+1}.$$

Exemple 3

Rayon de convergence de la série entière $\sum_{n\in\mathbb{N}} n!z^{n^2}$.

Solution

Posons $u_n = n!z^{n^2}$. Pour $z \neq 0$ on a

$$\frac{|u_{n+1}|}{|u_n|} = (n+1)\,|z|^{(n+1)^2-n^2} = (n+1)\,|z|^{2n+1}.$$

Donc $\lim_{n\to+\infty} \frac{|u_{n+1}|}{|u_n|} = \begin{cases} 0 & \text{si } |z|<1 \\ +\infty & \text{sinon} \end{cases}.$

Exemple 3

Rayon de convergence de la série entière $\sum_{n\in\mathbb{N}} n! z^{n^2}$.

Solution

Posons $u_n = n! z^{n^2}$. Pour $z \neq 0$ on a

$$\frac{|u_{n+1}|}{|u_n|} = (n+1)\,|z|^{(n+1)^2 - n^2} = (n+1)\,|z|^{2n+1}.$$

Donc $\lim_{n\to+\infty} \frac{|u_{n+1}|}{|u_n|} = \begin{cases} 0 & \text{si } |z| < 1 \\ +\infty & \text{sinon} \end{cases}.$

D'après la règle de d'Alembert pour les séries numériques, si $|z| < 1$ la série de terme général u_n est (absolument) convergente, et sinon elle est divergente.

Exemple 3

Rayon de convergence de la série entière $\sum_{n\in\mathbb{N}} n! z^{n^2}$.

Solution

Posons $u_n = n! z^{n^2}$. Pour $z \neq 0$ on a

$$\frac{|u_{n+1}|}{|u_n|} = (n+1)\,|z|^{(n+1)^2 - n^2} = (n+1)\,|z|^{2n+1}.$$

Donc $\lim_{n\to+\infty} \frac{|u_{n+1}|}{|u_n|} = \begin{cases} 0 & \text{si } |z| < 1 \\ +\infty & \text{sinon} \end{cases}$.

D'après la règle de d'Alembert pour les séries numériques, si $|z| < 1$ la série de terme général u_n est (absolument) convergente, et sinon elle est divergente.

En conclusion, le rayon de convergence cherché est égal à 1.

Exemple 4

Rayon de convergence de la série entière $\sum_{n\in\mathbb{N}} \binom{2n}{n} z^{2n+1}$.

Exemple 4

Rayon de convergence de la série entière $\sum_{n\in\mathbb{N}} \binom{2n}{n} z^{2n+1}$.

Solution

Posons $u_n = \binom{2n}{n} z^{2n+1}$. Pour $z \neq 0$ on a

$$\frac{|u_{n+1}|}{|u_n|} = 2\frac{2n+1}{n+1}|z|^2$$

Exemple 4

Rayon de convergence de la série entière $\sum_{n\in\mathbb{N}} \binom{2n}{n} z^{2n+1}$.

Solution

Posons $u_n = \binom{2n}{n} z^{2n+1}$. Pour $z \neq 0$ on a

$$\frac{|u_{n+1}|}{|u_n|} = 2\frac{2n+1}{n+1}|z|^2$$

donc $\lim_{n\to+\infty} \frac{|u_{n+1}|}{|u_n|} = 4|z|^2$. D'après la règle de d'Alembert pour les séries numériques :

Exemple 4

Rayon de convergence de la série entière $\sum_{n\in\mathbb{N}} \binom{2n}{n} z^{2n+1}$.

Solution

Posons $u_n = \binom{2n}{n} z^{2n+1}$. Pour $z \neq 0$ on a

$$\frac{|u_{n+1}|}{|u_n|} = 2\frac{2n+1}{n+1}\,|z|^2$$

donc $\lim_{n\to+\infty} \frac{|u_{n+1}|}{|u_n|} = 4\,|z|^2$. D'après la règle de d'Alembert pour les séries numériques :

- si $|z| < \frac{1}{2}$, la série de terme général u_n est (absolument) convergente ;

Exemple 4

Rayon de convergence de la série entière $\sum_{n\in\mathbb{N}} \binom{2n}{n} z^{2n+1}$.

Solution

Posons $u_n = \binom{2n}{n} z^{2n+1}$. Pour $z \neq 0$ on a

$$\frac{|u_{n+1}|}{|u_n|} = 2\frac{2n+1}{n+1}|z|^2$$

donc $\lim\limits_{n\to+\infty} \dfrac{|u_{n+1}|}{|u_n|} = 4|z|^2$. D'après la règle de d'Alembert pour les séries numériques :

- si $|z| < \frac{1}{2}$, la série de terme général u_n est (absolument) convergente ;
- et si $|z| > \frac{1}{2}$, elle diverge.

Exemple 4

Rayon de convergence de la série entière $\sum_{n\in\mathbb{N}} \binom{2n}{n} z^{2n+1}$.

Solution

Posons $u_n = \binom{2n}{n} z^{2n+1}$. Pour $z \neq 0$ on a

$$\frac{|u_{n+1}|}{|u_n|} = 2\frac{2n+1}{n+1}|z|^2$$

donc $\lim_{n\to+\infty} \frac{|u_{n+1}|}{|u_n|} = 4|z|^2$. D'après la règle de d'Alembert pour les séries numériques :

- si $|z| < \frac{1}{2}$, la série de terme général u_n est (absolument) convergente ;
- et si $|z| > \frac{1}{2}$, elle diverge.

En conclusion, le rayon de convergence cherché est égal à $\frac{1}{2}$.

Exemple 4

Rayon de convergence de la série entière $\sum\limits_{n\in\mathbb{N}} \binom{2n}{n} z^{2n+1}$.

Solution

Posons $u_n = \binom{2n}{n} z^{2n+1}$. Pour $z \neq 0$ on a

$$\frac{|u_{n+1}|}{|u_n|} = 2\frac{2n+1}{n+1}\,|z|^2$$

donc $\lim\limits_{n\to+\infty} \dfrac{|u_{n+1}|}{|u_n|} = 4\,|z|^2$. D'après la règle de d'Alembert pour les séries numériques :

- si $|z| < \frac{1}{2}$, la série de terme général u_n est (absolument) convergente ;
- et si $|z| > \frac{1}{2}$, elle diverge.

En conclusion, le rayon de convergence cherché est égal à $\dfrac{1}{2}$.

Rem : une autre solution possible consiste à utiliser la formule de Stirling...

OPÉRATIONS SUR LES SÉRIES ENTIÈRES

Somme de deux séries entières

Théorème 4

Soient $\sum\limits_{n\in\mathbb{N}} a_n z^n$ et $\sum\limits_{n\in\mathbb{N}} b_n z^n$ deux séries entières de rayons de convergences respectifs R_a et R_b.

- Si $R_a \neq R_b$, la série entière $\sum\limits_{n\in\mathbb{N}} (a_n + b_n) z^n$ a pour rayon de convergence $R = \min(R_a, R_b)$.
- Si $R_a = R_b$, la série entière $\sum\limits_{n\in\mathbb{N}} (a_n + b_n) z^n$ a un rayon de convergence $R \geqslant R_a$.
- Dans les deux cas, on a, pour tout z tel que $|z| < \min(R_a, R_b)$: $\displaystyle\sum_{n=0}^{+\infty} (a_n + b_n) z^n = \sum_{n=0}^{+\infty} a_n z^n + \sum_{n=0}^{+\infty} b_n z^n$.

Somme de deux séries entières

Théorème 4

Soient $\sum\limits_{n\in\mathbb{N}} a_n z^n$ et $\sum\limits_{n\in\mathbb{N}} b_n z^n$ deux séries entières de rayons de convergences respectifs R_a et R_b.

- Si $R_a \neq R_b$, la série entière $\sum\limits_{n\in\mathbb{N}} (a_n + b_n) z^n$ a pour rayon de convergence $R = \min(R_a, R_b)$.
- Si $R_a = R_b$, la série entière $\sum\limits_{n\in\mathbb{N}} (a_n + b_n) z^n$ a un rayon de convergence $R \geqslant R_a$.
- Dans les deux cas, on a, pour tout z tel que $|z| < \min(R_a, R_b)$: $\sum\limits_{n=0}^{+\infty} (a_n + b_n) z^n = \sum\limits_{n=0}^{+\infty} a_n z^n + \sum\limits_{n=0}^{+\infty} b_n z^n$.

Démonstration

Si z est un nombre complexe tel que $|z| < \min(R_a, R_b)$, les deux séries $\sum\limits_{n\in\mathbb{N}} a_n z^n$ et $\sum\limits_{n\in\mathbb{N}} b_n z^n$ convergent, donc $\sum\limits_{n\in\mathbb{N}} (a_n + b_n) z^n$ converge ; on en déduit $R \geqslant \min(R_a, R_b)$.

Somme de deux séries entières

Théorème 4

Soient $\sum_{n\in\mathbb{N}} a_n z^n$ et $\sum_{n\in\mathbb{N}} b_n z^n$ deux séries entières de rayons de convergences respectifs R_a et R_b.

- Si $R_a \neq R_b$, la série entière $\sum_{n\in\mathbb{N}} (a_n + b_n) z^n$ a pour rayon de convergence $R = \min(R_a, R_b)$.
- Si $R_a = R_b$, la série entière $\sum_{n\in\mathbb{N}} (a_n + b_n) z^n$ a un rayon de convergence $R \geqslant R_a$.
- Dans les deux cas, on a, pour tout z tel que $|z| < \min(R_a, R_b)$: $\displaystyle\sum_{n=0}^{+\infty} (a_n + b_n) z^n = \sum_{n=0}^{+\infty} a_n z^n + \sum_{n=0}^{+\infty} b_n z^n$.

Démonstration

Si z est un nombre complexe tel que $|z| < \min(R_a, R_b)$, les deux séries $\sum_{n\in\mathbb{N}} a_n z^n$ et $\sum_{n\in\mathbb{N}} b_n z^n$ convergent, donc $\sum_{n\in\mathbb{N}} (a_n + b_n) z^n$ converge ; on en déduit $R \geqslant \min(R_a, R_b)$.

Supposons par exemple $R_a < R_b$; si z est un nombre complexe tel que $R_a < |z| < R_b$, $\sum_{n\in\mathbb{N}} a_n z^n$ diverge et $\sum_{n\in\mathbb{N}} b_n z^n$ converge, donc $\sum_{n\in\mathbb{N}} (a_n + b_n) z^n$ diverge ; ainsi $R = R_a = \min(R_a, R_b)$.

Somme de deux séries entières

Théorème 4

Soient $\sum_{n\in\mathbb{N}} a_n z^n$ et $\sum_{n\in\mathbb{N}} b_n z^n$ deux séries entières de rayons de convergences respectifs R_a et R_b.

- Si $R_a \neq R_b$, la série entière $\sum_{n\in\mathbb{N}} (a_n + b_n) z^n$ a pour rayon de convergence $R = \min(R_a, R_b)$.
- Si $R_a = R_b$, la série entière $\sum_{n\in\mathbb{N}} (a_n + b_n) z^n$ a un rayon de convergence $R \geqslant R_a$.
- Dans les deux cas, on a, pour tout z tel que $|z| < \min(R_a, R_b)$: $\displaystyle\sum_{n=0}^{+\infty} (a_n + b_n) z^n = \sum_{n=0}^{+\infty} a_n z^n + \sum_{n=0}^{+\infty} b_n z^n$.

Démonstration

Si z est un nombre complexe tel que $|z| < \min(R_a, R_b)$, les deux séries $\sum_{n\in\mathbb{N}} a_n z^n$ et $\sum_{n\in\mathbb{N}} b_n z^n$ convergent, donc $\sum_{n\in\mathbb{N}} (a_n + b_n) z^n$ converge ; on en déduit $R \geqslant \min(R_a, R_b)$.

Supposons par exemple $R_a < R_b$; si z est un nombre complexe tel que $R_a < |z| < R_b$, $\sum_{n\in\mathbb{N}} a_n z^n$ diverge et $\sum_{n\in\mathbb{N}} b_n z^n$ converge, donc $\sum_{n\in\mathbb{N}} (a_n + b_n) z^n$ diverge ; ainsi $R = R_a = \min(R_a, R_b)$.

Rem : Si $R_a = R_b$, il se peut que $R > \min(R_a, R_b)$: par exemple, $\sum_{n\in\mathbb{N}} z^n$ et $\sum_{n\in\mathbb{N}} (\frac{1}{2^n} - 1) z^n$ ont toutes deux un rayon de convergence égal à 1, mais le rayon de convergence de leur somme est 2.

Produit de deux séries entières

On considère ici deux séries entières $\sum_{n\in\mathbb{N}} a_n z^n$ et $\sum_{n\in\mathbb{N}} b_n z^n$ de rayons de convergences respectifs R_a et R_b.

Produit de deux séries entières

On considère ici deux séries entières $\sum_{n\in\mathbb{N}} a_n z^n$ et $\sum_{n\in\mathbb{N}} b_n z^n$ de rayons de convergences respectifs R_a et R_b.

Pour z tel que $|z| < \min(R_a, R_b)$, posons $u_n = a_n z^n$ et $v_n = b_n z^n$. Les deux séries de terme général u_n et v_n sont alors absolument convergentes.

Produit de deux séries entières

On considère ici deux séries entières $\sum_{n\in\mathbb{N}} a_n z^n$ et $\sum_{n\in\mathbb{N}} b_n z^n$ de rayons de convergences respectifs R_a et R_b.

Pour z tel que $|z| < \min(R_a, R_b)$, posons $u_n = a_n z^n$ et $v_n = b_n z^n$. Les deux séries de terme général u_n et v_n sont alors absolument convergentes. On peut alors considérer leur série **produit de Cauchy** dont le terme général w_n est défini par :

$$w_n = \sum_{k=0}^{n} u_k v_{n-k} \quad \text{soit} \quad w_n = \left(\sum_{k=0}^{n} a_k b_{n-k} \right) z^n .$$

Produit de deux séries entières

On considère ici deux séries entières $\sum_{n\in\mathbb{N}} a_n z^n$ et $\sum_{n\in\mathbb{N}} b_n z^n$ de rayons de convergences respectifs R_a et R_b.

Pour z tel que $|z| < \min(R_a, R_b)$, posons $u_n = a_n z^n$ et $v_n = b_n z^n$. Les deux séries de terme général u_n et v_n sont alors absolument convergentes. On peut alors considérer leur série **produit de Cauchy** dont le terme général w_n est défini par :

$$w_n = \sum_{k=0}^{n} u_k v_{n-k} \quad \text{soit} \quad w_n = \left(\sum_{k=0}^{n} a_k b_{n-k}\right) z^n .$$

Si on pose, pour tout entier naturel n :

$$c_n = \sum_{k=0}^{n} a_k b_{n-k} = \sum_{\substack{p,q\in\mathbb{N} \\ p+q=n}} a_p b_q ,$$

la série entière $\sum_{n\in\mathbb{N}} c_n z^n$ s'appelle la <u>série produit de Cauchy des deux séries entières</u> $\sum_{n\in\mathbb{N}} a_n z^n$ et $\sum_{n\in\mathbb{N}} b_n z^n$.

Produit de deux séries entières

On considère ici deux séries entières $\sum_{n\in\mathbb{N}} a_n z^n$ et $\sum_{n\in\mathbb{N}} b_n z^n$ de rayons de convergences respectifs R_a et R_b.

Pour z tel que $|z| < \min(R_a, R_b)$, posons $u_n = a_n z^n$ et $v_n = b_n z^n$. Les deux séries de terme général u_n et v_n sont alors absolument convergentes. On peut alors considérer leur série **produit de Cauchy** dont le terme général w_n est défini par :

$$w_n = \sum_{k=0}^{n} u_k v_{n-k} \quad \text{soit} \quad w_n = \left(\sum_{k=0}^{n} a_k b_{n-k}\right) z^n .$$

Si on pose, pour tout entier naturel n :

$$c_n = \sum_{k=0}^{n} a_k b_{n-k} = \sum_{\substack{p,q\in\mathbb{N} \\ p+q=n}} a_p b_q ,$$

la série entière $\sum_{n\in\mathbb{N}} c_n z^n$ s'appelle la <u>série produit de Cauchy des deux séries entières</u> $\sum_{n\in\mathbb{N}} a_n z^n$ et $\sum_{n\in\mathbb{N}} b_n z^n$. Les résultats du cours sur les séries absolument convergentes permettent alors d'énoncer directement le théorème suivant.

Théorème 5

Soient $\sum_{n\in\mathbb{N}} a_n z^n$ et $\sum_{n\in\mathbb{N}} b_n z^n$ deux séries entières de rayons de convergences respectifs R_a et R_b.

Posons, pour tout $n \in \mathbb{N}$: $c_n = \sum_{k=0}^{n} a_k b_{n-k}$.

Le rayon de convergence R_c de la série entière $\sum_{n\in\mathbb{N}} c_n z^n$ est tel que $R_c \geqslant \min(R_a, R_b)$. De plus, pour tout complexe z tel que $|z| < \min(R_a, R_b)$, on a :

$$\sum_{n=0}^{+\infty} c_n z^n = \left(\sum_{n=0}^{+\infty} a_n z^n\right)\left(\sum_{n=0}^{+\infty} b_n z^n\right).$$

Théorème 5

Soient $\sum_{n\in\mathbb{N}} a_n z^n$ et $\sum_{n\in\mathbb{N}} b_n z^n$ deux séries entières de rayons de convergences respectifs R_a et R_b.

Posons, pour tout $n \in \mathbb{N}$: $c_n = \sum_{k=0}^{n} a_k b_{n-k}$.

Le rayon de convergence R_c de la série entière $\sum_{n\in\mathbb{N}} c_n z^n$ est tel que $R_c \geqslant \min(R_a, R_b)$. De plus, pour tout complexe z tel que $|z| < \min(R_a, R_b)$, on a :

$$\sum_{n=0}^{+\infty} c_n z^n = \left(\sum_{n=0}^{+\infty} a_n z^n\right)\left(\sum_{n=0}^{+\infty} b_n z^n\right).$$

Exemple 1

En effectuant le produit de Cauchy de la série entière $\sum_{n\in\mathbb{N}} z^n$ par elle-même, on obtient :

$$\text{pour tout nombre complexe } z \text{ tel que } |z| < 1\,,\ \frac{1}{(1-z)^2} = \sum_{n=0}^{+\infty} (n+1) z^n\,.$$

Théorème 5

Soient $\sum_{n\in\mathbb{N}} a_n z^n$ et $\sum_{n\in\mathbb{N}} b_n z^n$ deux séries entières de rayons de convergences respectifs R_a et R_b.

Posons, pour tout $n \in \mathbb{N}$: $c_n = \sum_{k=0}^{n} a_k b_{n-k}$.

Le rayon de convergence R_c de la série entière $\sum_{n\in\mathbb{N}} c_n z^n$ est tel que $R_c \geqslant \min(R_a, R_b)$. De plus, pour tout complexe z tel que $|z| < \min(R_a, R_b)$, on a :

$$\sum_{n=0}^{+\infty} c_n z^n = \left(\sum_{n=0}^{+\infty} a_n z^n\right)\left(\sum_{n=0}^{+\infty} b_n z^n\right).$$

Exemple 1

En effectuant le produit de Cauchy de la série entière $\sum_{n\in\mathbb{N}} z^n$ par elle-même, on obtient :

$$\text{pour tout nombre complexe } z \text{ tel que } |z| < 1\,,\ \frac{1}{(1-z)^2} = \sum_{n=0}^{+\infty} (n+1) z^n\,.$$

Solution

En effet, on a pour tout z tel que $|z| < 1$, $\dfrac{1}{1-z} = \sum_{n=0}^{+\infty} z^n$. Il suffit donc d'appliquer la formule précédente avec $a_n = b_n = 1$.

Exemple 2

Plus généralement, on peut démontrer par récurrence sur l'entier $p \in \mathbb{N}^*$ que :

$$\forall\, p \in \mathbb{N}^* \ , \ \forall\, z \in \mathbb{C} \text{ tq } \ |z| < 1\,, \ \frac{1}{(1-z)^p} = \sum_{n=0}^{+\infty} \binom{n+p-1}{p-1} z^n\,.$$

Exemple 2

Plus généralement, on peut démontrer par récurrence sur l'entier $p \in \mathbb{N}^*$ que :

$$\forall\, p \in \mathbb{N}^* \ , \ \forall\, z \in \mathbb{C} \text{ tq } |z| < 1 \, , \ \frac{1}{(1-z)^p} = \sum_{n=0}^{+\infty} \binom{n+p-1}{p-1} z^n \, .$$

Solution

- La formule proposée est vérifiée pour $p = 1$ (développement en série entière de $\frac{1}{1-z}$) et aussi pour $p = 2$ d'après l'exemple précédent.

Exemple 2

Plus généralement, on peut démontrer par récurrence sur l'entier $p \in \mathbb{N}^*$ que :

$$\forall\, p \in \mathbb{N}^* \ , \ \forall\, z \in \mathbb{C} \text{ tq } |z| < 1 \, , \ \frac{1}{(1-z)^p} = \sum_{n=0}^{+\infty} \binom{n+p-1}{p-1} z^n \, .$$

Solution

- La formule proposée est vérifiée pour $p = 1$ (développement en série entière de $\frac{1}{1-z}$) et aussi pour $p = 2$ d'après l'exemple précédent.
- Supposons la vérifiée au rang p, et vérifions là au rang $p + 1$.

Exemple 2

Plus généralement, on peut démontrer par récurrence sur l'entier $p \in \mathbb{N}^*$ que :

$$\forall\, p \in \mathbb{N}^* \ , \ \forall\, z \in \mathbb{C} \text{ tq } |z| < 1 \, , \ \frac{1}{(1-z)^p} = \sum_{n=0}^{+\infty} \binom{n+p-1}{p-1} z^n \, .$$

Solution

- La formule proposée est vérifiée pour $p = 1$ (développement en série entière de $\frac{1}{1-z}$) et aussi pour $p = 2$ d'après l'exemple précédent.
- Supposons la vérifiée au rang p, et vérifions là au rang $p+1$.
  - *1ère solution : utilisation du produit de Cauchy*

Exemple 2

Plus généralement, on peut démontrer par récurrence sur l'entier $p \in \mathbb{N}^*$ que :

$$\forall\, p \in \mathbb{N}^* \ , \ \forall\, z \in \mathbb{C} \text{ tq } |z| < 1 \, , \ \frac{1}{(1-z)^p} = \sum_{n=0}^{+\infty} \binom{n+p-1}{p-1} z^n \, .$$

Solution

- La formule proposée est vérifiée pour $p = 1$ (développement en série entière de $\frac{1}{1-z}$) et aussi pour $p = 2$ d'après l'exemple précédent.
- Supposons la vérifiée au rang p, et vérifions là au rang $p+1$.
  - *1ère solution : utilisation du produit de Cauchy*

    Compte tenu de l'hypothèse de récurrence, on a, pour tout z tel que $|z| < 1$:

$$\frac{1}{(1-z)^p} = \sum_{n=0}^{+\infty} \binom{n+p-1}{p-1} z^n \qquad \text{et on a aussi} \qquad \frac{1}{1-z} = \sum_{n=0}^{+\infty} z^n.$$

Exemple 2

Plus généralement, on peut démontrer par récurrence sur l'entier $p \in \mathbb{N}^*$ que :

$$\forall\, p \in \mathbb{N}^* \ , \ \forall\, z \in \mathbb{C} \text{ tq } |z| < 1 \ , \ \frac{1}{(1-z)^p} = \sum_{n=0}^{+\infty} \binom{n+p-1}{p-1} z^n \, .$$

Solution

- La formule proposée est vérifiée pour $p = 1$ (développement en série entière de $\frac{1}{1-z}$) et aussi pour $p = 2$ d'après l'exemple précédent.
- Supposons la vérifiée au rang p, et vérifions là au rang $p+1$.
  - *1ère solution : utilisation du produit de Cauchy*

    Compte tenu de l'hypothèse de récurrence, on a, pour tout z tel que $|z| < 1$:

    $$\frac{1}{(1-z)^p} = \sum_{n=0}^{+\infty} \binom{n+p-1}{p-1} z^n \qquad \text{et on a aussi} \qquad \frac{1}{1-z} = \sum_{n=0}^{+\infty} z^n.$$

    En posant $a_n = \binom{n+p-1}{p-1}$ et $b_n = 1$, le théorème précédent donne directement, pour tout z tel que $|z| < 1$:

    $$\frac{1}{(1-z)^{p+1}} = \sum_{n=0}^{+\infty} c_n z^n \qquad \text{où} \quad c_n = \sum_{k=0}^{n} a_k b_{n-k} \, .$$

Solution (suite)

On calcule alors : $c_n = \displaystyle\sum_{k=0}^{n} \binom{k+p-1}{p-1}$.

Solution (suite)

On calcule alors : $c_n = \sum_{k=0}^{n} \binom{k+p-1}{p-1}$. Or d'après la formule du triangle de Pascal, on a, pour tout $k \in \mathbb{N}$ (avec les conventions habituelles pour les coefficients binomiaux) :

$$\binom{k+p-1}{p-1} + \binom{k+p-1}{p} = \binom{k+p}{p}$$

Solution (suite)

On calcule alors : $c_n = \sum_{k=0}^{n} \binom{k+p-1}{p-1}$. Or d'après la formule du triangle de Pascal, on a, pour tout $k \in \mathbb{N}$ (avec les conventions habituelles pour les coefficients binomiaux) :

$$\binom{k+p-1}{p-1} + \binom{k+p-1}{p} = \binom{k+p}{p}$$

donc, par télescopage : $c_n = \sum_{k=0}^{n} \left[\binom{k+p}{p} - \binom{k+p-1}{p}\right] = \binom{n+p}{p} - \underbrace{\binom{p-1}{p}}_{=0} = \binom{n+p}{p}$.

Solution (suite)

On calcule alors : $c_n = \sum_{k=0}^{n} \binom{k+p-1}{p-1}$. Or d'après la formule du triangle de Pascal, on a, pour tout $k \in \mathbb{N}$ (avec les conventions habituelles pour les coefficients binomiaux) :

$$\binom{k+p-1}{p-1} + \binom{k+p-1}{p} = \binom{k+p}{p}$$

donc, par télescopage : $c_n = \sum_{k=0}^{n} \left[\binom{k+p}{p} - \binom{k+p-1}{p} \right] = \binom{n+p}{p} - \underbrace{\binom{p-1}{p}}_{=0} = \binom{n+p}{p}$.

*(on vient de démontrer ci-dessus la **formule du triangle de Pascal généralisé**, que l'on reverra dans le chapitre sur les probabilités).*

Solution (suite)

On calcule alors : $c_n = \sum_{k=0}^{n} \binom{k+p-1}{p-1}$. Or d'après la formule du triangle de Pascal, on a, pour tout $k \in \mathbb{N}$ (avec les conventions habituelles pour les coefficients binomiaux) :

$$\binom{k+p-1}{p-1} + \binom{k+p-1}{p} = \binom{k+p}{p}$$

donc, par télescopage : $c_n = \sum_{k=0}^{n} \left[\binom{k+p}{p} - \binom{k+p-1}{p} \right] = \binom{n+p}{p} - \underbrace{\binom{p-1}{p}}_{=0} = \binom{n+p}{p}$.

(on vient de démontrer ci-dessus la ***formule du triangle de Pascal généralisé****, que l'on reverra dans le chapitre sur les probabilités).*

On a donc démontré, pour tout z tel que $|z| < 1$:

$$\frac{1}{(1-z)^{p+1}} = \sum_{n=0}^{+\infty} \binom{n+p}{p} z^n ,$$

ce qui est la formule voulue à l'ordre $p+1$.

Solution (suite)

- **2ème solution, plus rapide (?)**

Solution (suite)

- **2ème solution, plus rapide (?)**

  On veut donc démontrer, pour tout z tel que $|z| < 1$, l'égalité : $\dfrac{1}{(1-z)^{p+1}} = \displaystyle\sum_{n=0}^{+\infty} \binom{n+p}{p} z^n$, ce qui est équivalent à démontrer que :

$$(1-z)\sum_{n=0}^{+\infty} \binom{n+p}{p} z^n = \frac{1}{(1-z)^p} \,.$$

Solution (suite)

- **2ème solution, plus rapide (?)**

  On veut donc démontrer, pour tout z tel que $|z| < 1$, l'égalité : $\dfrac{1}{(1-z)^{p+1}} = \displaystyle\sum_{n=0}^{+\infty} \binom{n+p}{p} z^n$, ce qui est équivalent à démontrer que :

$$(1-z)\sum_{n=0}^{+\infty} \binom{n+p}{p} z^n = \frac{1}{(1-z)^p}\,.$$

  Et cela découle du calcul ci-dessous :

Solution (suite)

- **2ème solution, plus rapide (?)**

On veut donc démontrer, pour tout z tel que $|z| < 1$, l'égalité : $\dfrac{1}{(1-z)^{p+1}} = \displaystyle\sum_{n=0}^{+\infty} \binom{n+p}{p} z^n$, ce qui est équivalent à démontrer que :

$$(1-z)\sum_{n=0}^{+\infty} \binom{n+p}{p} z^n = \frac{1}{(1-z)^p}\,.$$

Et cela découle du calcul ci-dessous :

$$(1-z)\sum_{n=0}^{+\infty} \binom{n+p}{p} z^n = \sum_{n=0}^{+\infty} \binom{n+p}{p} z^n - \sum_{n=0}^{+\infty} \binom{n+p}{p} z^{n+1}$$

Solution (suite)

- **2ème solution, plus rapide (?)**

  On veut donc démontrer, pour tout z tel que $|z| < 1$, l'égalité : $\dfrac{1}{(1-z)^{p+1}} = \displaystyle\sum_{n=0}^{+\infty} \binom{n+p}{p} z^n$, ce qui est équivalent à démontrer que :

$$(1-z)\sum_{n=0}^{+\infty} \binom{n+p}{p} z^n = \frac{1}{(1-z)^p}\,.$$

  Et cela découle du calcul ci-dessous :

$$\begin{aligned}(1-z)\sum_{n=0}^{+\infty} \binom{n+p}{p} z^n &= \sum_{n=0}^{+\infty} \binom{n+p}{p} z^n - \sum_{n=0}^{+\infty} \binom{n+p}{p} z^{n+1} \\ &= \sum_{n=0}^{+\infty} \binom{n+p}{p} z^n - \sum_{n=1}^{+\infty} \binom{n+p-1}{p} z^n \qquad \text{(changement d'indice dans la 2ème somme)}\end{aligned}$$

Solution (suite)

- **2ème solution, plus rapide (?)**

On veut donc démontrer, pour tout z tel que $|z| < 1$, l'égalité : $\dfrac{1}{(1-z)^{p+1}} = \displaystyle\sum_{n=0}^{+\infty} \binom{n+p}{p} z^n$, ce qui est équivalent à démontrer que :

$$(1-z)\sum_{n=0}^{+\infty} \binom{n+p}{p} z^n = \frac{1}{(1-z)^p}\ .$$

Et cela découle du calcul ci-dessous :

$$\begin{aligned}
(1-z)\sum_{n=0}^{+\infty} \binom{n+p}{p} z^n &= \sum_{n=0}^{+\infty} \binom{n+p}{p} z^n - \sum_{n=0}^{+\infty} \binom{n+p}{p} z^{n+1} \\
&= \sum_{n=0}^{+\infty} \binom{n+p}{p} z^n - \sum_{n=1}^{+\infty} \binom{n+p-1}{p} z^n \qquad \text{(changement d'indice dans la 2ème somme)} \\
&= \sum_{n=0}^{+\infty} \binom{n+p}{p} z^n - \sum_{n=0}^{+\infty} \binom{n+p-1}{p} z^n \qquad \left(\text{car } \binom{p-1}{p} = 0\right)
\end{aligned}$$

Solution (suite)

- **2ème solution, plus rapide (?)**

On veut donc démontrer, pour tout z tel que $|z| < 1$, l'égalité : $\dfrac{1}{(1-z)^{p+1}} = \displaystyle\sum_{n=0}^{+\infty} \binom{n+p}{p} z^n$, ce qui est équivalent à démontrer que :

$$(1-z)\sum_{n=0}^{+\infty} \binom{n+p}{p} z^n = \frac{1}{(1-z)^p} \,.$$

Et cela découle du calcul ci-dessous :

$$\begin{aligned}
(1-z)\sum_{n=0}^{+\infty} \binom{n+p}{p} z^n &= \sum_{n=0}^{+\infty} \binom{n+p}{p} z^n - \sum_{n=0}^{+\infty} \binom{n+p}{p} z^{n+1} \\
&= \sum_{n=0}^{+\infty} \binom{n+p}{p} z^n - \sum_{n=1}^{+\infty} \binom{n+p-1}{p} z^n \qquad \text{(changement d'indice dans la 2ème somme)} \\
&= \sum_{n=0}^{+\infty} \binom{n+p}{p} z^n - \sum_{n=0}^{+\infty} \binom{n+p-1}{p} z^n \qquad \left(\text{car } \binom{p-1}{p} = 0\right) \\
&= \sum_{n=0}^{+\infty} \left[\binom{n+p}{p} - \binom{n+p-1}{p}\right] z^n = \sum_{n=0}^{+\infty} \binom{n+p-1}{p-1} z^n \qquad \text{(triangle de Pascal)}
\end{aligned}$$

Solution (suite)

- **2ème solution, plus rapide (?)**

On veut donc démontrer, pour tout z tel que $|z| < 1$, l'égalité : $\dfrac{1}{(1-z)^{p+1}} = \displaystyle\sum_{n=0}^{+\infty} \binom{n+p}{p} z^n$, ce qui est équivalent à démontrer que :

$$(1-z)\sum_{n=0}^{+\infty} \binom{n+p}{p} z^n = \frac{1}{(1-z)^p} .$$

Et cela découle du calcul ci-dessous :

$$\begin{aligned}
(1-z)\sum_{n=0}^{+\infty} \binom{n+p}{p} z^n &= \sum_{n=0}^{+\infty} \binom{n+p}{p} z^n - \sum_{n=0}^{+\infty} \binom{n+p}{p} z^{n+1} \\
&= \sum_{n=0}^{+\infty} \binom{n+p}{p} z^n - \sum_{n=1}^{+\infty} \binom{n+p-1}{p} z^n \qquad \text{(changement d'indice dans la 2ème somme)} \\
&= \sum_{n=0}^{+\infty} \binom{n+p}{p} z^n - \sum_{n=0}^{+\infty} \binom{n+p-1}{p} z^n \qquad \left(\text{car } \binom{p-1}{p} = 0\right) \\
&= \sum_{n=0}^{+\infty} \left[\binom{n+p}{p} - \binom{n+p-1}{p}\right] z^n = \sum_{n=0}^{+\infty} \binom{n+p-1}{p-1} z^n \qquad \text{(triangle de Pascal)} \\
&= \frac{1}{(1-z)^p} \qquad \text{(hypothèse de récurrence).}
\end{aligned}$$

CONTINUITÉ DE LA SOMME D'UNE SÉRIE ENTIÈRE

Cas d'une série entière de la variable réelle

Théorème 6

La série entière $\sum_{n\in\mathbb{N}} a_n x^n$ de la variable réelle x, de rayon de convergence $R > 0$, est normalement convergente sur tout **segment** inclus dans l'intervalle ouvert de convergence $]-R\,;R[$.

Cas d'une série entière de la variable réelle

Théorème 6

La série entière $\sum\limits_{n\in\mathbb{N}} a_n x^n$ de la variable réelle x, de rayon de convergence $R > 0$, est normalement convergente sur tout **segment** inclus dans l'intervalle ouvert de convergence $]-R\,;R[$.

Démonstration

Soit $[-r\,;r]$ avec $r < R$ un intervalle fermé inclus dans l'intervalle ouvert de convergence de la série entière.

Cas d'une série entière de la variable réelle

Théorème 6

La série entière $\sum\limits_{n\in\mathbb{N}} a_n x^n$ de la variable réelle x, de rayon de convergence $R > 0$, est normalement convergente sur tout **segment** inclus dans l'intervalle ouvert de convergence $]-R\,;R[$.

Démonstration

Soit $[-r\,;r]$ avec $r < R$ un intervalle fermé inclus dans l'intervalle ouvert de convergence de la série entière.

$$\forall\, x \in [-r\,;r] \quad |x| \leqslant r \quad \text{donc} \quad \|a_n x^n\|_\infty^{[-r;r]} \leqslant |a_n|\, r^n.$$

Cas d'une série entière de la variable réelle

Théorème 6

La série entière $\sum_{n\in\mathbb{N}} a_n x^n$ de la variable réelle x, de rayon de convergence $R > 0$, est normalement convergente sur tout **segment** inclus dans l'intervalle ouvert de convergence $]-R\,;R[$.

Démonstration

Soit $[-r\,;r]$ avec $r < R$ un intervalle fermé inclus dans l'intervalle ouvert de convergence de la série entière.

$$\forall\, x \in [-r\,;r] \quad |x| \leqslant r \quad \text{donc} \quad \|a_n x^n\|_\infty^{[-r;r]} \leqslant |a_n|\, r^n.$$

Puisque $|a_n|\, r^n$ est le terme général d'une série convergente par définition de R, la série $\sum_{n\in\mathbb{N}} a_n x^n$ est normalement convergente sur $[-r\,;r]$.

Cas d'une série entière de la variable réelle

Théorème 6

La série entière $\sum_{n\in\mathbb{N}} a_n x^n$ de la variable réelle x, de rayon de convergence $R > 0$, est normalement convergente sur tout **segment** inclus dans l'intervalle ouvert de convergence $]-R\,;R[$.

Il n'y a pas nécessairement convergence normale ni même convergence uniforme de la série entière sur **tout** l'intervalle de convergence.

Cas d'une série entière de la variable réelle

Théorème 6

La série entière $\sum\limits_{n\in\mathbb{N}} a_n x^n$ de la variable réelle x, de rayon de convergence $R > 0$, est normalement convergente sur tout **segment** inclus dans l'intervalle ouvert de convergence $]-R\,;R[$.

Il n'y a pas nécessairement convergence normale ni même convergence uniforme de la série entière sur **tout** l'intervalle de convergence.

Exemple

La série entière de la variable réelle $\sum\limits_{n\in\mathbb{N}^*} (-1)^{n-1}\dfrac{x^n}{n}$ converge simplement vers $x \mapsto \ln(1+x)$ sur $[-1\,;1[$.

Cas d'une série entière de la variable réelle

Théorème 6

La série entière $\sum\limits_{n\in\mathbb{N}} a_n x^n$ de la variable réelle x, de rayon de convergence $R > 0$, est normalement convergente sur tout **segment** inclus dans l'intervalle ouvert de convergence $]-R\,;R[$.

Il n'y a pas nécessairement convergence normale ni même convergence uniforme de la série entière sur **tout** l'intervalle de convergence.

Exemple

La série entière de la variable réelle $\sum\limits_{n\in\mathbb{N}^*} (-1)^{n-1}\dfrac{x^n}{n}$ converge simplement vers $x \mapsto \ln(1+x)$ sur $[-1\,;1[$.

Il n'y a pas convergence normale sur $]-1\,;1[$, car $\|u_n\|_\infty^{]-1;1[} = \dfrac{1}{n}\cdot$

Cas d'une série entière de la variable réelle

Théorème 6

La série entière $\sum\limits_{n\in\mathbb{N}} a_n x^n$ de la variable réelle x, de rayon de convergence $R > 0$, est normalement convergente sur tout **segment** inclus dans l'intervalle ouvert de convergence $]-R\,;R[$.

Il n'y a pas nécessairement convergence normale ni même convergence uniforme de la série entière sur **tout** l'intervalle de convergence.

Exemple

La série entière de la variable réelle $\sum\limits_{n\in\mathbb{N}^*} (-1)^{n-1}\dfrac{x^n}{n}$ converge simplement vers $x \mapsto \ln(1+x)$ sur $[-1\,;1[$.

Il n'y a pas convergence normale sur $]-1\,;1[$, car $\|u_n\|_\infty^{]-1;1[} = \dfrac{1}{n}\cdot$

Il n'y a pas convergence uniforme sur $]-1\,;1[$,car sinon, le théorème de la double limite conduirait à une absurdité.

Cas d'une série entière de la variable réelle

Théorème 6

La série entière $\sum_{n\in\mathbb{N}} a_n x^n$ de la variable réelle x, de rayon de convergence $R > 0$, est normalement convergente sur tout **segment** inclus dans l'intervalle ouvert de convergence $]-R\,;R[$.

Il n'y a pas nécessairement convergence normale ni même convergence uniforme de la série entière sur **tout** l'intervalle de convergence.

Exemple

La série entière de la variable réelle $\sum_{n\in\mathbb{N}^*} (-1)^{n-1}\dfrac{x^n}{n}$ converge simplement vers $x \mapsto \ln(1+x)$ sur $[-1\,;1[$.

Il n'y a pas convergence normale sur $]-1\,;1[$, car $\|u_n\|_\infty^{]-1;1[} = \dfrac{1}{n}\cdot$

Il n'y a pas convergence uniforme sur $]-1\,;1[$,car sinon, le théorème de la double limite conduirait à une absurdité.

Il y a cependant convergence uniforme sur tout segment $[a\,;1]$ avec $-1 < a < 1$ (en utilisant la majoration du reste d'une série alternée).

Théorème 7

Soit $\sum_{n\in\mathbb{N}} a_n x^n$ une série entière de rayon de convergence $R > 0$ ($x \in \mathbb{R}$).

La fonction somme $x \mapsto \sum_{n=0}^{+\infty} a_n x^n$ est continue sur l'intervalle ouvert de convergence $]-R\,;R[$.

Théorème 7

Soit $\sum\limits_{n\in\mathbb{N}} a_n x^n$ une série entière de rayon de convergence $R > 0$ ($x \in \mathbb{R}$).

La fonction somme $x \mapsto \sum\limits_{n=0}^{+\infty} a_n x^n$ est continue sur l'intervalle ouvert de convergence $]-R\,;R[$.

Démonstration

Les fonctions $x \mapsto a_n x^n$ sont continues, et il suffit alors d'appliquer le théorème sur la continuité de la somme d'une série de fonctions.

Théorème 7

Soit $\sum\limits_{n\in\mathbb{N}} a_n x^n$ une série entière de rayon de convergence $R > 0$ ($x \in \mathbb{R}$).

La fonction somme $x \mapsto \sum\limits_{n=0}^{+\infty} a_n x^n$ est continue sur l'intervalle ouvert de convergence $]-R\,;R[$.

Corollaire:

> Soit (a_n) une suite d'éléments de $\mathbb{C}$, et $\sum\limits_{n\in\mathbb{N}} a_n x^n$ une série entière de la variable réelle x, de rayon de convergence $R > 0$. Posons, pour $x \in]-R\,;R[$, $f(x) = \sum\limits_{n=0}^{+\infty} a_n x^n$.
>
> Alors, pour tout entier p, f admet au voisinage de 0 le développement limité :
>
> $$f(x) = \sum_{n=0}^{p} a_n x^n + O(x^{p+1})\,.$$

Théorème 7

Soit $\sum_{n\in\mathbb{N}} a_n x^n$ une série entière de rayon de convergence $R > 0$ ($x \in \mathbb{R}$).

La fonction somme $x \mapsto \sum_{n=0}^{+\infty} a_n x^n$ est continue sur l'intervalle ouvert de convergence $]-R\,;R[$.

Corollaire:

> Soit (a_n) une suite d'éléments de $\mathbb{C}$, et $\sum_{n\in\mathbb{N}} a_n x^n$ une série entière de la variable réelle x, de rayon de convergence $R > 0$. Posons, pour $x \in]-R\,;R[$, $f(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} a_n x^n$.
>
> Alors, pour tout entier p, f admet au voisinage de 0 le développement limité :
>
> $$f(x) = \sum_{n=0}^{p} a_n x^n + O(x^{p+1})\,.$$

Démonstration

Pour tout $x \in]-R\,;R[$ on a : $f(x) = \sum_{n=0}^{p} a_n x^n + \underbrace{x^{p+1}\left(\sum_{n=p+1}^{+\infty} a_n x^{n-p-1}\right)}_{=r_p(x)}\,.$

Théorème 7

Soit $\sum\limits_{n\in\mathbb{N}} a_n x^n$ une série entière de rayon de convergence $R > 0$ ($x \in \mathbb{R}$).

La fonction somme $x \mapsto \sum\limits_{n=0}^{+\infty} a_n x^n$ est continue sur l'intervalle ouvert de convergence $]-R\,;R[$.

Corollaire:

> Soit (a_n) une suite d'éléments de $\mathbb{C}$, et $\sum\limits_{n\in\mathbb{N}} a_n x^n$ une série entière de la variable réelle x, de rayon de convergence $R > 0$. Posons, pour $x \in\,]-R\,;R[$, $f(x) = \sum\limits_{n=0}^{+\infty} a_n x^n$.
>
> Alors, pour tout entier p, f admet au voisinage de 0 le développement limité :
>
> $$f(x) = \sum_{n=0}^{p} a_n x^n + O(x^{p+1})\,.$$

Démonstration

Pour tout $x \in\,]-R\,;R[$ on a : $f(x) = \sum\limits_{n=0}^{p} a_n x^n + \underbrace{x^{p+1}\left(\sum\limits_{n=p+1}^{+\infty} a_n x^{n-p-1}\right)}_{=r_p(x)}$.

Or, $\sum\limits_{n=p+1}^{+\infty} a_n x^{n-p-1}$ est une série entière de rayon de convergence R; elle est donc, en particulier, continue en 0, donc bornée au voisinage de 0, c'est-à-dire $r_p(x) = O(x^{p+1})$.

Continuité de la somme dans le cas général

Dans le chapitre 8, nous avons défini la notion de continuité d'une fonction définie sur un espace vectoriel normé et à valeurs dans un autre espace vectoriel normé. En particulier, dire qu'une application f définie sur une partie D de $\mathbb{C}$ et à valeurs dans $\mathbb{C}$ est continue en un point z_0 de D s'écrit :

$$\forall \varepsilon > 0,\ \exists \alpha > 0 \text{ tel que } \forall z \in D,\ |z - z_0| < \alpha \Longrightarrow |f(z) - f(z_0)| < \varepsilon.$$

Continuité de la somme dans le cas général

Dans le chapitre 8, nous avons défini la notion de continuité d'une fonction définie sur un espace vectoriel normé et à valeurs dans un autre espace vectoriel normé. En particulier, dire qu'une application f définie sur une partie D de $\mathbb{C}$ et à valeurs dans $\mathbb{C}$ est continue en un point z_0 de D s'écrit :

$$\forall\,\varepsilon > 0,\ \exists\,\alpha > 0 \text{ tel que } \forall\,z \in D,\ |z - z_0| < \alpha \Longrightarrow |f(z) - f(z_0)| < \varepsilon.$$

Certains résultats sur les suites et séries de fonctions peuvent également être étendus sans difficulté aux fonctions de $\mathbb{C}$ dans $\mathbb{C}$.

Continuité de la somme dans le cas général

Dans le chapitre 8, nous avons défini la notion de continuité d'une fonction définie sur un espace vectoriel normé et à valeurs dans un autre espace vectoriel normé. En particulier, dire qu'une application f définie sur une partie D de $\mathbb{C}$ et à valeurs dans $\mathbb{C}$ est continue en un point z_0 de D s'écrit :

$$\forall\,\varepsilon > 0,\ \exists\,\alpha > 0 \text{ tel que } \forall\,z \in D,\ |z - z_0| < \alpha \Longrightarrow |f(z) - f(z_0)| < \varepsilon.$$

Certains résultats sur les suites et séries de fonctions peuvent également être étendus sans difficulté aux fonctions de $\mathbb{C}$ dans $\mathbb{C}$.

Définition 4

Soit (u_n) une suite de fonctions définies sur une partie non vide D de $\mathbb{C}$ et à valeurs dans $\mathbb{C}$. On dit que cette suite converge simplement sur D s'il existe une fonction $u\colon D \to \mathbb{C}$ telle que :
$\forall\,z \in D,\ \lim\limits_{n\to+\infty} u_n(z) = u(z).$

Continuité de la somme dans le cas général

Dans le chapitre 8, nous avons défini la notion de continuité d'une fonction définie sur un espace vectoriel normé et à valeurs dans un autre espace vectoriel normé. En particulier, dire qu'une application f définie sur une partie D de $\mathbb{C}$ et à valeurs dans $\mathbb{C}$ est continue en un point z_0 de D s'écrit :

$$\forall\, \varepsilon > 0,\ \exists\, \alpha > 0 \text{ tel que } \forall\, z \in D,\ |z - z_0| < \alpha \Longrightarrow |f(z) - f(z_0)| < \varepsilon.$$

Certains résultats sur les suites et séries de fonctions peuvent également être étendus sans difficulté aux fonctions de $\mathbb{C}$ dans $\mathbb{C}$.

Définition 4

Soit (u_n) une suite de fonctions définies sur une partie non vide D de $\mathbb{C}$ et à valeurs dans $\mathbb{C}$. On dit que cette suite <u>converge simplement</u> sur D s'il existe une fonction $u\colon D \to \mathbb{C}$ telle que :
$\forall\, z \in D,\ \lim\limits_{n\to+\infty} u_n(z) = u(z).$

Définition 5

Soit (u_n) une suite de fonctions définies sur une partie non vide D de $\mathbb{C}$ et à valeurs dans $\mathbb{C}$.
On dit que cette suite <u>converge uniformément</u> sur D s'il existe une fonction $u\colon D \to \mathbb{C}$ telle que
$\lim\limits_{n\to+\infty} \|u_n - u\|_\infty^D = 0.$

Continuité de la somme dans le cas général

Dans le chapitre 8, nous avons défini la notion de continuité d'une fonction définie sur un espace vectoriel normé et à valeurs dans un autre espace vectoriel normé. En particulier, dire qu'une application f définie sur une partie D de $\mathbb{C}$ et à valeurs dans $\mathbb{C}$ est continue en un point z_0 de D s'écrit :

$$\forall\, \varepsilon > 0,\ \exists\, \alpha > 0 \text{ tel que } \forall\, z \in D,\ |z - z_0| < \alpha \Longrightarrow |f(z) - f(z_0)| < \varepsilon.$$

Certains résultats sur les suites et séries de fonctions peuvent également être étendus sans difficulté aux fonctions de $\mathbb{C}$ dans $\mathbb{C}$.

Définition 4

Soit (u_n) une suite de fonctions définies sur une partie non vide D de $\mathbb{C}$ et à valeurs dans $\mathbb{C}$. On dit que cette suite <u>converge simplement</u> sur D s'il existe une fonction $u\colon D \to \mathbb{C}$ telle que :
$\forall\, z \in D,\ \lim\limits_{n \to +\infty} u_n(z) = u(z).$

Définition 5

Soit (u_n) une suite de fonctions définies sur une partie non vide D de $\mathbb{C}$ et à valeurs dans $\mathbb{C}$.
On dit que cette suite <u>converge uniformément</u> sur D s'il existe une fonction $u\colon D \to \mathbb{C}$ telle que

$\lim\limits_{n \to +\infty} \|u_n - u\|_\infty^D = 0.$

On a noté, comme d'habitude : $\|u_n - u\|_\infty^D = \sup\{|u_n(z) - u(z)| \mid z \in D\}$, et cette définition suppose que les fonctions $u_n - u$ sont bornées sur D (au moins à partir d'un certain rang).

Théorème 8

Si les u_n sont continues sur D et si la suite (u_n) converge uniformément sur D vers une fonction u, alors u est continue sur D.

Théorème 8

Si les u_n sont continues sur D et si la suite (u_n) converge uniformément sur D vers une fonction u, alors u est continue sur D.

Démonstration

La démonstration est exactement la même que pour les suites de fonctions définies sur un intervalle $I \subset \mathbb{R}$, remplacer simplement la valeur absolue par le module.

Théorème 8

Si les u_n sont continues sur D et si la suite (u_n) converge uniformément sur D vers une fonction u, alors u est continue sur D.

Démonstration

La démonstration est exactement la même que pour les suites de fonctions définies sur un intervalle $I \subset \mathbb{R}$, remplacer simplement la valeur absolue par le module.

Définition 6

Soit $\sum\limits_{n \in \mathbb{N}} u_n$ une série de fonctions définies sur une partie D de $\mathbb{C}$ et à valeurs dans $\mathbb{C}$.

1. On dit que cette série converge simplement sur D si pour tout $z \in D$ la série numérique $\sum\limits_{n \in \mathbb{N}} u_n(z)$ est convergente.

Théorème 8

Si les u_n sont continues sur D et si la suite (u_n) converge uniformément sur D vers une fonction u, alors u est continue sur D.

Démonstration

La démonstration est exactement la même que pour les suites de fonctions définies sur un intervalle $I \subset \mathbb{R}$, remplacer simplement la valeur absolue par le module.

Définition 6

Soit $\sum_{n\in\mathbb{N}} u_n$ une série de fonctions définies sur une partie D de $\mathbb{C}$ et à valeurs dans $\mathbb{C}$.

1. On dit que cette série converge simplement sur D si pour tout $z \in D$ la série numérique $\sum_{n\in\mathbb{N}} u_n(z)$ est convergente.
2. On dit que cette série converge uniformément sur D si elle converge simplement sur D et si la suite (R_n) des restes converge uniformément sur D vers la fonction nulle.

Théorème 8

Si les u_n sont continues sur D et si la suite (u_n) converge uniformément sur D vers une fonction u, alors u est continue sur D.

Démonstration

La démonstration est exactement la même que pour les suites de fonctions définies sur un intervalle $I \subset \mathbb{R}$, remplacer simplement la valeur absolue par le module.

Définition 6

Soit $\sum\limits_{n\in\mathbb{N}} u_n$ une série de fonctions définies sur une partie D de $\mathbb{C}$ et à valeurs dans $\mathbb{C}$.

1. On dit que cette série converge simplement sur D si pour tout $z \in D$ la série numérique $\sum\limits_{n\in\mathbb{N}} u_n(z)$ est convergente.
2. On dit que cette série converge uniformément sur D si elle converge simplement sur D et si la suite (R_n) des restes converge uniformément sur D vers la fonction nulle.
3. On dit que cette série converge normalement sur D si les u_n sont bornées sur D (au moins à partir d'un certain rang) et si la série numérique $\sum\limits_{n\in\mathbb{N}} \|u_n\|_\infty^D$ converge.

Théorème 8

Si les u_n sont continues sur D et si la suite (u_n) converge uniformément sur D vers une fonction u, alors u est continue sur D.

Démonstration

La démonstration est exactement la même que pour les suites de fonctions définies sur un intervalle $I \subset \mathbb{R}$, remplacer simplement la valeur absolue par le module.

Définition 6

Soit $\sum\limits_{n\in\mathbb{N}} u_n$ une série de fonctions définies sur une partie D de $\mathbb{C}$ et à valeurs dans $\mathbb{C}$.

1. On dit que cette série converge simplement sur D si pour tout $z \in D$ la série numérique $\sum\limits_{n\in\mathbb{N}} u_n(z)$ est convergente.
2. On dit que cette série converge uniformément sur D si elle converge simplement sur D et si la suite (R_n) des restes converge uniformément sur D vers la fonction nulle.
3. On dit que cette série converge normalement sur D si les u_n sont bornées sur D (au moins à partir d'un certain rang) et si la série numérique $\sum\limits_{n\in\mathbb{N}} \|u_n\|_\infty^D$ converge.

On démontre exactement de la même façon que pour les séries de fonctions de la variable réelle le résultat suivant :

Théorème 9

Si $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est une suite d'applications de $D \subset \mathbb{C}$ dans $\mathbb{C}$ telle que la série de fonctions $\sum\limits_{n\in\mathbb{N}} u_n$ est **normalement convergente** sur D, alors :

a) Pour tout $z \in D$, la série $\sum\limits_{n\in\mathbb{N}} u_n(z)$ est absolument convergente dans $\mathbb{C}$.

b) La série de fonctions $\sum\limits_{n\in\mathbb{N}} u_n$ est uniformément convergente sur D.

Théorème 9

Si $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est une suite d'applications de $D \subset \mathbb{C}$ dans $\mathbb{C}$ telle que la série de fonctions $\sum\limits_{n\in\mathbb{N}} u_n$ est **normalement convergente** sur D, alors :

a) Pour tout $z \in D$, la série $\sum\limits_{n\in\mathbb{N}} u_n(z)$ est absolument convergente dans $\mathbb{C}$.

b) La série de fonctions $\sum\limits_{n\in\mathbb{N}} u_n$ est uniformément convergente sur D.

Le théorème suivant généralise le théorème 6 dans le cas d'une série entière de la variable complexe.

Théorème 10

Soit (a_n) une suite de nombres complexes. La série entière $\sum\limits_{n\in\mathbb{N}} a_n z^n$ de la variable complexe z, de rayon de convergence $R > 0$, est normalement convergente sur tout disque **fermé** inclus dans le disque ouvert de convergence.

Théorème 9

Si $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est une suite d'applications de $D \subset \mathbb{C}$ dans $\mathbb{C}$ telle que la série de fonctions $\sum\limits_{n\in\mathbb{N}} u_n$ est **normalement convergente** sur D, alors :

a) Pour tout $z \in D$, la série $\sum\limits_{n\in\mathbb{N}} u_n(z)$ est absolument convergente dans $\mathbb{C}$.

b) La série de fonctions $\sum\limits_{n\in\mathbb{N}} u_n$ est uniformément convergente sur D.

Le théorème suivant généralise le théorème 6 dans le cas d'une série entière de la variable complexe.

Théorème 10

Soit (a_n) une suite de nombres complexes. La série entière $\sum\limits_{n\in\mathbb{N}} a_n z^n$ de la variable complexe z, de rayon de convergence $R > 0$, est normalement convergente sur tout disque **fermé** inclus dans le disque ouvert de convergence.

Démonstration

Soit $r < R$ et $K = \{z \in \mathbb{C} \mid |z| \leqslant r\}$ le disque fermé de centre 0 et de rayon r.

$$\forall z \in K, \quad |z| \leqslant r \quad \text{donc} \quad \|a_n z^n\|_\infty^K \leqslant |a_n|\, r^n.$$

Théorème 9

Si $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est une suite d'applications de $D \subset \mathbb{C}$ dans $\mathbb{C}$ telle que la série de fonctions $\sum\limits_{n\in\mathbb{N}} u_n$ est **normalement convergente** sur D, alors :

a) Pour tout $z \in D$, la série $\sum\limits_{n\in\mathbb{N}} u_n(z)$ est absolument convergente dans $\mathbb{C}$.

b) La série de fonctions $\sum\limits_{n\in\mathbb{N}} u_n$ est uniformément convergente sur D.

Le théorème suivant généralise le théorème 6 dans le cas d'une série entière de la variable complexe.

Théorème 10

Soit (a_n) une suite de nombres complexes. La série entière $\sum\limits_{n\in\mathbb{N}} a_n z^n$ de la variable complexe z, de rayon de convergence $R > 0$, est normalement convergente sur tout disque **fermé** inclus dans le disque ouvert de convergence.

Démonstration

Soit $r < R$ et $K = \{z \in \mathbb{C} \mid |z| \leqslant r\}$ le disque fermé de centre 0 et de rayon r.

$$\forall z \in K, \quad |z| \leqslant r \quad \text{donc} \quad \|a_n z^n\|_\infty^K \leqslant |a_n|\, r^n.$$

Puisque $|a_n|\, r^n$ est le terme général d'une série convergente par définition de R, la série $\sum\limits_{n\in\mathbb{N}} a_n z^n$ est normalement convergente sur K.

Théorème 11

Soit (a_n) une suite de nombres complexes et $\sum_{n\in\mathbb{N}} a_n z^n$ une série entière de rayon de convergence $R > 0$ ($z \in \mathbb{C}$).

La fonction somme $f : z \mapsto \sum_{n=0}^{+\infty} a_n z^n$ est continue sur son disque ouvert de convergence.

Théorème 11

Soit (a_n) une suite de nombres complexes et $\sum\limits_{n\in\mathbb{N}} a_n z^n$ une série entière de rayon de convergence $R > 0$ $(z \in \mathbb{C})$.

La fonction somme $f\colon z \mapsto \sum\limits_{n=0}^{+\infty} a_n z^n$ est continue sur son disque ouvert de convergence.

Démonstration

Les fonctions $z \mapsto a_n z^n$ sont continues. La convergence de la série entière $\sum a_n z^n$ étant normale, donc uniforme, sur tout disque fermé $K \subset \mathcal{B}(0, R)$, on en déduit que f est continue sur tout disque fermé inclus dans $\mathcal{B}(0, R)$ donc sur $\mathcal{B}(0, R)$.

Théorème 11

Soit (a_n) une suite de nombres complexes et $\sum_{n\in\mathbb{N}} a_n z^n$ une série entière de rayon de convergence $R > 0$ ($z \in \mathbb{C}$).

La fonction somme $f : z \mapsto \sum_{n=0}^{+\infty} a_n z^n$ est continue sur son disque ouvert de convergence.

Démonstration

Les fonctions $z \mapsto a_n z^n$ sont continues. La convergence de la série entière $\sum a_n z^n$ étant normale, donc uniforme, sur tout disque fermé $K \subset \mathcal{B}(0, R)$, on en déduit que f est continue sur tout disque fermé inclus dans $\mathcal{B}(0, R)$ donc sur $\mathcal{B}(0, R)$.

Exemple 1

La série entière $\sum_{n\in\mathbb{N}} z^n$ a pour rayon de convergence 1 et :

$$\forall\, z \in \mathcal{B}(0,1)\,,\ \sum_{n=0}^{+\infty} z^n = \frac{1}{1-z}\,.$$

Il résulte du théorème précédent que la fonction $z \mapsto \dfrac{1}{1-z}$ est continue sur $\mathcal{B}(0,1)$.

Exemple 2

La série entière $\sum_{n\in\mathbb{N}} \frac{z^n}{n!}$ a pour rayon de convergence $+\infty$ et :

$$\forall\, z \in \mathbb{C},\ \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{z^n}{n!} = \mathrm{e}^z\,.$$

Il résulte du théorème précédent que la fonction $z \mapsto \mathrm{e}^z$ est continue sur $\mathbb{C}$.

DÉRIVATION ET INTÉGRATION DE LA SOMME D'UNE SÉRIE ENTIÈRE

Série dérivée

Définition 7

Soit $\sum_{n\in\mathbb{N}} a_n z^n$ une série entière.

On appelle série dérivée de cette série la série entière :

$$\sum_{n\geqslant 1} n a_n z^{n-1} \quad \left(= \sum_{n\geqslant 0} (n+1) a_{n+1} z^n \right).$$

Série dérivée

Définition 7

Soit $\sum_{n\in\mathbb{N}} a_n z^n$ une série entière.

On appelle série dérivée de cette série la série entière :

$$\sum_{n\geqslant 1} n a_n z^{n-1} \quad \left(= \sum_{n\geqslant 0} (n+1) a_{n+1} z^n \right).$$

On appelle série primitive de cette série la série entière :

$$\sum_{n\geqslant 0} \frac{a_n}{n+1} z^{n+1} \quad \left(= \sum_{n\geqslant 1} \frac{a_{n-1}}{n} z^n \right).$$

Série dérivée

Définition 7

Soit $\sum_{n\in\mathbb{N}} a_n z^n$ une série entière.

On appelle série dérivée de cette série la série entière :

$$\sum_{n\geqslant 1} n a_n z^{n-1} \quad \left(= \sum_{n\geqslant 0} (n+1) a_{n+1} z^n \right).$$

On appelle série primitive de cette série la série entière :

$$\sum_{n\geqslant 0} \frac{a_n}{n+1} z^{n+1} \quad \left(= \sum_{n\geqslant 1} \frac{a_{n-1}}{n} z^n \right).$$

Théorème 12

Une série entière, sa série dérivée et sa série primitive ont même rayon de convergence.

Démonstration

Il suffit de faire la démonstration pour la série dérivée (puisque la série initiale est la série dérivée de sa série primitive !).

Démonstration

Il suffit de faire la démonstration pour la série dérivée (puisque la série initiale est la série dérivée de sa série primitive !). Soit donc R le rayon de convergence de la série entière $\sum\limits_{n\in\mathbb{N}} a_n z^n$, et R' celui de la série entière dérivée $\sum\limits_{n\geqslant 1} n a_n z^{n-1}$.

Démonstration

Il suffit de faire la démonstration pour la série dérivée (puisque la série initiale est la série dérivée de sa série primitive !). Soit donc R le rayon de convergence de la série entière $\sum_{n\in\mathbb{N}} a_n z^n$, et R' celui de la série entière dérivée $\sum_{n\geqslant 1} n a_n z^{n-1}$.

- Supposons $R \neq +\infty$, et soit z tel que $|z| > R$. Alors la série $\sum_{n\in\mathbb{N}} |a_n z^n|$ est divergente.

Démonstration

Il suffit de faire la démonstration pour la série dérivée (puisque la série initiale est la série dérivée de sa série primitive !). Soit donc R le rayon de convergence de la série entière $\sum_{n\in\mathbb{N}} a_n z^n$, et R' celui de la série entière dérivée $\sum_{n\geqslant 1} n a_n z^{n-1}$.

- Supposons $R \neq +\infty$, et soit z tel que $|z| > R$. Alors la série $\sum_{n\in\mathbb{N}} |a_n z^n|$ est divergente. Puisque $\left|n a_n z^{n-1}\right| = \dfrac{n}{|z|}\,|a_n z^n| \geqslant |a_n z^n|$ pour n assez grand, la série $\sum_{n\geqslant 1} \left|n a_n z^{n-1}\right|$ diverge aussi, donc $|z| > R'$.

Démonstration

Il suffit de faire la démonstration pour la série dérivée (puisque la série initiale est la série dérivée de sa série primitive !). Soit donc R le rayon de convergence de la série entière $\sum\limits_{n\in\mathbb{N}} a_n z^n$, et R' celui de la série entière dérivée $\sum\limits_{n\geqslant 1} n a_n z^{n-1}$.

- Supposons $R \neq +\infty$, et soit z tel que $|z| > R$. Alors la série $\sum\limits_{n\in\mathbb{N}} |a_n z^n|$ est divergente. Puisque $\left|n a_n z^{n-1}\right| = \dfrac{n}{|z|}\,|a_n z^n| \geqslant |a_n z^n|$ pour n assez grand, la série $\sum\limits_{n\geqslant 1} \left|n a_n z^{n-1}\right|$ diverge aussi, donc $|z| > R'$.

  Ainsi, pour tout z, $|z| > R \Longrightarrow |z| > R'$; on en déduit $R \geqslant R'$,

Démonstration

Il suffit de faire la démonstration pour la série dérivée (puisque la série initiale est la série dérivée de sa série primitive !). Soit donc R le rayon de convergence de la série entière $\sum_{n\in\mathbb{N}} a_n z^n$, et R' celui de la série entière dérivée $\sum_{n\geqslant 1} n a_n z^{n-1}$.

- Supposons $R \neq +\infty$, et soit z tel que $|z| > R$. Alors la série $\sum_{n\in\mathbb{N}} |a_n z^n|$ est divergente. Puisque $\left|n a_n z^{n-1}\right| = \dfrac{n}{|z|}\,|a_n z^n| \geqslant |a_n z^n|$ pour n assez grand, la série $\sum_{n\geqslant 1} \left|n a_n z^{n-1}\right|$ diverge aussi, donc $|z| > R'$.
  Ainsi, pour tout z, $|z| > R \Longrightarrow |z| > R'$; on en déduit $R \geqslant R'$, et cette inégalité reste vraie lorsque $R = +\infty$.

- Supposons $R \neq 0$, et soit z tel que $|z| < R$. Alors il existe un réel r tel que $|z| < r < R$.

Démonstration

Il suffit de faire la démonstration pour la série dérivée (puisque la série initiale est la série dérivée de sa série primitive !). Soit donc R le rayon de convergence de la série entière $\sum_{n\in\mathbb{N}} a_n z^n$, et R' celui de la série entière dérivée $\sum_{n\geqslant 1} n a_n z^{n-1}$.

- Supposons $R \neq +\infty$, et soit z tel que $|z| > R$. Alors la série $\sum_{n\in\mathbb{N}} |a_n z^n|$ est divergente. Puisque $\left|n a_n z^{n-1}\right| = \dfrac{n}{|z|} |a_n z^n| \geqslant |a_n z^n|$ pour n assez grand, la série $\sum_{n\geqslant 1} \left|n a_n z^{n-1}\right|$ diverge aussi, donc $|z| > R'$.
  Ainsi, pour tout z, $|z| > R \Longrightarrow |z| > R'$; on en déduit $R \geqslant R'$, et cette inégalité reste vraie lorsque $R = +\infty$.

- Supposons $R \neq 0$, et soit z tel que $|z| < R$. Alors il existe un réel r tel que $|z| < r < R$. Par définition de R, la suite $(a_n r^n)$ est bornée : il existe un réel $M \geqslant 0$ tel que, pour tout n on ait : $|a_n|\, r^n \leqslant M$.

Démonstration

Il suffit de faire la démonstration pour la série dérivée (puisque la série initiale est la série dérivée de sa série primitive !). Soit donc R le rayon de convergence de la série entière $\sum\limits_{n\in\mathbb{N}} a_n z^n$, et R' celui de la série entière dérivée $\sum\limits_{n\geqslant 1} n a_n z^{n-1}$.

- Supposons $R \neq +\infty$, et soit z tel que $|z| > R$. Alors la série $\sum\limits_{n\in\mathbb{N}} |a_n z^n|$ est divergente. Puisque $\left|n a_n z^{n-1}\right| = \dfrac{n}{|z|}\,|a_n z^n| \geqslant |a_n z^n|$ pour n assez grand, la série $\sum\limits_{n\geqslant 1} \left|n a_n z^{n-1}\right|$ diverge aussi, donc $|z| > R'$.

  Ainsi, pour tout z, $|z| > R \Longrightarrow |z| > R'$; on en déduit $R \geqslant R'$, et cette inégalité reste vraie lorsque $R = +\infty$.

- Supposons $R \neq 0$, et soit z tel que $|z| < R$. Alors il existe un réel r tel que $|z| < r < R$. Par définition de R, la suite $(a_n r^n)$ est bornée : il existe un réel $M \geqslant 0$ tel que, pour tout n on ait : $|a_n|\, r^n \leqslant M$.

  On a alors :

  $$\left|n a_n z^{n-1}\right| = n\frac{|a_n|\, r^n}{|z|}.\left|\frac{z}{r}\right|^n \leqslant n\frac{M}{|z|}.\left|\frac{z}{r}\right|^n$$

Démonstration

Il suffit de faire la démonstration pour la série dérivée (puisque la série initiale est la série dérivée de sa série primitive !). Soit donc R le rayon de convergence de la série entière $\sum\limits_{n\in\mathbb{N}} a_n z^n$, et R' celui de la série entière dérivée $\sum\limits_{n\geqslant 1} n a_n z^{n-1}$.

- Supposons $R \neq +\infty$, et soit z tel que $|z| > R$. Alors la série $\sum\limits_{n\in\mathbb{N}} |a_n z^n|$ est divergente. Puisque $\left|n a_n z^{n-1}\right| = \dfrac{n}{|z|}\,|a_n z^n| \geqslant |a_n z^n|$ pour n assez grand, la série $\sum\limits_{n\geqslant 1} \left|n a_n z^{n-1}\right|$ diverge aussi, donc $|z| > R'$.
  Ainsi, pour tout z, $|z| > R \Longrightarrow |z| > R'$; on en déduit $R \geqslant R'$, et cette inégalité reste vraie lorsque $R = +\infty$.

- Supposons $R \neq 0$, et soit z tel que $|z| < R$. Alors il existe un réel r tel que $|z| < r < R$. Par définition de R, la suite $(a_n r^n)$ est bornée : il existe un réel $M \geqslant 0$ tel que, pour tout n on ait : $|a_n|\, r^n \leqslant M$.
  On a alors :
  $$\left|n a_n z^{n-1}\right| = n\frac{|a_n|\, r^n}{|z|}.\left|\frac{z}{r}\right|^n \leqslant n\frac{M}{|z|}.\left|\frac{z}{r}\right|^n$$
  donc, puisque $\left|\dfrac{z}{r}\right| < 1$ et par croissances comparées : $\lim\limits_{n\to+\infty} n a_n z^{n-1} = 0$.

Démonstration

Il suffit de faire la démonstration pour la série dérivée (puisque la série initiale est la série dérivée de sa série primitive !). Soit donc R le rayon de convergence de la série entière $\sum\limits_{n\in\mathbb{N}} a_n z^n$, et R' celui de la série entière dérivée $\sum\limits_{n\geqslant 1} n a_n z^{n-1}$.

- Supposons $R \neq +\infty$, et soit z tel que $|z| > R$. Alors la série $\sum\limits_{n\in\mathbb{N}} |a_n z^n|$ est divergente. Puisque $\left|n a_n z^{n-1}\right| = \dfrac{n}{|z|}\,|a_n z^n| \geqslant |a_n z^n|$ pour n assez grand, la série $\sum\limits_{n\geqslant 1} \left|n a_n z^{n-1}\right|$ diverge aussi, donc $|z| > R'$.
  Ainsi, pour tout z, $|z| > R \Longrightarrow |z| > R'$; on en déduit $R \geqslant R'$, et cette inégalité reste vraie lorsque $R = +\infty$.

- Supposons $R \neq 0$, et soit z tel que $|z| < R$. Alors il existe un réel r tel que $|z| < r < R$. Par définition de R, la suite $(a_n r^n)$ est bornée : il existe un réel $M \geqslant 0$ tel que, pour tout n on ait : $|a_n|\, r^n \leqslant M$.
  On a alors :
  $$\left|n a_n z^{n-1}\right| = n\frac{|a_n|\, r^n}{|z|}.\left|\frac{z}{r}\right|^n \leqslant n\frac{M}{|z|}.\left|\frac{z}{r}\right|^n$$
  donc, puisque $\left|\dfrac{z}{r}\right| < 1$ et par croissances comparées : $\lim\limits_{n\to+\infty} n a_n z^{n-1} = 0$. Cela implique, d'après une des caractérisations du rayon de convergence : $|z| < R'$.

Démonstration

Il suffit de faire la démonstration pour la série dérivée (puisque la série initiale est la série dérivée de sa série primitive !). Soit donc R le rayon de convergence de la série entière $\sum\limits_{n\in\mathbb{N}} a_n z^n$, et R' celui de la série entière dérivée $\sum\limits_{n\geqslant 1} n a_n z^{n-1}$.

- Supposons $R \neq +\infty$, et soit z tel que $|z| > R$. Alors la série $\sum\limits_{n\in\mathbb{N}} |a_n z^n|$ est divergente. Puisque $\left|n a_n z^{n-1}\right| = \dfrac{n}{|z|}\,|a_n z^n| \geqslant |a_n z^n|$ pour n assez grand, la série $\sum\limits_{n\geqslant 1} \left|n a_n z^{n-1}\right|$ diverge aussi, donc $|z| > R'$.
  Ainsi, pour tout z, $|z| > R \Longrightarrow |z| > R'$; on en déduit $R \geqslant R'$, et cette inégalité reste vraie lorsque $R = +\infty$.

- Supposons $R \neq 0$, et soit z tel que $|z| < R$. Alors il existe un réel r tel que $|z| < r < R$. Par définition de R, la suite $(a_n r^n)$ est bornée : il existe un réel $M \geqslant 0$ tel que, pour tout n on ait : $|a_n|\, r^n \leqslant M$.
  On a alors :
  $$\left|n a_n z^{n-1}\right| = n\frac{|a_n|\, r^n}{|z|}.\left|\frac{z}{r}\right|^n \leqslant n\frac{M}{|z|}.\left|\frac{z}{r}\right|^n$$
  donc, puisque $\left|\dfrac{z}{r}\right| < 1$ et par croissances comparées : $\lim\limits_{n\to+\infty} n a_n z^{n-1} = 0$. Cela implique, d'après une des caractérisations du rayon de convergence : $|z| < R'$.
  Ainsi, pour tout z, $|z| < R \Longrightarrow |z| < R'$; on en déduit $R \leqslant R'$, cette inégalité restant vraie si $R = 0$.

Démonstration

Il suffit de faire la démonstration pour la série dérivée (puisque la série initiale est la série dérivée de sa série primitive !). Soit donc R le rayon de convergence de la série entière $\sum_{n\in\mathbb{N}} a_n z^n$, et R' celui de la série entière dérivée $\sum_{n\geqslant 1} n a_n z^{n-1}$.

- Supposons $R \neq +\infty$, et soit z tel que $|z| > R$. Alors la série $\sum_{n\in\mathbb{N}} |a_n z^n|$ est divergente. Puisque $\left|n a_n z^{n-1}\right| = \dfrac{n}{|z|}\,|a_n z^n| \geqslant |a_n z^n|$ pour n assez grand, la série $\sum_{n\geqslant 1} \left|n a_n z^{n-1}\right|$ diverge aussi, donc $|z| > R'$.
  Ainsi, pour tout z, $|z| > R \Longrightarrow |z| > R'$; on en déduit $R \geqslant R'$, et cette inégalité reste vraie lorsque $R = +\infty$.

- Supposons $R \neq 0$, et soit z tel que $|z| < R$. Alors il existe un réel r tel que $|z| < r < R$. Par définition de R, la suite $(a_n r^n)$ est bornée : il existe un réel $M \geqslant 0$ tel que, pour tout n on ait : $|a_n|\, r^n \leqslant M$.
  On a alors :
  $$\left|n a_n z^{n-1}\right| = n\frac{|a_n|\, r^n}{|z|}.\left|\frac{z}{r}\right|^n \leqslant n\frac{M}{|z|}.\left|\frac{z}{r}\right|^n$$
  donc, puisque $\left|\dfrac{z}{r}\right| < 1$ et par croissances comparées : $\lim\limits_{n\to+\infty} n a_n z^{n-1} = 0$. Cela implique, d'après une des caractérisations du rayon de convergence : $|z| < R'$.
  Ainsi, pour tout z, $|z| < R \Longrightarrow |z| < R'$; on en déduit $R \leqslant R'$, cette inégalité restant vraie si $R = 0$.

- Finalement, on a bien $R = R'$.

Dérivation d'une série entière de la variable réelle

Théorème 13

Soit (a_n) une suite d 'éléments de $\mathbb{C}$, et $\sum_{n\in\mathbb{N}} a_n x^n$ une série entière de la variable réelle x, de rayon de convergence $R > 0$. Posons, pour $x \in]-R\,;R[$, $f(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} a_n x^n$.

Alors f est de classe $\mathscr{C}^1$ sur $]-R\,;R[$ et, pour tout $x \in]-R\,;R[$:

$$f'(x) = \sum_{n=1}^{+\infty} n a_n x^{n-1} = \sum_{n=0}^{+\infty} (n+1) a_{n+1} x^n\,.$$

Dérivation d'une série entière de la variable réelle

Théorème 13

Soit (a_n) une suite d 'éléments de $\mathbb{C}$, et $\sum_{n\in\mathbb{N}} a_n x^n$ une série entière de la variable réelle x, de rayon de convergence $R > 0$. Posons, pour $x \in \left]-R\,;R\right[$, $f(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} a_n x^n$.

Alors f est de classe $\mathscr{C}^1$ sur $\left]-R\,;R\right[$ et, pour tout $x \in \left]-R\,;R\right[$:

$$f'(x) = \sum_{n=1}^{+\infty} n a_n x^{n-1} = \sum_{n=0}^{+\infty} (n+1) a_{n+1} x^n\,.$$

Démonstration

Il suffit d'appliquer le théorème de dérivation terme à terme d'une série de fonctions. En posant : $u_n \colon x \mapsto a_n x^n$:

Dérivation d'une série entière de la variable réelle

Théorème 13

Soit (a_n) une suite d 'éléments de $\mathbb{C}$, et $\sum_{n\in\mathbb{N}} a_n x^n$ une série entière de la variable réelle x, de rayon de convergence $R > 0$. Posons, pour $x \in \,]-R\,;R[$, $f(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} a_n x^n$.

Alors f est de classe $\mathscr{C}^1$ sur $]-R\,;R[$ et, pour tout $x \in \,]-R\,;R[$:

$$f'(x) = \sum_{n=1}^{+\infty} n a_n x^{n-1} = \sum_{n=0}^{+\infty} (n+1) a_{n+1} x^n\,.$$

Démonstration

Il suffit d'appliquer le théorème de dérivation terme à terme d'une série de fonctions. En posant : $u_n \colon x \mapsto a_n x^n$:

- les u_n sont bien de classe $\mathscr{C}^1$ sur $]-R\,;R[$;

Dérivation d'une série entière de la variable réelle

Théorème 13

Soit (a_n) une suite d 'éléments de $\mathbb{C}$, et $\sum\limits_{n\in\mathbb{N}} a_n x^n$ une série entière de la variable réelle x, de rayon de convergence $R>0$. Posons, pour $x\in\left]-R\,;R\right[$, $f(x)=\sum\limits_{n=0}^{+\infty} a_n x^n$.

Alors f est de classe $\mathscr{C}^1$ sur $\left]-R\,;R\right[$ et, pour tout $x\in\left]-R\,;R\right[$:

$$f'(x)=\sum_{n=1}^{+\infty} n a_n x^{n-1}=\sum_{n=0}^{+\infty}(n+1)a_{n+1}x^n\,.$$

Démonstration

Il suffit d'appliquer le théorème de dérivation terme à terme d'une série de fonctions. En posant :
$u_n\colon\, x\mapsto a_n x^n$:

- les u_n sont bien de classe $\mathscr{C}^1$ sur $\left]-R\,;R\right[$;
- la série de fonctions $\sum\limits_{n\geqslant 0} u_n(x)$ converge simplement vers f sur $\left]-R\,;R\right[$;

Dérivation d'une série entière de la variable réelle

Théorème 13

Soit (a_n) une suite d 'éléments de $\mathbb{C}$, et $\sum_{n\in\mathbb{N}} a_n x^n$ une série entière de la variable réelle x, de rayon de convergence $R>0$. Posons, pour $x \in]-R\,;R[$, $f(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} a_n x^n$.

Alors f est de classe $\mathscr{C}^1$ sur $]-R\,;R[$ et, pour tout $x \in]-R\,;R[$:

$$f'(x) = \sum_{n=1}^{+\infty} n a_n x^{n-1} = \sum_{n=0}^{+\infty} (n+1) a_{n+1} x^n\,.$$

Démonstration

Il suffit d'appliquer le théorème de dérivation terme à terme d'une série de fonctions. En posant : $u_n \colon x \mapsto a_n x^n$:

- les u_n sont bien de classe $\mathscr{C}^1$ sur $]-R\,;R[$;
- la série de fonctions $\sum_{n\geqslant 0} u_n(x)$ converge simplement vers f sur $]-R\,;R[$;
- d'après le théorème précédent, la série dérivée $\sum_{n\geqslant 0} u_n'(x)$ a pour rayon de convergence R donc, d'après le théorème 6, elle converge uniformément sur tout segment inclus dans $]-R\,;R[$ (convergence uniforme locale).

Dérivation d'une série entière de la variable réelle

Théorème 13

Soit (a_n) une suite d 'éléments de $\mathbb{C}$, et $\sum\limits_{n\in\mathbb{N}} a_n x^n$ une série entière de la variable réelle x, de rayon de convergence $R > 0$. Posons, pour $x \in \left]-R\,;R\right[$, $f(x) = \sum\limits_{n=0}^{+\infty} a_n x^n$.

Alors f est de classe $\mathscr{C}^1$ sur $\left]-R\,;R\right[$ et, pour tout $x \in \left]-R\,;R\right[$:

$$f'(x) = \sum_{n=1}^{+\infty} n a_n x^{n-1} = \sum_{n=0}^{+\infty} (n+1) a_{n+1} x^n\,.$$

Démonstration

Il suffit d'appliquer le théorème de dérivation terme à terme d'une série de fonctions. En posant : $u_n \colon x \mapsto a_n x^n$:

- les u_n sont bien de classe $\mathscr{C}^1$ sur $\left]-R\,;R\right[$;
- la série de fonctions $\sum\limits_{n\geqslant 0} u_n(x)$ converge simplement vers f sur $\left]-R\,;R\right[$;
- d'après le théorème précédent, la série dérivée $\sum\limits_{n\geqslant 0} u_n'(x)$ a pour rayon de convergence R donc, d'après le théorème 6, elle converge uniformément sur tout segment inclus dans $\left]-R\,;R\right[$ (convergence uniforme locale).

Les hypothèses du théorème de dérivation terme à terme d'une série de fonctions sont donc bien vérifiées, d'où directement le résultat.

Exemples

1. Calcul de $\sum_{n=1}^{+\infty} nx^n$.

Exemples

1. Calcul de $\sum_{n=1}^{+\infty} n x^n$.

   La série $\sum_{n\in\mathbb{N}} x^n$ a pour rayon de convergence $R = 1$, et $\forall\, x \in [-1\,;1],\ (x) = \sum_{n=0}^{+\infty} x^n = \frac{1}{1-x}\cdot$

Exemples

1. Calcul de $\displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty} nx^n$.

La série $\displaystyle\sum_{n\in\mathbb{N}} x^n$ a pour rayon de convergence $R=1$, et $\forall\, x \in [-1\,;1]$, $\displaystyle (x) = \sum_{n=0}^{+\infty} x^n = \frac{1}{1-x}$.

Le théorème précédent permet ainsi d'écrire directement, pour tout $x \in \,]-1\,;1[$: $\displaystyle f'(x) = \sum_{n=1}^{+\infty} nx^{n-1}$,

donc $\displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty} nx^{n-1} = \frac{1}{(1-x)^2}$ et enfin : $\displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty} nx^n = \frac{x}{(1-x)^2}$.

Exemples

1. Calcul de $\displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty} nx^n$.

   La série $\displaystyle\sum_{n\in\mathbb{N}} x^n$ a pour rayon de convergence $R=1$, et $\forall\, x \in [-1\,;1],\ (x) = \displaystyle\sum_{n=0}^{+\infty} x^n = \frac{1}{1-x}$.

   Le théorème précédent permet ainsi d'écrire directement, pour tout $x \in\,]-1\,;1[$: $f'(x) = \displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty} nx^{n-1}$,

   donc $\displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty} nx^{n-1} = \frac{1}{(1-x)^2}$ et enfin : $\displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty} nx^n = \frac{x}{(1-x)^2}$.

2. Calcul de $\displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty} n^2x^n$.

Exemples

1. Calcul de $\displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty} nx^n$.

   La série $\displaystyle\sum_{n\in\mathbb{N}} x^n$ a pour rayon de convergence $R = 1$, et $\forall\, x \in [-1\,;1],\ (x) = \displaystyle\sum_{n=0}^{+\infty} x^n = \frac{1}{1-x}\cdot$

   Le théorème précédent permet ainsi d'écrire directement, pour tout $x \in \,]-1\,;1[\, : f'(x) = \displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty} nx^{n-1}$,

   donc $\displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty} nx^{n-1} = \frac{1}{(1-x)^2}$ et enfin : $\displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty} nx^n = \frac{x}{(1-x)^2}\cdot$

2. Calcul de $\displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty} n^2x^n$.

   En reprenant les mêmes notations, et toujours à l'aide du théorème précédent, on a, pour tout $x \in \,]-1\,;1[\, : f''(x) = \displaystyle\sum_{n=2}^{+\infty} n(n-1)x^{n-2}$, donc $x^2 f''(x) = \displaystyle\sum_{\substack{\cancel{n=2}\\ n=1}}^{+\infty} n(n-1)x^n$ puis

Exemples

1. Calcul de $\displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty} nx^n$.

La série $\displaystyle\sum_{n\in\mathbb{N}} x^n$ a pour rayon de convergence $R=1$, et $\forall\, x \in [-1\,;1],\ (x) = \displaystyle\sum_{n=0}^{+\infty} x^n = \frac{1}{1-x}$.

Le théorème précédent permet ainsi d'écrire directement, pour tout $x \in \,]-1\,;1[$: $f'(x) = \displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty} nx^{n-1}$,

donc $\displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty} nx^{n-1} = \frac{1}{(1-x)^2}$ et enfin : $\displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty} nx^n = \frac{x}{(1-x)^2}$.

2. Calcul de $\displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty} n^2x^n$.

En reprenant les mêmes notations, et toujours à l'aide du théorème précédent, on a, pour tout $x \in \,]-1\,;1[$: $f''(x) = \displaystyle\sum_{n=2}^{+\infty} n(n-1)x^{n-2}$, donc $x^2f''(x) = \displaystyle\sum_{\substack{\cancel{n=2}\\ n=1}}^{+\infty} n(n-1)x^n$ puis

$$\sum_{n=1}^{+\infty} n^2x^n = x^2f''(x) + \sum_{n=1}^{+\infty} nx^n = \frac{2x^2}{(1-x)^3} + \frac{x}{(1-x)^2} = \frac{x+x^2}{(1-x)^3}\,.$$

Corollaire:

Avec les mêmes notations, la fonction f est de classe $\mathscr{C}^\infty$ sur sur $]-R\,;R[$ et, pour tout entier naturel k et pour tout $x \in\,]-R\,;R[$:

$$f^{(k)}(x) = \sum_{n=k}^{+\infty} \frac{n!}{(n-k)!} a_n x^{n-k} = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(n+k)!}{n!} a_{n+k} x^n \,.$$

Corollaire:

Avec les mêmes notations, la fonction f est de classe $\mathscr{C}^\infty$ sur sur $]-R\,;R[$ et, pour tout entier naturel k et pour tout $x \in \,]-R\,;R[$:

$$f^{(k)}(x) = \sum_{n=k}^{+\infty} \frac{n!}{(n-k)!} a_n x^{n-k} = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(n+k)!}{n!} a_{n+k} x^n \,.$$

Corollaire:

Avec les mêmes notations on a : $\boxed{\forall\, k \in \mathbb{N}\ ,\ a_k = \dfrac{f^{(k)}(0)}{k!}\ .}$

Corollaire:

Avec les mêmes notations, la fonction f est de classe $\mathscr{C}^\infty$ sur sur $]-R\,;R[$ et, pour tout entier naturel k et pour tout $x \in\,]-R\,;R[$:

$$f^{(k)}(x) = \sum_{n=k}^{+\infty} \frac{n!}{(n-k)!} a_n x^{n-k} = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(n+k)!}{n!} a_{n+k} x^n \,.$$

Corollaire:

Avec les mêmes notations on a : $\boxed{\forall\, k \in \mathbb{N}\ ,\ a_k = \dfrac{f^{(k)}(0)}{k!}\,.}$

Corollaire: **Unicité du développement en série entière**

Soient deux séries entières $f(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} a_n x^n$ et $g(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} b_n x^n$.

Si f et g sont définies et coïncident dans un voisinage de 0, on a $a_n = b_n$ pour tout entier n.

Corollaire:

Avec les mêmes notations, la fonction f est de classe $\mathscr{C}^\infty$ sur sur $]-R\,;R[$ et, pour tout entier naturel k et pour tout $x \in\,]-R\,;R[$:

$$f^{(k)}(x) = \sum_{n=k}^{+\infty} \frac{n!}{(n-k)!} a_n x^{n-k} = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(n+k)!}{n!} a_{n+k} x^n .$$

Corollaire:

Avec les mêmes notations on a : $\boxed{\forall\, k \in \mathbb{N}\ ,\ a_k = \dfrac{f^{(k)}(0)}{k!}\ .}$

Corollaire: **Unicité du développement en série entière**

Soient deux séries entières $f(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} a_n x^n$ et $g(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} b_n x^n$.

Si f et g sont définies et coïncident dans un voisinage de 0, on a $a_n = b_n$ pour tout entier n.

Démonstration

En effet, d'après le théorème précédent, on a, pour tout entier n, $a_n = \dfrac{f^{(n)}(0)}{n!} = \dfrac{g^{(n)}(0)}{n!} = b_n$.

Intégration d'une série entière de la variable réelle

Théorème 14

Soit (a_n) une suite d'éléments de $\mathbb{C}$, et $\sum\limits_{n\in\mathbb{N}} a_n x^n$ une série entière de la variable réelle x, de rayon de convergence $R > 0$. Posons, pour $x \in \,]-R\,;R[$, $f(x) = \sum\limits_{n=0}^{+\infty} a_n x^n$.

a) Pour tout segment $[a\,;b] \subset \,]-R\,;R[$, on a ; $\displaystyle\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x = \sum_{n=0}^{+\infty} \int_a^b (a_n x^n)\,\mathrm{d}x$.

b) En particulier, pour tout $x \in \,]-R\,;R[$, on a : $\displaystyle\int_0^x f(t)\,\mathrm{d}t = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{a_n x^{n+1}}{n+1}$.

Intégration d'une série entière de la variable réelle

Théorème 14

Soit (a_n) une suite d'éléments de $\mathbb{C}$, et $\sum\limits_{n\in\mathbb{N}} a_n x^n$ une série entière de la variable réelle x, de rayon de convergence $R > 0$. Posons, pour $x \in \left]-R\,;R\right[$, $f(x) = \sum\limits_{n=0}^{+\infty} a_n x^n$.

a) Pour tout segment $[a\,;b] \subset \left]-R\,;R\right[$, on a ; $\displaystyle\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x = \sum_{n=0}^{+\infty} \int_a^b (a_n x^n)\,\mathrm{d}x$.

b) En particulier, pour tout $x \in \left]-R\,;R\right[$, on a : $\displaystyle\int_0^x f(t)\,\mathrm{d}t = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{a_n x^{n+1}}{n+1}$.

Démonstration

Car il y a convergence normale donc uniforme de la série de fonctions sur $[a\,;b]$ d'après le théorème 6, et on applique le théorème d'interversion série-intégrale. sur un segment.

Exemple 1

On sait que, pour $|x| < 1$: $\dfrac{1}{1+x} = \displaystyle\sum_{n=0}^{+\infty} (-1)^n x^n$.

Exemple 1

On sait que, pour $|x| < 1$: $\dfrac{1}{1+x} = \sum_{n=0}^{+\infty} (-1)^n x^n$.

Il s'agit d'une série entière de rayon de convergence $R = 1$. On a donc, d'après le théorème précédent :

$$\forall\, x \in \,]-1\,;1[\,,\ \int_0^x \frac{\mathrm{d}t}{1+t} = \sum_{n=0}^{+\infty} (-1)^n \int_0^x t^n \,\mathrm{d}t \quad \text{soit} \quad \ln(1+x) = \sum_{n=0}^{+\infty} (-1)^n \frac{x^{n+1}}{n+1}$$

Exemple 1

On sait que, pour $|x| < 1$: $\dfrac{1}{1+x} = \sum_{n=0}^{+\infty} (-1)^n x^n$.

Il s'agit d'une série entière de rayon de convergence $R = 1$. On a donc, d'après le théorème précédent :

$$\forall\, x \in \left]-1\,;1\right[\,,\ \int_0^x \frac{\mathrm{d}t}{1+t} = \sum_{n=0}^{+\infty} (-1)^n \int_0^x t^n\,\mathrm{d}t \quad \text{soit} \quad \ln(1+x) = \sum_{n=0}^{+\infty} (-1)^n \frac{x^{n+1}}{n+1}$$

ou encore :

$$\boxed{\forall\, x \in \left]-1\,;1\right[\,,\ \ln(1+x) = \sum_{n=1}^{+\infty} (-1)^{n-1} \frac{x^n}{n}\,.}$$

Exemple 1

On sait que, pour $|x| < 1$: $\dfrac{1}{1+x} = \sum_{n=0}^{+\infty} (-1)^n x^n$.

Il s'agit d'une série entière de rayon de convergence $R = 1$. On a donc, d'après le théorème précédent :

$$\forall x \in \,]-1\,;1[\;,\; \int_0^x \frac{\mathrm{d}t}{1+t} = \sum_{n=0}^{+\infty} (-1)^n \int_0^x t^n \,\mathrm{d}t \quad \text{soit} \quad \ln(1+x) = \sum_{n=0}^{+\infty} (-1)^n \frac{x^{n+1}}{n+1}$$

ou encore :

$$\boxed{\forall x \in \,]-1\,;1[\;,\; \ln(1+x) = \sum_{n=1}^{+\infty} (-1)^{n-1} \frac{x^n}{n}\,.}$$

Remarque : En utilisant le CSSA, on peut montrer que la série de fonctions ci-dessus converge uniformément sur $[0\,;1]$, donc l'égalité précédente reste vraie pour tout $x \in \,]-1\,;1]$. Cela a été fait dans le chapitre sur les séries de fonctions.

Exemple 2

On sait que, pour $|x| < 1$: $\dfrac{1}{1+x^2} = \displaystyle\sum_{n=0}^{+\infty} (-1)^n x^{2n}$.

Exemple 2

On sait que, pour $|x| < 1$: $\dfrac{1}{1+x^2} = \displaystyle\sum_{n=0}^{+\infty} (-1)^n x^{2n}$.

Il s'agit d'une série entière de rayon de convergence $R = 1$. On a donc, d'après le théorème précédent :

$$\forall\, x \in \left]-1\,;1\right[,\ \int_0^x \frac{\mathrm{d}t}{1+t^2} = \sum_{n=0}^{+\infty} (-1)^n \int_0^x t^{2n}\,\mathrm{d}t$$

Exemple 2

On sait que, pour $|x| < 1$: $\dfrac{1}{1+x^2} = \sum_{n=0}^{+\infty} (-1)^n x^{2n}$.

Il s'agit d'une série entière de rayon de convergence $R = 1$. On a donc, d'après le théorème précédent :

$$\forall\, x \in \,]-1\,;1[\,,\ \int_0^x \frac{\mathrm{d}t}{1+t^2} = \sum_{n=0}^{+\infty} (-1)^n \int_0^x t^{2n}\,\mathrm{d}t$$

soit :

$$\boxed{\forall\, x \in \,]-1\,;1[\ ,\ \operatorname{Arc\,tan} x = \sum_{n=0}^{+\infty} (-1)^n \frac{x^{2n+1}}{2n+1}\,.}$$

Exemple 2

On sait que, pour $|x| < 1$: $\dfrac{1}{1+x^2} = \displaystyle\sum_{n=0}^{+\infty} (-1)^n x^{2n}$.

Il s'agit d'une série entière de rayon de convergence $R = 1$. On a donc, d'après le théorème précédent :

$$\forall\, x \in\,]-1\,;1[\,,\ \int_0^x \frac{\mathrm{d}t}{1+t^2} = \sum_{n=0}^{+\infty} (-1)^n \int_0^x t^{2n}\,\mathrm{d}t$$

soit :

$$\boxed{\forall\, x \in\,]-1\,;1[\ ,\ \operatorname{Arc\,tan} x = \sum_{n=0}^{+\infty} (-1)^n \frac{x^{2n+1}}{2n+1}\,.}$$

Cette série de fonctions converge en fait uniformément sur le segment $[-1\,;1]$.

Exemple 2

On sait que, pour $|x| < 1$: $\dfrac{1}{1+x^2} = \displaystyle\sum_{n=0}^{+\infty} (-1)^n x^{2n}$.

Il s'agit d'une série entière de rayon de convergence $R = 1$. On a donc, d'après le théorème précédent :

$$\forall\, x \in]-1\,;1[\,,\ \int_0^x \frac{\mathrm{d}t}{1+t^2} = \sum_{n=0}^{+\infty} (-1)^n \int_0^x t^{2n}\,\mathrm{d}t$$

soit :

$$\boxed{\forall\, x \in]-1\,;1[\ ,\ \operatorname{Arctan} x = \sum_{n=0}^{+\infty} (-1)^n \frac{x^{2n+1}}{2n+1}\,.}$$

Cette série de fonctions converge en fait uniformément sur le segment $[-1\,;1]$.

En effet, il est facile de vérifier que cette série vérifie les hypothèses du CSSA sur ce segment, donc converge pour tout $x \in [-1\,;1]$ et, si l'on note $r_n(x)$ son reste d'ordre n, on aura :

$$\forall\, x \in]-1\,;1[\,,\ |r_n(x)| \leqslant \frac{|x|^{2n+3}}{2n+3}$$

Exemple 2

On sait que, pour $|x| < 1$: $\dfrac{1}{1+x^2} = \displaystyle\sum_{n=0}^{+\infty}(-1)^n x^{2n}$.

Il s'agit d'une série entière de rayon de convergence $R = 1$. On a donc, d'après le théorème précédent :

$$\forall\, x \in \,]-1\,;1[\,,\ \int_0^x \frac{\mathrm{d}t}{1+t^2} = \sum_{n=0}^{+\infty}(-1)^n \int_0^x t^{2n}\,\mathrm{d}t$$

soit :

$$\boxed{\forall\, x \in \,]-1\,;1[\,,\ \operatorname{Arc\,tan} x = \sum_{n=0}^{+\infty}(-1)^n \frac{x^{2n+1}}{2n+1}\,.}$$

Cette série de fonctions converge en fait uniformément sur le segment $[-1\,;1]$.

En effet, il est facile de vérifier que cette série vérifie les hypothèses du CSSA sur ce segment, donc converge pour tout $x \in [-1\,;1]$ et, si l'on note $r_n(x)$ son reste d'ordre n, on aura :

$$\forall\, x \in \,]-1\,;1[\,,\ |r_n(x)| \leqslant \frac{|x|^{2n+3}}{2n+3}$$

donc $\|r_n\|_\infty^{[-1;1]} \leqslant \dfrac{1}{2n+3}$ et $\displaystyle\lim_{n\to+\infty} \|r_n\|_\infty = 0$.

Exemple 2

On sait que, pour $|x| < 1$: $\dfrac{1}{1+x^2} = \sum\limits_{n=0}^{+\infty} (-1)^n x^{2n}$.

Il s'agit d'une série entière de rayon de convergence $R = 1$. On a donc, d'après le théorème précédent :

$$\forall\, x \in \left]-1\,;1\right[\,,\ \int_0^x \frac{\mathrm{d}t}{1+t^2} = \sum_{n=0}^{+\infty} (-1)^n \int_0^x t^{2n}\,\mathrm{d}t$$

soit :

$$\boxed{\forall\, x \in \left]-1\,;1\right[\ ,\ \operatorname{Arc}\tan x = \sum_{n=0}^{+\infty} (-1)^n \frac{x^{2n+1}}{2n+1}\,.}$$

Cette série de fonctions converge en fait uniformément sur le segment $[-1\,;1]$.

En effet, il est facile de vérifier que cette série vérifie les hypothèses du CSSA sur ce segment, donc converge pour tout $x \in [-1\,;1]$ et, si l'on note $r_n(x)$ son reste d'ordre n, on aura :

$$\forall\, x \in \left]-1\,;1\right[\,,\ |r_n(x)| \leqslant \frac{|x|^{2n+3}}{2n+3}$$

donc $\|r_n\|_\infty^{[-1;1]} \leqslant \dfrac{1}{2n+3}$ et $\lim\limits_{n\to+\infty} \|r_n\|_\infty = 0$. Cette convergence uniforme entraîne alors la continuité de la fonction somme sur le segment $[-1\,;1]$, et l'égalité ci-dessus reste donc vraie pour tout $x \in [-1\,;1]$.

Exemple 2

On sait que, pour $|x| < 1$: $\dfrac{1}{1+x^2} = \sum_{n=0}^{+\infty} (-1)^n x^{2n}$.

Il s'agit d'une série entière de rayon de convergence $R = 1$. On a donc, d'après le théorème précédent :

$$\forall\, x \in\,]-1\,;1[\,,\ \int_0^x \frac{\mathrm{d}t}{1+t^2} = \sum_{n=0}^{+\infty} (-1)^n \int_0^x t^{2n}\,\mathrm{d}t$$

soit :

$$\boxed{\forall\, x \in\,]-1\,;1[\ ,\ \operatorname{Arc}\tan x = \sum_{n=0}^{+\infty} (-1)^n \frac{x^{2n+1}}{2n+1}\,.}$$

Cette série de fonctions converge en fait uniformément sur le segment $[-1\,;1]$.

En effet, il est facile de vérifier que cette série vérifie les hypothèses du CSSA sur ce segment, donc converge pour tout $x \in [-1\,;1]$ et, si l'on note $r_n(x)$ son reste d'ordre n, on aura :

$$\forall\, x \in\,]-1\,;1[\,,\ |r_n(x)| \leqslant \frac{|x|^{2n+3}}{2n+3}$$

donc $\|r_n\|_\infty^{[-1;1]} \leqslant \dfrac{1}{2n+3}$ et $\lim\limits_{n\to+\infty} \|r_n\|_\infty = 0$. Cette convergence uniforme entraîne alors la continuité de la fonction somme sur le segment $[-1\,;1]$, et l'égalité ci-dessus reste donc vraie pour tout $x \in [-1\,;1]$.

En particulier, pour $x = 1$ on (re)trouve la formule célèbre : $\displaystyle\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(-1)^n}{2n+1} = \frac{\pi}{4}$.

DÉVELOPPEMENT EN SÉRIE ENTIÈRE

Définition

Définition 8

On dit qu'une fonction $f : \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ est <u>développable en série entière dans un voisinage V de 0</u> s'il existe une série entière $\sum_{n\in\mathbb{N}} a_n z^n$ de rayon de convergence $R > 0$ telle que, pour tout $z \in V$, $f(z) = \sum_{n=0}^{+\infty} a_n z^n$.

Définition

Définition 8

On dit qu'une fonction $f : \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ est <u>développable en série entière dans un voisinage V de 0</u> s'il existe une série entière $\sum_{n\in\mathbb{N}} a_n z^n$ de rayon de convergence $R > 0$ telle que, pour tout $z \in V$, $f(z) = \sum_{n=0}^{+\infty} a_n z^n$.

Si f est une fonction de la variable réelle x, développable en série entière au voisinage de 0, on a donc :

$$\exists r > 0 \text{ tel que } \forall\, x \in \left]-r\,;r\right[\ ,\ f(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} a_n x^n\,.$$

Définition

Définition 8

On dit qu'une fonction $f : \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ est <u>développable en série entière dans un voisinage V de 0</u> s'il existe une série entière $\sum_{n\in\mathbb{N}} a_n z^n$ de rayon de convergence $R > 0$ telle que, pour tout $z \in V$, $f(z) = \sum_{n=0}^{+\infty} a_n z^n$.

Si f est une fonction de la variable réelle x, développable en série entière au voisinage de 0, on a donc :

$$\exists r > 0 \text{ tel que } \forall\, x \in \left]-r\,;r\right[\ ,\ f(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} a_n x^n\,.$$

D'après les résultats précédents, on en déduit :

- f est de classe $\mathscr{C}^\infty$ sur $]-r\,;r[$;

Définition

Définition 8

On dit qu'une fonction $f : \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ est <u>développable en série entière dans un voisinage V de 0</u> s'il existe une série entière $\sum_{n\in\mathbb{N}} a_n z^n$ de rayon de convergence $R > 0$ telle que, pour tout $z \in V$, $f(z) = \sum_{n=0}^{+\infty} a_n z^n$.

Si f est une fonction de la variable réelle x, développable en série entière au voisinage de 0, on a donc :

$$\exists r > 0 \text{ tel que } \forall\, x \in \left]-r\,;r\right[\ ,\ f(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} a_n x^n\,.$$

D'après les résultats précédents, on en déduit :

- f est de classe $\mathscr{C}^\infty$ sur $]-r\,;r[$;
- $\forall\, n \in \mathbb{N}\ ,\ a_n = \dfrac{f^{(n)}(0)}{n!}$;

Définition

Définition 8

On dit qu'une fonction $f : \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ est <u>développable en série entière dans un voisinage V de 0</u> s'il existe une série entière $\sum_{n\in\mathbb{N}} a_n z^n$ de rayon de convergence $R > 0$ telle que, pour tout $z \in V$, $f(z) = \sum_{n=0}^{+\infty} a_n z^n$.

Si f est une fonction de la variable réelle x, développable en série entière au voisinage de 0, on a donc :

$$\exists r > 0 \text{ tel que } \forall\, x \in \left]-r\,;r\right[\ ,\ f(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} a_n x^n\,.$$

D'après les résultats précédents, on en déduit :

- f est de classe $\mathscr{C}^\infty$ sur $]-r\,;r[$;
- $\forall\, n \in \mathbb{N}\ ,\ a_n = \dfrac{f^{(n)}(0)}{n!}$;

donc la série entière $\sum_{n\in\mathbb{N}} a_n x^n$ n'est autre que la série de Taylor de f an 0.

On vient de voir que, si f est développable en série entière au voisinage de 0, cette série entière n'est autre que la série de Taylor de f. La réciproque de cette propriété est fausse :

On vient de voir que, si f est développable en série entière au voisinage de 0, cette série entière n'est autre que la série de Taylor de f. La réciproque de cette propriété est fausse :

Il existe des fonctions de classe $\mathscr{C}^\infty$ au voisinage de 0 dont la série de Taylor en 0 a un rayon de convergence non nul, mais dont la somme ne coïncide pas avec f.

On vient de voir que, si f est développable en série entière au voisinage de 0, cette série entière n'est autre que la série de Taylor de f. La réciproque de cette propriété est fausse :

Il existe des fonctions de classe $\mathscr{C}^\infty$ au voisinage de 0 dont la série de Taylor en 0 a un rayon de convergence non nul, mais dont la somme ne coïncide pas avec f.

Exemple

Soit f définie sur $\mathbb{R}$ par :

$$f(x) = \mathrm{e}^{-\frac{1}{x^2}} \text{ si } x \neq 0 \quad \text{et} \quad f(0) = 0\,.$$

On vient de voir que, si f est développable en série entière au voisinage de 0, cette série entière n'est autre que la série de Taylor de f. La réciproque de cette propriété est fausse :

Il existe des fonctions de classe $\mathscr{C}^\infty$ au voisinage de 0 dont la série de Taylor en 0 a un rayon de convergence non nul, mais dont la somme ne coïncide pas avec f.

Exemple

Soit f définie sur $\mathbb{R}$ par :

$$f(x) = \mathrm{e}^{-\frac{1}{x^2}} \text{ si } x \neq 0 \quad \text{et} \quad f(0) = 0\,.$$

On vérifie aisément, à l'aide du théorème de prolongement des fonctions de classe $\mathscr{C}^1$ (itéré), que f est de classe $\mathscr{C}^\infty$ sur $\mathbb{R}$, et que $f^{(n)}(0) = 0$ pour tout n.

On vient de voir que, si f est développable en série entière au voisinage de 0, cette série entière n'est autre que la série de Taylor de f. La réciproque de cette propriété est fausse :

Il existe des fonctions de classe $\mathscr{C}^\infty$ au voisinage de 0 dont la série de Taylor en 0 a un rayon de convergence non nul, mais dont la somme ne coïncide pas avec f.

Exemple

Soit f définie sur $\mathbb{R}$ par :

$$f(x) = \mathrm{e}^{-\frac{1}{x^2}} \text{ si } x \neq 0 \quad \text{et} \quad f(0) = 0\,.$$

On vérifie aisément, à l'aide du théorème de prolongement des fonctions de classe $\mathscr{C}^1$ (itéré), que f est de classe $\mathscr{C}^\infty$ sur $\mathbb{R}$, et que $f^{(n)}(0) = 0$ pour tout n.

Ainsi la série de Taylor de f donne la fonction nulle ; cette série a un rayon de convergence infini et ne coïncide avec f qu'en 0.

Méthodes de développement en série entière : 1) utilisation d'une formule de Taylor

Soit f une fonction de la variable réelle x, à valeurs dans $\mathbb{C}$, de classe $\mathscr{C}^\infty$ dans un voisinage V de 0. On a alors, pour tout $x \in V$ et tout $n \in \mathbb{N}$:

$$f(x) = \sum_{k=0}^{n} \frac{f^{(k)}(0)}{k!} x^k + r_n(x)\,.$$

Méthodes de développement en série entière : 1) utilisation d'une formule de Taylor

Soit f une fonction de la variable réelle x, à valeurs dans $\mathbb{C}$, de classe $\mathscr{C}^\infty$ dans un voisinage V de 0. On a alors, pour tout $x \in V$ et tout $n \in \mathbb{N}$:

$$f(x) = \sum_{k=0}^{n} \frac{f^{(k)}(0)}{k!} x^k + r_n(x) \,.$$

Pour montrer que f est développable en série entière au voisinage de 0, il suffit donc de démontrer qu'il existe $r > 0$ tel que, pour tout $x \in \left]-r\,;r\right[$ on ait : $\lim\limits_{n\to\infty} r_n(x) = 0$.

Méthodes de développement en série entière : 1) utilisation d'une formule de Taylor

Soit f une fonction de la variable réelle x, à valeurs dans $\mathbb{C}$, de classe $\mathscr{C}^\infty$ dans un voisinage V de 0. On a alors, pour tout $x \in V$ et tout $n \in \mathbb{N}$:

$$f(x) = \sum_{k=0}^{n} \frac{f^{(k)}(0)}{k!} x^k + r_n(x)\,.$$

Pour montrer que f est développable en série entière au voisinage de 0, il suffit donc de démontrer qu'il existe $r > 0$ tel que, pour tout $x \in]-r\,;r[$ on ait : $\lim\limits_{n \to \infty} r_n(x) = 0$. Pour cela, on peut utiliser :

- l'inégalité de Taylor-Lagrange : $|r_n(x)| \leqslant \dfrac{|x|^{n+1}}{(n+1)!} \sup\limits_{t \in [0,x]} \left|f^{n+1}(t)\right|$;

Méthodes de développement en série entière : 1) utilisation d'une formule de Taylor

Soit f une fonction de la variable réelle x, à valeurs dans $\mathbb{C}$, de classe $\mathscr{C}^\infty$ dans un voisinage V de 0. On a alors, pour tout $x \in V$ et tout $n \in \mathbb{N}$:

$$f(x) = \sum_{k=0}^{n} \frac{f^{(k)}(0)}{k!} x^k + r_n(x)\,.$$

Pour montrer que f est développable en série entière au voisinage de 0, il suffit donc de démontrer qu'il existe $r > 0$ tel que, pour tout $x \in \left]-r\,;r\right[$ on ait : $\lim\limits_{n\to\infty} r_n(x) = 0$. Pour cela, on peut utiliser :

- l'inégalité de Taylor-Lagrange : $|r_n(x)| \leqslant \dfrac{|x|^{n+1}}{(n+1)!} \sup\limits_{t\in[0,x]} \left|f^{n+1}(t)\right|$;
- ou la formule de Taylor avec reste intégrale : $r_n(x) = \displaystyle\int_0^x \frac{(x-t)^n}{n!} f^{(n+1)}(t)\,\mathrm{d}t\,.$

Méthodes de développement en série entière : 1) utilisation d'une formule de Taylor

Soit f une fonction de la variable réelle x, à valeurs dans $\mathbb{C}$, de classe $\mathscr{C}^\infty$ dans un voisinage V de 0. On a alors, pour tout $x \in V$ et tout $n \in \mathbb{N}$:

$$f(x) = \sum_{k=0}^{n} \frac{f^{(k)}(0)}{k!} x^k + r_n(x)\,.$$

Pour montrer que f est développable en série entière au voisinage de 0, il suffit donc de démontrer qu'il existe $r > 0$ tel que, pour tout $x \in \left]-r\,;r\right[$ on ait : $\lim\limits_{n\to\infty} r_n(x) = 0$. Pour cela, on peut utiliser :

- l'inégalité de Taylor-Lagrange : $|r_n(x)| \leqslant \dfrac{|x|^{n+1}}{(n+1)!} \sup\limits_{t\in[0,x]} \left|f^{n+1}(t)\right|$;
- ou la formule de Taylor avec reste intégrale : $r_n(x) = \displaystyle\int_0^x \frac{(x-t)^n}{n!} f^{(n+1)}(t)\,\mathrm{d}t\,.$

Exemple 1

À l'aide de l'inégalité de Taylor-Lagrange, on a déjà obtenu les développements en série entière des fonctions $\sin$, $\cos$ et $\exp$.

Ces développements en série entière ont un rayon de convergence infini.

Méthodes de développement en série entière : 1) utilisation d'une formule de Taylor

Soit f une fonction de la variable réelle x, à valeurs dans $\mathbb{C}$, de classe $\mathscr{C}^\infty$ dans un voisinage V de 0. On a alors, pour tout $x \in V$ et tout $n \in \mathbb{N}$:

$$f(x) = \sum_{k=0}^{n} \frac{f^{(k)}(0)}{k!} x^k + r_n(x)\,.$$

Pour montrer que f est développable en série entière au voisinage de 0, il suffit donc de démontrer qu'il existe $r > 0$ tel que, pour tout $x \in \left]-r\,;r\right[$ on ait : $\lim\limits_{n\to\infty} r_n(x) = 0$. Pour cela, on peut utiliser :

- l'inégalité de Taylor-Lagrange : $|r_n(x)| \leqslant \dfrac{|x|^{n+1}}{(n+1)!} \sup\limits_{t\in[0,x]} \left|f^{n+1}(t)\right|$;
- ou la formule de Taylor avec reste intégrale : $r_n(x) = \displaystyle\int_0^x \frac{(x-t)^n}{n!} f^{(n+1)}(t)\,\mathrm{d}t\,.$

Exemple 1

À l'aide de l'inégalité de Taylor-Lagrange, on a déjà obtenu les développements en série entière des fonctions $\sin$, $\cos$ et $\exp$.

Ces développements en série entière ont un rayon de convergence infini.

$\hookrightarrow$ Tous ces développements en série entière sont à savoir par cœur et figurent à la fin de ce chapitre.

Exemple 2

Soit α un nombre réel, et $f(x) = (1+x)^\alpha$ pour $x \in]-1\,;1[$.

Exemple 2

Soit α un nombre réel, et $f(x) = (1+x)^\alpha$ pour $x \in \left]-1\,;1\right[$.

Quelle que soit la valeur de α, f est de classe $\mathscr{C}^\infty$ sur $\left]-1\,;1\right[$ et, pour tout $k \in \mathbb{N}^*$ on a :

$$f^{(k)}(x) = \alpha(\alpha-1)\ldots(\alpha-k+1)(1+x)^{\alpha-k}\,.$$

Exemple 2

Soit α un nombre réel, et $f(x) = (1+x)^\alpha$ pour $x \in \left]-1\,;1\right[$.

Quelle que soit la valeur de α, f est de classe $\mathscr{C}^\infty$ sur $\left]-1\,;1\right[$ et, pour tout $k \in \mathbb{N}^*$ on a :

$$f^{(k)}(x) = \alpha(\alpha-1)\dots(\alpha-k+1)(1+x)^{\alpha-k}.$$

On utilisera ici la formule de Taylor avec reste intégrale :

$$\forall\, x \in \left]-1\,;1\right[\,,\ f(x) = \sum_{k=0}^{n} \frac{f^{(k)}(0)}{k!} x^k + r_n(x) \quad \text{avec} \quad r_n(x) = \int_0^x \frac{(x-t)^n}{n!} f^{(n+1)}(t)\,\mathrm{d}t$$

Exemple 2

Soit α un nombre réel, et $f(x) = (1+x)^\alpha$ pour $x \in \left]-1\,;1\right[$.
Quelle que soit la valeur de α, f est de classe $\mathscr{C}^\infty$ sur $\left]-1\,;1\right[$ et, pour tout $k \in \mathbb{N}^*$ on a :

$$f^{(k)}(x) = \alpha(\alpha-1)\dots(\alpha-k+1)(1+x)^{\alpha-k}\,.$$

On utilisera ici la formule de Taylor avec reste intégrale :

$$\forall\, x \in \left]-1\,;1\right[\ ,\ f(x) = \sum_{k=0}^{n} \frac{f^{(k)}(0)}{k!}x^k + r_n(x) \quad \text{avec} \quad r_n(x) = \int_0^x \frac{(x-t)^n}{n!} f^{(n+1)}(t)\,\mathrm{d}t$$

soit

$$\begin{aligned} r_n(x) &= \frac{\alpha(\alpha-1)\cdots(\alpha-n)}{n!}\int_0^x (x-t)^n(1+t)^{\alpha-n-1}\,\mathrm{d}t \\ &= \frac{\alpha(\alpha-1)\cdots(\alpha-n)}{n!}\int_0^x \left(\frac{x-t}{1+t}\right)^n (1+t)^{\alpha-1}\,\mathrm{d}t\,. \end{aligned}$$

Exemple 2

On utilisera ici la formule de Taylor avec reste intégrale :

$$\forall\, x \in \left]-1\,;1\right[\ ,\ f(x) = \sum_{k=0}^{n} \frac{f^{(k)}(0)}{k!} x^k + r_n(x) \quad \text{avec} \quad r_n(x) = \int_0^x \frac{(x-t)^n}{n!} f^{(n+1)}(t)\,\mathrm{d}t$$

soit

$$\begin{aligned} r_n(x) &= \frac{\alpha(\alpha-1)\cdots(\alpha-n)}{n!} \int_0^x (x-t)^n (1+t)^{\alpha-n-1}\,\mathrm{d}t \\ &= \frac{\alpha(\alpha-1)\cdots(\alpha-n)}{n!} \int_0^x \left(\frac{x-t}{1+t}\right)^n (1+t)^{\alpha-1}\,\mathrm{d}t\,. \end{aligned}$$

Or, pour t compris entre 0 et x (ou x et 0), $\left|\dfrac{x-t}{1+t}\right| \leqslant |x|$ (en effet, la fonction homographique $t \mapsto \dfrac{x-t}{1+t}$ est monotone sur $\left]-1\,;+\infty\right[$) donc on a l'inégalité :

$$|r_n(x)| \leqslant \underbrace{\left|\frac{\alpha(\alpha-1)\cdots(\alpha-n)}{n!} x^n\right|}_{=u_n} \left|\int_0^x (1+t)^{\alpha-1}\,\mathrm{d}t\right|\,.$$

Exemple 2

$$\begin{aligned} r_n(x) &= \frac{\alpha(\alpha-1)\cdots(\alpha-n)}{n!}\int_0^x (x-t)^n(1+t)^{\alpha-n-1}\,\mathrm{d}t \\ &= \frac{\alpha(\alpha-1)\cdots(\alpha-n)}{n!}\int_0^x \left(\frac{x-t}{1+t}\right)^n(1+t)^{\alpha-1}\,\mathrm{d}t\,. \end{aligned}$$

Or, pour t compris entre 0 et x (ou x et 0), $\left|\dfrac{x-t}{1+t}\right| \leqslant |x|$ (en effet, la fonction homographique $t \mapsto \dfrac{x-t}{1+t}$ est monotone sur $]-1\,;+\infty[$) donc on a l'inégalité :

$$|r_n(x)| \leqslant \underbrace{\left|\frac{\alpha(\alpha-1)\cdots(\alpha-n)}{n!}x^n\right|}_{=u_n}\left|\int_0^x (1+t)^{\alpha-1}\,\mathrm{d}t\right|\,.$$

Or l'expression notée u_n ci-dessus tend vers 0 quand $n \to +\infty$, puisque $\left|\dfrac{u_{n+1}}{u_n}\right| = \left|\dfrac{a-n-1}{n+1}x\right| \to |x| < 1$ et en vertu de la règle de d'Alembert.

Exemple 2

$$\begin{aligned} r_n(x) &= \frac{\alpha(\alpha-1)\cdots(\alpha-n)}{n!}\int_0^x (x-t)^n(1+t)^{\alpha-n-1}\,\mathrm{d}t \\ &= \frac{\alpha(\alpha-1)\cdots(\alpha-n)}{n!}\int_0^x \left(\frac{x-t}{1+t}\right)^n (1+t)^{\alpha-1}\,\mathrm{d}t\,. \end{aligned}$$

Or, pour t compris entre 0 et x (ou x et 0), $\left|\dfrac{x-t}{1+t}\right| \leqslant |x|$ (en effet, la fonction homographique $t \mapsto \dfrac{x-t}{1+t}$ est monotone sur $]-1;+\infty[$) donc on a l'inégalité :

$$|r_n(x)| \leqslant \underbrace{\left|\frac{\alpha(\alpha-1)\cdots(\alpha-n)}{n!}x^n\right|}_{=u_n}\left|\int_0^x (1+t)^{\alpha-1}\,\mathrm{d}t\right|\,.$$

Or l'expression notée u_n ci-dessus tend vers 0 quand $n \to +\infty$, puisque
$\left|\dfrac{u_{n+1}}{u_n}\right| = \left|\dfrac{a-n-1}{n+1}x\right| \to |x| < 1$ et en vertu de la règle de d'Alembert.

Donc, pour tout $x \in]-1;1[$, $\lim\limits_{n\to+\infty} r_n(x) = 0$ et $f(x) = \displaystyle\sum_{k=0}^{+\infty}\frac{f^{(k)}(0)}{k!}x^k$ soit :

$$\boxed{\forall\, \alpha \in \mathbb{R}\ ,\ \forall\, x \in]-1;1[\ ,\ (1+x)^\alpha = 1 + \frac{\alpha}{1!}x + \frac{\alpha(\alpha-1)}{2!}x^2 + \cdots + \frac{\alpha(\alpha-1)\ldots(\alpha-n+1)}{n!}x^n + \cdots}$$

(si $\alpha \in \mathbb{N}$, la somme ci-dessus est finie et l'on retrouve la formule du binôme).

Méthodes de développement en série entière : 2) utilisation de l'intégration ou de la dérivation

- On a déjà obtenu, à la suite du théorème 14, les développements en série entière des fonctions $x \mapsto \ln(1+x)$ et $x \mapsto \mathrm{Arc}\tan x$.

Méthodes de développement en série entière : 2) utilisation de l'intégration ou de la dérivation

- On a déjà obtenu, à la suite du théorème 14, les développements en série entière des fonctions $x \mapsto \ln(1+x)$ et $x \mapsto \operatorname{Arc}\tan x$.
- On peut obtenir de la même manière celui de la fonction $x \mapsto \operatorname{Arc}\sin x$.

Méthodes de développement en série entière : 2) utilisation de l'intégration ou de la dérivation

- On a déjà obtenu, à la suite du théorème 14, les développements en série entière des fonctions $x \mapsto \ln(1+x)$ et $x \mapsto \operatorname{Arc}\tan x$.
- On peut obtenir de la même manière celui de la fonction $x \mapsto \operatorname{Arc}\sin x$.

  En effet, $f : x \mapsto \operatorname{Arc}\sin x$ est de classe $\mathscr{C}^\infty$ sur $]-1\,;1[$ et $f'(x) = \dfrac{1}{\sqrt{1-x^2}} = (1-x^2)^{-1/2}$.

Méthodes de développement en série entière : 2) utilisation de l'intégration ou de la dérivation

- On a déjà obtenu, à la suite du théorème 14, les développements en série entière des fonctions $x \mapsto \ln(1+x)$ et $x \mapsto \operatorname{Arc}\tan x$.

- On peut obtenir de la même manière celui de la fonction $x \mapsto \operatorname{Arc}\sin x$.

  En effet, $f : x \mapsto \operatorname{Arc}\sin x$ est de classe $\mathscr{C}^\infty$ sur $]-1\,;1[$ et $f'(x) = \dfrac{1}{\sqrt{1-x^2}} = (1-x^2)^{-1/2}$.

  D'après le calcul précédent avec $\alpha = -\frac{1}{2}$, pour tout $x \in\,]-1\,;1[$:

Méthodes de développement en série entière : 2) utilisation de l'intégration ou de la dérivation

- On a déjà obtenu, à la suite du théorème 14, les développements en série entière des fonctions $x \mapsto \ln(1+x)$ et $x \mapsto \operatorname{Arc}\tan x$.
- On peut obtenir de la même manière celui de la fonction $x \mapsto \operatorname{Arc}\sin x$.

  En effet, $f : x \mapsto \operatorname{Arc}\sin x$ est de classe $\mathscr{C}^\infty$ sur $]-1\,;1[$ et $f'(x) = \dfrac{1}{\sqrt{1-x^2}} = (1-x^2)^{-1/2}$.

  D'après le calcul précédent avec $\alpha = -\frac{1}{2}$, pour tout $x \in\ ]-1\,;1[$:

$$(1-x)^{-1/2} = 1 + \tfrac{x}{2} + \left(-\tfrac{1}{2}\right)\left(-\tfrac{3}{2}\right)\tfrac{x^2}{2!} - \left(-\tfrac{1}{2}\right)\left(-\tfrac{3}{2}\right)\left(-\tfrac{5}{2}\right)\tfrac{x^3}{3!} + \cdots + \left(-\tfrac{1}{2}\right)\left(-\tfrac{3}{2}\right)\cdots\left(-\tfrac{(2n-1)}{2}\right)\tfrac{(-x)^n}{n!} + \cdots$$

Méthodes de développement en série entière : 2) utilisation de l'intégration ou de la dérivation

- On a déjà obtenu, à la suite du théorème 14, les développements en série entière des fonctions $x \mapsto \ln(1+x)$ et $x \mapsto \operatorname{Arc}\tan x$.

- On peut obtenir de la même manière celui de la fonction $x \mapsto \operatorname{Arc}\sin x$.

  En effet, $f : x \mapsto \operatorname{Arc}\sin x$ est de classe $\mathscr{C}^\infty$ sur $]-1;1[$ et $f'(x) = \dfrac{1}{\sqrt{1-x^2}} = (1-x^2)^{-1/2}$.

  D'après le calcul précédent avec $\alpha = -\frac{1}{2}$, pour tout $x \in]-1;1[$:

$$(1-x)^{-1/2} = 1 + \frac{x}{2} + \left(-\frac{1}{2}\right)\left(-\frac{3}{2}\right)\frac{x^2}{2!} - \left(-\frac{1}{2}\right)\left(-\frac{3}{2}\right)\left(-\frac{5}{2}\right)\frac{x^3}{3!} + \cdots + \left(-\frac{1}{2}\right)\left(-\frac{3}{2}\right)\cdots\left(-\frac{(2n-1)}{2}\right)\frac{(-x)^n}{n!} + \cdots$$

  soit

$$(1-x)^{-1/2} = 1 + \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1\cdot 3\cdot 5\cdots(2n-1)}{2^n n!} x^n$$

Méthodes de développement en série entière : 2) utilisation de l'intégration ou de la dérivation

- On a déjà obtenu, à la suite du théorème 14, les développements en série entière des fonctions $x \mapsto \ln(1+x)$ et $x \mapsto \operatorname{Arc}\tan x$.

- On peut obtenir de la même manière celui de la fonction $x \mapsto \operatorname{Arc}\sin x$.

  En effet, $f : x \mapsto \operatorname{Arc}\sin x$ est de classe $\mathscr{C}^\infty$ sur $]-1\,;1[$ et $f'(x) = \dfrac{1}{\sqrt{1-x^2}} = (1-x^2)^{-1/2}$.

  D'après le calcul précédent avec $\alpha = -\frac{1}{2}$, pour tout $x \in\,]-1\,;1[$:

$$(1-x)^{-1/2} = 1 + \tfrac{x}{2} + \left(-\tfrac{1}{2}\right)\left(-\tfrac{3}{2}\right)\tfrac{x^2}{2!} - \left(-\tfrac{1}{2}\right)\left(-\tfrac{3}{2}\right)\left(-\tfrac{5}{2}\right)\tfrac{x^3}{3!} + \cdots + \left(-\tfrac{1}{2}\right)\left(-\tfrac{3}{2}\right)\cdots\left(-\tfrac{2n-1}{2}\right)\tfrac{(-x)^n}{n!} + \cdots$$

  soit

$$(1-x)^{-1/2} = 1 + \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1\cdot 3\cdot 5\cdots(2n-1)}{2^n n!} x^n = 1 + \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{(2n)!}{2^n n!(2\cdot 4\cdots 2n)} x^n$$

Méthodes de développement en série entière : 2) utilisation de l'intégration ou de la dérivation

- On a déjà obtenu, à la suite du théorème 14, les développements en série entière des fonctions $x \mapsto \ln(1+x)$ et $x \mapsto \operatorname{Arc}\tan x$.

- On peut obtenir de la même manière celui de la fonction $x \mapsto \operatorname{Arc}\sin x$.

  En effet, $f : x \mapsto \operatorname{Arc}\sin x$ est de classe $\mathscr{C}^\infty$ sur $]-1\,;1[$ et $f'(x) = \dfrac{1}{\sqrt{1-x^2}} = (1-x^2)^{-1/2}$.

  D'après le calcul précédent avec $\alpha = -\frac{1}{2}$, pour tout $x \in\ ]-1\,;1[$:

$$(1-x)^{-1/2} = 1 + \tfrac{x}{2} + \left(-\tfrac{1}{2}\right)\left(-\tfrac{3}{2}\right)\tfrac{x^2}{2!} - \left(-\tfrac{1}{2}\right)\left(-\tfrac{3}{2}\right)\left(-\tfrac{5}{2}\right)\tfrac{x^3}{3!} + \cdots + \left(-\tfrac{1}{2}\right)\left(-\tfrac{3}{2}\right)\cdots\left(-\tfrac{(2n-1)}{2}\right)\tfrac{(-x)^n}{n!} + \cdots$$

soit

$$\begin{aligned}(1-x)^{-1/2} &= 1 + \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1\cdot 3\cdot 5\cdots(2n-1)}{2^n n!} x^n = 1 + \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{(2n)!}{2^n n!(2\cdot 4\cdots 2n)} x^n \\ &= 1 + \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{(2n)!}{2^{2n}(n!)^2} x^n\end{aligned}$$

Méthodes de développement en série entière : 2) utilisation de l'intégration ou de la dérivation

- On a déjà obtenu, à la suite du théorème 14, les développements en série entière des fonctions $x \mapsto \ln(1+x)$ et $x \mapsto \operatorname{Arc}\tan x$.

- On peut obtenir de la même manière celui de la fonction $x \mapsto \operatorname{Arc}\sin x$.

  En effet, $f : x \mapsto \operatorname{Arc}\sin x$ est de classe $\mathscr{C}^\infty$ sur $]-1\,;1[$ et $f'(x) = \dfrac{1}{\sqrt{1-x^2}} = (1-x^2)^{-1/2}$.

  D'après le calcul précédent avec $\alpha = -\frac{1}{2}$, pour tout $x \in\,]-1\,;1[$:

$$(1-x)^{-1/2} = 1 + \tfrac{x}{2} + \left(-\tfrac{1}{2}\right)\left(-\tfrac{3}{2}\right)\tfrac{x^2}{2!} - \left(-\tfrac{1}{2}\right)\left(-\tfrac{3}{2}\right)\left(-\tfrac{5}{2}\right)\tfrac{x^3}{3!} + \cdots + \left(-\tfrac{1}{2}\right)\left(-\tfrac{3}{2}\right)\cdots\left(-\tfrac{2n-1}{2}\right)\tfrac{(-x)^n}{n!} + \cdots$$

soit

$$\begin{aligned}(1-x)^{-1/2} &= 1 + \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1\cdot 3\cdot 5\cdots(2n-1)}{2^n n!} x^n = 1 + \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{(2n)!}{2^n n!(2\cdot 4\cdots 2n)} x^n \\ &= 1 + \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{(2n)!}{2^{2n}(n!)^2} x^n = \sum_{n=0}^{+\infty} \binom{2n}{n} \frac{x^n}{2^{2n}}\,.\end{aligned}$$

Méthodes de développement en série entière : 2) utilisation de l'intégration ou de la dérivation

- On a déjà obtenu, à la suite du théorème 14, les développements en série entière des fonctions $x \mapsto \ln(1+x)$ et $x \mapsto \operatorname{Arc}\tan x$.

- On peut obtenir de la même manière celui de la fonction $x \mapsto \operatorname{Arc}\sin x$.

  En effet, $f : x \mapsto \operatorname{Arc}\sin x$ est de classe $\mathscr{C}^\infty$ sur $]-1\,;1[$ et $f'(x) = \dfrac{1}{\sqrt{1-x^2}} = (1-x^2)^{-1/2}$.

  D'après le calcul précédent avec $\alpha = -\frac{1}{2}$, pour tout $x \in]-1\,;1[$:

$$(1-x)^{-1/2} = 1 + \tfrac{x}{2} + \left(-\tfrac{1}{2}\right)\left(-\tfrac{3}{2}\right)\tfrac{x^2}{2!} - \left(-\tfrac{1}{2}\right)\left(-\tfrac{3}{2}\right)\left(-\tfrac{5}{2}\right)\tfrac{x^3}{3!} + \cdots + \left(-\tfrac{1}{2}\right)\left(-\tfrac{3}{2}\right)\cdots\left(-\tfrac{(2n-1)}{2}\right)\tfrac{(-x)^n}{n!} + \cdots$$

  soit

$$(1-x)^{-1/2} = 1 + \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1\cdot 3\cdot 5\cdots(2n-1)}{2^n n!} x^n = 1 + \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{(2n)!}{2^n n!(2\cdot 4\cdots 2n)} x^n$$

$$= 1 + \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{(2n)!}{2^{2n}(n!)^2} x^n = \sum_{n=0}^{+\infty} \binom{2n}{n} \frac{x^n}{2^{2n}}\,.$$

  Ainsi, pour $t \in]-1\,;1[$, $\dfrac{1}{\sqrt{1-t^2}} = \displaystyle\sum_{n=0}^{+\infty} \binom{2n}{n} \frac{t^{2n}}{2^{2n}}$ et le théorème 14 permet de conclure directement :

Méthodes de développement en série entière : 2) utilisation de l'intégration ou de la dérivation

- On a déjà obtenu, à la suite du théorème 14, les développements en série entière des fonctions $x \mapsto \ln(1+x)$ et $x \mapsto \operatorname{Arc}\tan x$.

- On peut obtenir de la même manière celui de la fonction $x \mapsto \operatorname{Arc}\sin x$.

  En effet, $f : x \mapsto \operatorname{Arc}\sin x$ est de classe $\mathscr{C}^\infty$ sur $]-1\,;1[$ et $f'(x) = \dfrac{1}{\sqrt{1-x^2}} = (1-x^2)^{-1/2}$.

  D'après le calcul précédent avec $\alpha = -\frac{1}{2}$, pour tout $x \in\ ]-1\,;1[$:

$$(1-x)^{-1/2} = 1 + \tfrac{x}{2} + \left(-\tfrac{1}{2}\right)\left(-\tfrac{3}{2}\right)\tfrac{x^2}{2!} - \left(-\tfrac{1}{2}\right)\left(-\tfrac{3}{2}\right)\left(-\tfrac{5}{2}\right)\tfrac{x^3}{3!} + \cdots + \left(-\tfrac{1}{2}\right)\left(-\tfrac{3}{2}\right)\cdots\left(-\tfrac{(2n-1)}{2}\right)\tfrac{(-x)^n}{n!} + \cdots$$

soit

$$\begin{aligned}(1-x)^{-1/2} &= 1 + \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1\cdot 3\cdot 5\cdots(2n-1)}{2^n n!}x^n = 1 + \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{(2n)!}{2^n n!(2\cdot 4\cdots 2n)}x^n \\ &= 1 + \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{(2n)!}{2^{2n}(n!)^2}x^n = \sum_{n=0}^{+\infty} \binom{2n}{n}\frac{x^n}{2^{2n}}.\end{aligned}$$

Ainsi, pour $t \in\ ]-1\,;1[$, $\dfrac{1}{\sqrt{1-t^2}} = \displaystyle\sum_{n=0}^{+\infty} \binom{2n}{n}\frac{t^{2n}}{2^{2n}}$ et le théorème 14 permet de conclure directement :

$$\boxed{\forall\, x \in\ ]-1\,;1[\ ,\ \operatorname{Arc}\sin x = \int_0^x \frac{\mathrm{d}t}{\sqrt{1-t^2}} = \sum_{n=0}^{+\infty} \binom{2n}{n}\frac{x^{2n+1}}{2^{2n}(2n+1)}\,.}$$

- Un autre exemple :

Exemple

Déterminer le développement en série entière au voisinage de l'origine de la fonction $f : x \mapsto \ln(1 + x + x^2)$.

- Un autre exemple :

Exemple

Déterminer le développement en série entière au voisinage de l'origine de la fonction $f : x \mapsto \ln(1 + x + x^2)$.

Solution

On utilise ici le théorème 13. La fonction f est de classe $\mathscr{C}^\infty$ sur $\mathbb{R}$ et, pour tout x réel, on a : $f'(x) = \dfrac{2x + 1}{1 + x + x^2}$. On pourrait obtenir le développement en série entière de cette fraction rationnelle en la décomposant en éléments simples (voir plus loin), mais une astuce permet ici de simplifier les calculs.

- Un autre exemple :

Exemple

Déterminer le développement en série entière au voisinage de l'origine de la fonction $f : x \mapsto \ln(1 + x + x^2)$.

Solution

On utilise ici le théorème 13. La fonction f est de classe $\mathscr{C}^\infty$ sur $\mathbb{R}$ et, pour tout x réel, on a : $f'(x) = \dfrac{2x+1}{1+x+x^2}$. On pourrait obtenir le développement en série entière de cette fraction rationnelle en la décomposant en éléments simples (voir plus loin), mais une astuce permet ici de simplifier les calculs.

On remarque que $f'(x) = \dfrac{(2x+1)(1-x)}{(1+x+x^2)(1-x)} = \dfrac{1+x-2x^2}{1-x^3}$; on aura donc, pour $|x| < 1$:

- Un autre exemple :

Exemple

Déterminer le développement en série entière au voisinage de l'origine de la fonction $f : x \mapsto \ln(1 + x + x^2)$.

Solution

On utilise ici le théorème 13. La fonction f est de classe $\mathscr{C}^\infty$ sur $\mathbb{R}$ et, pour tout x réel, on a : $f'(x) = \dfrac{2x+1}{1+x+x^2}$. On pourrait obtenir le développement en série entière de cette fraction rationnelle en la décomposant en éléments simples (voir plus loin), mais une astuce permet ici de simplifier les calculs.

On remarque que $f'(x) = \dfrac{(2x+1)(1-x)}{(1+x+x^2)(1-x)} = \dfrac{1+x-2x^2}{1-x^3}$; on aura donc, pour $|x| < 1$:

$$f'(x) = (1 + x - 2x^2) \sum_{n=0}^{+\infty} x^{3n} = \sum_{n=0}^{+\infty} x^{3n} + \sum_{n=0}^{+\infty} x^{3n+1} - 2 \sum_{n=0}^{+\infty} x^{3n+2}$$

- Un autre exemple :

Exemple

Déterminer le développement en série entière au voisinage de l'origine de la fonction $f : x \mapsto \ln(1 + x + x^2)$.

Solution

On utilise ici le théorème 13. La fonction f est de classe $\mathscr{C}^\infty$ sur $\mathbb{R}$ et, pour tout x réel, on a : $f'(x) = \dfrac{2x+1}{1+x+x^2}$. On pourrait obtenir le développement en série entière de cette fraction rationnelle en la décomposant en éléments simples (voir plus loin), mais une astuce permet ici de simplifier les calculs.

On remarque que $f'(x) = \dfrac{(2x+1)(1-x)}{(1+x+x^2)(1-x)} = \dfrac{1+x-2x^2}{1-x^3}$; on aura donc, pour $|x| < 1$:

$$f'(x) = (1 + x - 2x^2)\sum_{n=0}^{+\infty} x^{3n} = \sum_{n=0}^{+\infty} x^{3n} + \sum_{n=0}^{+\infty} x^{3n+1} - 2\sum_{n=0}^{+\infty} x^{3n+2}$$

ou encore $f(x) = \sum\limits_{n=0}^{+\infty} a_n x^n$ avec $a_n = 1$ si $n \equiv 0 \pmod 3$ ou $n \equiv 1 \pmod 3$ et $a_n = -2$ si $n \equiv 2 \pmod 3$.

- Un autre exemple :

Exemple

Déterminer le développement en série entière au voisinage de l'origine de la fonction $f : x \mapsto \ln(1+x+x^2)$.

Solution

On utilise ici le théorème 13. La fonction f est de classe $\mathscr{C}^\infty$ sur $\mathbb{R}$ et, pour tout x réel, on a : $f'(x) = \dfrac{2x+1}{1+x+x^2}$. On pourrait obtenir le développement en série entière de cette fraction rationnelle en la décomposant en éléments simples (voir plus loin), mais une astuce permet ici de simplifier les calculs.

On remarque que $f'(x) = \dfrac{(2x+1)(1-x)}{(1+x+x^2)(1-x)} = \dfrac{1+x-2x^2}{1-x^3}$; on aura donc, pour $|x| < 1$:

$$f'(x) = (1+x-2x^2)\sum_{n=0}^{+\infty} x^{3n} = \sum_{n=0}^{+\infty} x^{3n} + \sum_{n=0}^{+\infty} x^{3n+1} - 2\sum_{n=0}^{+\infty} x^{3n+2}$$

ou encore $f(x) = \sum\limits_{n=0}^{+\infty} a_n x^n$ avec $a_n = 1$ si $n \equiv 0 \pmod 3$ ou $n \equiv 1 \pmod 3$ et $a_n = -2$ si $n \equiv 2 \pmod 3$.

En intégrant, on a alors, pour $x \in \left]-1;1\right[$, $f(x) = f(0) + \displaystyle\int_0^x f'(t)\,\mathrm{d}t$ soit :

- Un autre exemple :

Exemple

Déterminer le développement en série entière au voisinage de l'origine de la fonction $f : x \mapsto \ln(1+x+x^2)$.

Solution

On utilise ici le théorème 13. La fonction f est de classe $\mathscr{C}^\infty$ sur $\mathbb{R}$ et, pour tout x réel, on a : $f'(x) = \dfrac{2x+1}{1+x+x^2}$. On pourrait obtenir le développement en série entière de cette fraction rationnelle en la décomposant en éléments simples (voir plus loin), mais une astuce permet ici de simplifier les calculs.

On remarque que $f'(x) = \dfrac{(2x+1)(1-x)}{(1+x+x^2)(1-x)} = \dfrac{1+x-2x^2}{1-x^3}$; on aura donc, pour $|x|<1$:

$$f'(x) = (1+x-2x^2)\sum_{n=0}^{+\infty} x^{3n} = \sum_{n=0}^{+\infty} x^{3n} + \sum_{n=0}^{+\infty} x^{3n+1} - 2\sum_{n=0}^{+\infty} x^{3n+2}$$

ou encore $f(x) = \sum\limits_{n=0}^{+\infty} a_n x^n$ avec $a_n = 1$ si $n \equiv 0 \pmod 3$ ou $n \equiv 1 \pmod 3$ et $a_n = -2$ si $n \equiv 2 \pmod 3$.

En intégrant, on a alors, pour $x \in \left]-1\,;1\right[$, $f(x) = f(0) + \displaystyle\int_0^x f'(t)\,\mathrm{d}t$ soit :

$$\forall\, x \in \left]-1\,;1\right[\,,\ \ln(1+x+x^2) = \sum_{n=1}^{+\infty} a_{n-1}\frac{x^n}{n}\,.$$

Méthodes de développement en série entière : 3) combinaison linéaire de développements connus

Exemples

1. À partir du développement de exp, on obtient facilement ceux des fonctions sh et ch, en utilisant :

$$\forall\, x \in \mathbb{R}\ ,\ \mathrm{ch}\, x = \frac{1}{2}(\mathrm{e}^{x} + \mathrm{e}^{-x}) \quad \text{et} \quad \mathrm{sh}\, x = \frac{1}{2}(\mathrm{e}^{x} - \mathrm{e}^{-x})\,\cdot$$

Méthodes de développement en série entière : 3) combinaison linéaire de développements connus

Exemples

1. À partir du développement de $\exp$, on obtient facilement ceux des fonctions sh et ch, en utilisant :

$$\forall x \in \mathbb{R}\ ,\ \mathrm{ch}\, x = \frac{1}{2}(\mathrm{e}^{x} + \mathrm{e}^{-x}) \quad \text{et} \quad \mathrm{sh}\, x = \frac{1}{2}(\mathrm{e}^{x} - \mathrm{e}^{-x})\,\cdot$$

Les séries obtenues ont, comme pour la fonction $\exp$, un rayon de convergence ∞.

Méthodes de développement en série entière : 3) combinaison linéaire de développements connus

Exemples

1. À partir du développement de exp, on obtient facilement ceux des fonctions sh et ch, en utilisant :

$$\forall x \in \mathbb{R}\ ,\ \mathrm{ch}\, x = \frac{1}{2}(\mathrm{e}^{x} + \mathrm{e}^{-x}) \quad \text{et} \quad \mathrm{sh}\, x = \frac{1}{2}(\mathrm{e}^{x} - \mathrm{e}^{-x}) \cdot$$

   Les séries obtenues ont, comme pour la fonction exp, un rayon de convergence ∞.

2. Déterminer le développement en série entière au voisinage de l'origine de $f : x \mapsto \ln(1 + x - 2x^2)$.

Méthodes de développement en série entière : 3) combinaison linéaire de développements connus

Exemples

1. À partir du développement de exp, on obtient facilement ceux des fonctions sh et ch, en utilisant :

$$\forall x \in \mathbb{R}\ ,\ \operatorname{ch} x = \frac{1}{2}(\mathrm{e}^{x} + \mathrm{e}^{-x}) \quad \text{et} \quad \operatorname{sh} x = \frac{1}{2}(\mathrm{e}^{x} - \mathrm{e}^{-x})\,.$$

   Les séries obtenues ont, comme pour la fonction exp, un rayon de convergence ∞.

2. Déterminer le développement en série entière au voisinage de l'origine de $f : x \mapsto \ln(1 + x - 2x^2)$.

Solution

On remarque que $1 + x - 2x^2 = (1 - x)(1 + 2x)$ donc f est définie sur $I = \left]-\frac{1}{2}\,;1\right[$, et, pour tout $x \in I$:
$f(x) = \ln(1 - x) + \ln(1 + 2x)$.

Méthodes de développement en série entière : 3) combinaison linéaire de développements connus

Exemples

1. À partir du développement de exp, on obtient facilement ceux des fonctions sh et ch, en utilisant :

$$\forall x \in \mathbb{R}\ ,\ \operatorname{ch} x = \frac{1}{2}(\mathrm{e}^{x} + \mathrm{e}^{-x}) \quad \text{et} \quad \operatorname{sh} x = \frac{1}{2}(\mathrm{e}^{x} - \mathrm{e}^{-x})\,\cdot$$

   Les séries obtenues ont, comme pour la fonction exp, un rayon de convergence ∞.

2. Déterminer le développement en série entière au voisinage de l'origine de $f : x \mapsto \ln(1 + x - 2x^2)$.

Solution

On remarque que $1 + x - 2x^2 = (1 - x)(1 + 2x)$ donc f est définie sur $I = \left]-\frac{1}{2}\,;1\right[$, et, pour tout $x \in I$:
$f(x) = \ln(1 - x) + \ln(1 + 2x)$.

Du développement en série entière de $x \mapsto \ln(1 + x)$ (qui doit être su par cœur !), on déduit :

$$\forall x \in \left]-1\,;1\right[\ ,\ \ln(1 - x) = -\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{x^n}{n} \quad (\text{RCV} = 1)$$

Méthodes de développement en série entière : 3) combinaison linéaire de développements connus

Exemples

1. À partir du développement de exp, on obtient facilement ceux des fonctions sh et ch, en utilisant :

$$\forall x \in \mathbb{R}\,,\ \mathrm{ch}\, x = \frac{1}{2}(\mathrm{e}^x + \mathrm{e}^{-x}) \quad \text{et} \quad \mathrm{sh}\, x = \frac{1}{2}(\mathrm{e}^x - \mathrm{e}^{-x})\,\cdot$$

   Les séries obtenues ont, comme pour la fonction exp, un rayon de convergence ∞.

2. Déterminer le développement en série entière au voisinage de l'origine de $f : x \mapsto \ln(1 + x - 2x^2)$.

Solution

On remarque que $1 + x - 2x^2 = (1 - x)(1 + 2x)$ donc f est définie sur $I = \left]-\frac{1}{2}\,;1\right[$, et, pour tout $x \in I$: $f(x) = \ln(1 - x) + \ln(1 + 2x)$.

Du développement en série entière de $x \mapsto \ln(1 + x)$ (qui doit être su par cœur !), on déduit :

$$\forall x \in \left]-1\,;1\right[\,,\ \ln(1 - x) = -\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{x^n}{n} \quad (\mathrm{RCV} = 1)$$

$$\forall x \in \left]-\frac{1}{2}\,;\frac{1}{2}\right[\,,\ \ln(1 + 2x) = \sum_{n=1}^{+\infty} (-1)^{n-1} \frac{(2x)^n}{n} \quad \left(\mathrm{RCV} = \frac{1}{2}\right)$$

Méthodes de développement en série entière : 3) combinaison linéaire de développements connus

Exemples

1. À partir du développement de exp, on obtient facilement ceux des fonctions sh et ch, en utilisant :

$$\forall x \in \mathbb{R}\ ,\ \operatorname{ch} x = \frac{1}{2}(\mathrm{e}^{x} + \mathrm{e}^{-x}) \quad \text{et} \quad \operatorname{sh} x = \frac{1}{2}(\mathrm{e}^{x} - \mathrm{e}^{-x}) \cdot$$

Les séries obtenues ont, comme pour la fonction exp, un rayon de convergence ∞.

2. Déterminer le développement en série entière au voisinage de l'origine de $f : x \mapsto \ln(1 + x - 2x^2)$.

Solution

On remarque que $1 + x - 2x^2 = (1 - x)(1 + 2x)$ donc f est définie sur $I = \left]-\frac{1}{2}\,;1\right[$, et, pour tout $x \in I$:
$f(x) = \ln(1 - x) + \ln(1 + 2x)$.

Du développement en série entière de $x \mapsto \ln(1 + x)$ (qui doit être su par cœur !), on déduit :

$$\forall x \in \left]-1\,;1\right[\ ,\ \ln(1 - x) = -\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{x^n}{n} \quad (\text{RCV} = 1)$$

$$\forall x \in \left]-\frac{1}{2}\,;\frac{1}{2}\right[\ ,\ \ln(1 + 2x) = \sum_{n=1}^{+\infty} (-1)^{n-1}\frac{(2x)^n}{n} \quad (\text{RCV} = \frac{1}{2})$$

et finalement : $\forall x \in \left]-\frac{1}{2}\,;\frac{1}{2}\right[\ ,\ f(x) = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{(-1)^{n-1}2^n - 1}{n} x^n \quad (\text{RCV} = \frac{1}{2})$.

Méthodes de développement en série entière : 3) combinaison linéaire de développements connus

Exemples

1. À partir du développement de exp, on obtient facilement ceux des fonctions sh et ch, en utilisant :

$$\forall x \in \mathbb{R}\ ,\ \operatorname{ch} x = \frac{1}{2}(\mathrm{e}^{x} + \mathrm{e}^{-x}) \quad \text{et} \quad \operatorname{sh} x = \frac{1}{2}(\mathrm{e}^{x} - \mathrm{e}^{-x})\cdot$$

   Les séries obtenues ont, comme pour la fonction exp, un rayon de convergence ∞.

2. Déterminer le développement en série entière au voisinage de l'origine de $f : x \mapsto \ln(1 + x - 2x^2)$.

3. Déterminer le développement en série entière au voisinage de l'origine de $f : x \mapsto \operatorname{ch} x\ \cos x$.

Méthodes de développement en série entière : 3) combinaison linéaire de développements connus

Exemples

1. À partir du développement de exp, on obtient facilement ceux des fonctions sh et ch, en utilisant :

$$\forall x \in \mathbb{R}\ ,\ \operatorname{ch} x = \frac{1}{2}(\mathrm{e}^x + \mathrm{e}^{-x}) \quad \text{et} \quad \operatorname{sh} x = \frac{1}{2}(\mathrm{e}^x - \mathrm{e}^{-x})\,\cdot$$

   Les séries obtenues ont, comme pour la fonction exp, un rayon de convergence ∞.

2. Déterminer le développement en série entière au voisinage de l'origine de $f : x \mapsto \ln(1 + x - 2x^2)$.

3. Déterminer le développement en série entière au voisinage de l'origine de $f : x \mapsto \operatorname{ch} x\ \cos x$.

Solution

On écrit, pour tout x réel : $f(x) = \dfrac{1}{4}\left(\mathrm{e}^{(1+\mathrm{i})x} + \mathrm{e}^{(1-\mathrm{i})x} + \mathrm{e}^{(-1+\mathrm{i})x} + \mathrm{e}^{(-1-\mathrm{i})x}\right)$.

Méthodes de développement en série entière : 3) combinaison linéaire de développements connus

Exemples

1. À partir du développement de exp, on obtient facilement ceux des fonctions sh et ch, en utilisant :

$$\forall\, x \in \mathbb{R}\ ,\ \operatorname{ch} x = \frac{1}{2}(e^{x} + e^{-x}) \quad \text{et} \quad \operatorname{sh} x = \frac{1}{2}(e^{x} - e^{-x})\,\cdot$$

   Les séries obtenues ont, comme pour la fonction exp, un rayon de convergence ∞.

2. Déterminer le développement en série entière au voisinage de l'origine de $f : x \mapsto \ln(1 + x - 2x^2)$.

3. Déterminer le développement en série entière au voisinage de l'origine de $f : x \mapsto \operatorname{ch} x \cos x$.

Solution

On écrit, pour tout x réel : $f(x) = \dfrac{1}{4}\left(e^{(1+i)x} + e^{(1-i)x} + e^{(-1+i)x} + e^{(-1-i)x}\right)$. Sachant que, pour tout $z \in \mathbb{C}$, $e^{z} = \displaystyle\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{z^n}{n!}$, on a, pour tout $x \in \mathbb{R}$: :

$$e^{(1+i)x} = \sum_{n=0}^{+\infty}(1+i)^n \frac{x^n}{n!} = \sum_{n=0}^{+\infty}\left(\sqrt{2}e^{i\frac{\pi}{4}}\right)^n \frac{x^n}{n!} = \sum_{n=0}^{+\infty}(\sqrt{2})^n e^{in\frac{\pi}{4}} \frac{x^n}{n!}$$

Méthodes de développement en série entière : 3) combinaison linéaire de développements connus

Exemples

1. À partir du développement de exp, on obtient facilement ceux des fonctions sh et ch, en utilisant :
$$\forall\, x \in \mathbb{R}\ ,\ \operatorname{ch} x = \frac{1}{2}(e^{x} + e^{-x}) \quad \text{et} \quad \operatorname{sh} x = \frac{1}{2}(e^{x} - e^{-x})\,\cdot$$
Les séries obtenues ont, comme pour la fonction exp, un rayon de convergence ∞.
2. Déterminer le développement en série entière au voisinage de l'origine de $f : x \mapsto \ln(1 + x - 2x^2)$.
3. Déterminer le développement en série entière au voisinage de l'origine de $f : x \mapsto \operatorname{ch} x \cos x$.

Solution

On écrit, pour tout x réel : $f(x) = \dfrac{1}{4}\left(e^{(1+i)x} + e^{(1-i)x} + e^{(-1+i)x} + e^{(-1-i)x}\right)$. Sachant que, pour tout $z \in \mathbb{C}$, $e^z = \displaystyle\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{z^n}{n!}$, on a, pour tout $x \in \mathbb{R}$: :

$$e^{(1+i)x} = \sum_{n=0}^{+\infty} (1+i)^n \frac{x^n}{n!} = \sum_{n=0}^{+\infty} \left(\sqrt{2}e^{i\frac{\pi}{4}}\right)^n \frac{x^n}{n!} = \sum_{n=0}^{+\infty} (\sqrt{2})^n e^{in\frac{\pi}{4}} \frac{x^n}{n!}$$

et on obtient le développement en série entière de $e^{(1-i)}x$ en faisant le conjugué, d'où :

Solution (suite)

$$\mathrm{e}^{(1+\mathrm{i})x} + \mathrm{e}^{(1-\mathrm{i})x} = \sum_{n=0}^{+\infty} (\sqrt{2})^n \left(\mathrm{e}^{\mathrm{i}n\frac{\pi}{4}} + \mathrm{e}^{-\mathrm{i}n\frac{\pi}{4}}\right) \frac{x^n}{n!} = 2\sum_{n=0}^{+\infty} (\sqrt{2})^n \cos\left(n\frac{\pi}{4}\right) \frac{x^n}{n!}.$$

Solution (suite)

$$e^{(1+i)x} + e^{(1-i)x} = \sum_{n=0}^{+\infty} (\sqrt{2})^n \left(e^{in\frac{\pi}{4}} + e^{-in\frac{\pi}{4}} \right) \frac{x^n}{n!} = 2 \sum_{n=0}^{+\infty} (\sqrt{2})^n \cos\left(n\frac{\pi}{4} \right) \frac{x^n}{n!} .$$

De la même façon :

$$e^{(-1+i)x} + e^{(-1-i)x} = 2 \sum_{n=0}^{+\infty} (\sqrt{2})^n \cos\left(3n\frac{\pi}{4} \right) \frac{x^n}{n!} ,$$

Solution (suite)

$$e^{(1+i)x}+e^{(1-i)x}=\sum_{n=0}^{+\infty}(\sqrt{2})^n\left(e^{in\frac{\pi}{4}}+e^{-in\frac{\pi}{4}}\right)\frac{x^n}{n!}=2\sum_{n=0}^{+\infty}(\sqrt{2})^n\cos\left(n\frac{\pi}{4}\right)\frac{x^n}{n!}\cdot$$

De la même façon :

$$e^{(-1+i)x}+e^{(-1-i)x}=2\sum_{n=0}^{+\infty}(\sqrt{2})^n\cos\left(3n\frac{\pi}{4}\right)\frac{x^n}{n!},$$

d'où

$$f(x)=\frac{1}{2}\sum_{n=0}^{+\infty}(\sqrt{2})^n\left(\cos\left(n\frac{\pi}{4}\right)+\cos\left(3n\frac{\pi}{4}\right)\right)\frac{x^n}{n!}\cdot$$

Solution (suite)

$$e^{(1+i)x} + e^{(1-i)x} = \sum_{n=0}^{+\infty} (\sqrt{2})^n \left(e^{in\frac{\pi}{4}} + e^{-in\frac{\pi}{4}} \right) \frac{x^n}{n!} = 2 \sum_{n=0}^{+\infty} (\sqrt{2})^n \cos\left(n\frac{\pi}{4}\right) \frac{x^n}{n!} \cdot$$

De la même façon :

$$e^{(-1+i)x} + e^{(-1-i)x} = 2 \sum_{n=0}^{+\infty} (\sqrt{2})^n \cos\left(3n\frac{\pi}{4}\right) \frac{x^n}{n!} ,$$

d'où

$$f(x) = \frac{1}{2} \sum_{n=0}^{+\infty} (\sqrt{2})^n \left(\cos\left(n\frac{\pi}{4}\right) + \cos\left(3n\frac{\pi}{4}\right) \right) \frac{x^n}{n!} \cdot$$

Mais $\cos\left(n\frac{\pi}{4}\right) + \cos\left(3n\frac{\pi}{4}\right)$ est nul sauf lors que n est multiple de 4, et lorsque $n = 4p$, cette expression est égale à $2\cos(p\pi) = 2(-1)^p$, et finalement :

Solution (suite)

$$\mathrm{e}^{(1+\mathrm{i})x}+\mathrm{e}^{(1-\mathrm{i})x}=\sum_{n=0}^{+\infty}(\sqrt{2})^n\left(\mathrm{e}^{\mathrm{i}n\frac{\pi}{4}}+\mathrm{e}^{-\mathrm{i}n\frac{\pi}{4}}\right)\frac{x^n}{n!}=2\sum_{n=0}^{+\infty}(\sqrt{2})^n\cos\left(n\frac{\pi}{4}\right)\frac{x^n}{n!}\,.$$

De la même façon :

$$\mathrm{e}^{(-1+\mathrm{i})x}+\mathrm{e}^{(-1-\mathrm{i})x}=2\sum_{n=0}^{+\infty}(\sqrt{2})^n\cos\left(3n\frac{\pi}{4}\right)\frac{x^n}{n!}\,,$$

d'où

$$f(x)=\frac{1}{2}\sum_{n=0}^{+\infty}(\sqrt{2})^n\left(\cos\left(n\frac{\pi}{4}\right)+\cos\left(3n\frac{\pi}{4}\right)\right)\frac{x^n}{n!}\,.$$

Mais $\cos\left(n\frac{\pi}{4}\right)+\cos\left(3n\frac{\pi}{4}\right)$ est nul sauf lors que n est multiple de 4, et lorsque $n=4p$, cette expression est égale à $2\cos(p\pi)=2(-1)^p$, et finalement :

$$\forall\, x\in\mathbb{R}\;,\;f(x)=\sum_{p=0}^{+\infty}(-1)^p\frac{2^{2p}x^{4p}}{(4p)!}\,.$$

Méthodes de développement en série entière : 4) cas d'une fraction rationnelle

Soit $R(z) = \dfrac{P(z)}{Q(z)}$ une fraction rationnelle de la variable complexe z **n'admettant pas 0 pour pôle** (i.e $Q(0) \neq 0$). La décomposition en éléments simples de R **dans $\mathbb{C}$** s'écrit :

$$R(z) = \underbrace{E(z)}_{\text{partie entière}} + \sum_i \sum_j \frac{\lambda_{i,j}}{(z - a_i)^j} \quad \text{(où les } a_i \text{ sont les racines de } Q\text{)}$$

Méthodes de développement en série entière : 4) cas d'une fraction rationnelle

Soit $R(z)=\dfrac{P(z)}{Q(z)}$ une fraction rationnelle de la variable complexe z **n'admettant pas 0 pour pôle** (i.e $Q(0)\neq 0$). La décomposition en éléments simples de R **dans $\mathbb{C}$** s'écrit :

$$R(z)=\underbrace{E(z)}_{\text{partie entière}}+\sum_i\sum_j\frac{\lambda_{i,j}}{(z-a_i)^j}\quad\text{(où les } a_i \text{ sont les racines de } Q\text{)}$$

Or : $\dfrac{1}{(z-a_i)^j}=\dfrac{1}{(-a_i)^j}\cdot\dfrac{1}{\left(1-\frac{z}{a_i}\right)^j}=\dfrac{1}{(-a_i)^j}\left(1-\frac{z}{a_i}\right)^{-j}$ (puisque $a_i\neq 0$ par hypothèse), et on a vu page 120 que :

$$\forall\, p\in\mathbb{N}^*\ ,\ \forall\, z\in\mathbb{C}\ \text{tq}\ |z|<1\ ,\ \frac{1}{(1-z)^p}=\sum_{n=0}^{+\infty}\binom{n+p-1}{p-1}z^n$$

(on pourrait aussi utiliser la formule donnant le développement en série entière de $(1+x)^{-p}$).

Méthodes de développement en série entière : 4) cas d'une fraction rationnelle

Soit $R(z) = \dfrac{P(z)}{Q(z)}$ une fraction rationnelle de la variable complexe z **n'admettant pas 0 pour pôle** (i.e $Q(0) \neq 0$). La décomposition en éléments simples de R **dans $\mathbb{C}$** s'écrit :

$$R(z) = \underbrace{E(z)}_{\text{partie entière}} + \sum_i \sum_j \frac{\lambda_{i,j}}{(z-a_i)^j} \quad \text{(où les } a_i \text{ sont les racines de } Q)$$

Or : $\dfrac{1}{(z-a_i)^j} = \dfrac{1}{(-a_i)^j} \cdot \dfrac{1}{\left(1-\frac{z}{a_i}\right)^j} = \dfrac{1}{(-a_i)^j}\left(1-\frac{z}{a_i}\right)^{-j}$ (puisque $a_i \neq 0$ par hypothèse), et on a vu page 120 que :

$$\forall\, p \in \mathbb{N}^*\ ,\ \forall\, z \in \mathbb{C} \text{ tq } |z| < 1\ ,\ \frac{1}{(1-z)^p} = \sum_{n=0}^{+\infty} \binom{n+p-1}{p-1} z^n$$

(on pourrait aussi utiliser la formule donnant le développement en série entière de $(1+x)^{-p}$).

On peut donc obtenir le développement en série entière de chaque élément simple $\dfrac{1}{\left(1-\frac{z}{a_i}\right)^j}$ pour $\left|\dfrac{z}{a_i}\right| < 1$ soit $|z| < |a_i|$, et la combinaison linéaire des développements ainsi obtenus donnera le développent en série entière de la fraction rationnelle R, avec pour rayon de convergence $R = \min(|a_i|)$

Exemple

Développement en série entière, au voisinage de 0 de $f : x \mapsto \dfrac{1-x^2}{x^2 - 2x\cos\theta + 1}$ avec $\theta \notin \pi\mathbb{Z}$.

Exemple

Développement en série entière, au voisinage de 0 de $f : x \mapsto \dfrac{1-x^2}{x^2-2x\cos\theta+1}$ avec $\theta \notin \pi\mathbb{Z}$.

Solution

f est définie sur $\mathbb{R}$ et la décomposition en éléments simples s'écrit, pour tout x réel :

$$f(x) = \frac{1-x^2}{(x-\mathrm{e}^{\mathrm{i}\theta})(x-\mathrm{e}^{-\mathrm{i}\theta})} = -1 - \frac{\mathrm{e}^{\mathrm{i}\theta}}{x-\mathrm{e}^{\mathrm{i}\theta}} - \frac{\mathrm{e}^{-\mathrm{i}\theta}}{x-\mathrm{e}^{-\mathrm{i}\theta}}$$

(calculs à savoir faire),

Exemple

Développement en série entière, au voisinage de 0 de $f : x \mapsto \dfrac{1-x^2}{x^2 - 2x\cos\theta + 1}$ avec $\theta \notin \pi\mathbb{Z}$.

Solution

f est définie sur $\mathbb{R}$ et la décomposition en éléments simples s'écrit, pour tout x réel :

$$f(x) = \frac{1-x^2}{(x-\mathrm{e}^{\mathrm{i}\theta})(x-\mathrm{e}^{-\mathrm{i}\theta})} = -1 - \frac{\mathrm{e}^{\mathrm{i}\theta}}{x-\mathrm{e}^{\mathrm{i}\theta}} - \frac{\mathrm{e}^{-\mathrm{i}\theta}}{x-\mathrm{e}^{-\mathrm{i}\theta}}$$

(calculs à savoir faire), soit encore :

$$f(x) = -1 + \frac{\mathrm{e}^{\mathrm{i}\theta}}{\mathrm{e}^{\mathrm{i}\theta}\left(1-\frac{x}{\mathrm{e}^{\mathrm{i}\theta}}\right)} + \frac{\mathrm{e}^{-\mathrm{i}\theta}}{\mathrm{e}^{-\mathrm{i}\theta}\left(1-\frac{x}{\mathrm{e}^{-\mathrm{i}\theta}}\right)} = -1 + \frac{1}{1-x\mathrm{e}^{-\mathrm{i}\theta}} + + \frac{1}{1-x\mathrm{e}^{\mathrm{i}\theta}}\,.$$

Exemple

Développement en série entière, au voisinage de 0 de $f : x \mapsto \dfrac{1-x^2}{x^2-2x\cos\theta+1}$ avec $\theta \notin \pi\mathbb{Z}$.

Solution

f est définie sur $\mathbb{R}$ et la décomposition en éléments simples s'écrit, pour tout x réel :

$$f(x) = \frac{1-x^2}{(x-e^{i\theta})(x-e^{-i\theta})} = -1 - \frac{e^{i\theta}}{x-e^{i\theta}} - \frac{e^{-i\theta}}{x-e^{-i\theta}}$$

(calculs à savoir faire), soit encore :

$$f(x) = -1 + \frac{e^{i\theta}}{e^{i\theta}\left(1-\frac{x}{e^{i\theta}}\right)} + \frac{e^{-i\theta}}{e^{-i\theta}\left(1-\frac{x}{e^{-i\theta}}\right)} = -1 + \frac{1}{1-xe^{-i\theta}} + +\frac{1}{1-xe^{i\theta}}\,.$$

Pour $\left|xe^{i\theta}\right| < 1$ soit pour $|x| < 1$ on aura donc :

$$f(x) = -1 + \sum_{n=0}^{+\infty}(xe^{i\theta})^n + \sum_{n=0}^{+\infty}(xe^{-i\theta})^n = -1 + 2\sum_{n=0}^{+\infty} x^n\cos n\theta\,.$$

Méthodes de développement en série entière : 5) utilisation du produit de Cauchy

Cette méthode, qui s'appuie sur le théorème 5 conduit, en général, à des expressions compliquées.

Méthodes de développement en série entière : 5) utilisation du produit de Cauchy

Cette méthode, qui s'appuie sur le théorème 5 conduit, en général, à des expressions compliquées.

Exemple : Développement en série entière, au voisinage de 0 de $f : x \mapsto \dfrac{\ln(1+x)}{1+x}$.

Méthodes de développement en série entière : 5) utilisation du produit de Cauchy

Cette méthode, qui s'appuie sur le théorème 5 conduit, en général, à des expressions compliquées.

Exemple : Développement en série entière, au voisinage de 0 de $f : x \mapsto \dfrac{\ln(1+x)}{1+x}$.

Solution

f est définie sur $]-1 ; +\infty[$. Pour $x \in]-1 ; 1[$, on connaît les développements en série entière de $x \mapsto \ln(1+x)$ et de $x \mapsto \dfrac{1}{1+x}$, tous deux de rayon de convergence égal à 1.

Méthodes de développement en série entière : 5) utilisation du produit de Cauchy

Cette méthode, qui s'appuie sur le théorème 5 conduit, en général, à des expressions compliquées.

Exemple : Développement en série entière, au voisinage de 0 de $f : x \mapsto \dfrac{\ln(1+x)}{1+x}$.

Solution

f est définie sur $]-1\,;+\infty[$. Pour $x \in\,]-1\,;1[$, on connaît les développements en série entière de $x \mapsto \ln(1+x)$ et de $x \mapsto \dfrac{1}{1+x}$, tous deux de rayon de convergence égal à 1. Le théorème 5 permet alors d'affirmer que f sera développable en série entière, et que le rayon de convergence de la série entière obtenue sera $R \geqslant 1$; mais puisque f n'est pas définie en -1, on aura en fait $R = 1$.

Méthodes de développement en série entière : 5) utilisation du produit de Cauchy

Cette méthode, qui s'appuie sur le théorème 5 conduit, en général, à des expressions compliquées.

Exemple : Développement en série entière, au voisinage de 0 de $f : x \mapsto \dfrac{\ln(1+x)}{1+x}$.

Solution

f est définie sur $]-1\,;+\infty[$. Pour $x \in\ ]-1\,;1[$, on connaît les développements en série entière de $x \mapsto \ln(1+x)$ et de $x \mapsto \dfrac{1}{1+x}$, tous deux de rayon de convergence égal à 1. Le théorème 5 permet alors d'affirmer que f sera développable en série entière, et que le rayon de convergence de la série entière obtenue sera $R \geqslant 1$; mais puisque f n'est pas définie en -1, on aura en fait $R = 1$.

On a, pour $|x| < 1$:

$$\ln(1+x) = \sum_{n=1}^{+\infty} (-1)^{n-1} \frac{x^n}{n} = x \sum_{n=0}^{+\infty} (-1)^n \frac{x^n}{n+1} \quad \text{et} \quad \frac{1}{1+x} = \sum_{n=0}^{+\infty} (-1)^n x^n$$

Méthodes de développement en série entière : 5) utilisation du produit de Cauchy

Cette méthode, qui s'appuie sur le théorème 5 conduit, en général, à des expressions compliquées.

Exemple : Développement en série entière, au voisinage de 0 de $f : x \mapsto \dfrac{\ln(1+x)}{1+x}$.

Solution

f est définie sur $]-1\,;+\infty[$. Pour $x \in\,]-1\,;1[$, on connaît les développements en série entière de $x \mapsto \ln(1+x)$ et de $x \mapsto \dfrac{1}{1+x}$, tous deux de rayon de convergence égal à 1. Le théorème 5 permet alors d'affirmer que f sera développable en série entière, et que le rayon de convergence de la série entière obtenue sera $R \geqslant 1$; mais puisque f n'est pas définie en -1, on aura en fait $R = 1$.

On a, pour $|x| < 1$:

$$\ln(1+x) = \sum_{n=1}^{+\infty} (-1)^{n-1}\frac{x^n}{n} = x\sum_{n=0}^{+\infty} (-1)^n \frac{x^n}{n+1} \quad \text{et} \quad \frac{1}{1+x} = \sum_{n=0}^{+\infty} (-1)^n x^n$$

(**pour appliquer la formule donnant le produit de Cauchy de deux séries entières, il est important que les deux développements commencent à $n = 0$!**).

Méthodes de développement en série entière : 5) utilisation du produit de Cauchy

Cette méthode, qui s'appuie sur le théorème 5 conduit, en général, à des expressions compliquées.

Exemple : Développement en série entière, au voisinage de 0 de $f : x \mapsto \dfrac{\ln(1+x)}{1+x}$.

Solution

f est définie sur $]-1\,;+\infty[$. Pour $x \in]-1\,;1[$, on connaît les développements en série entière de $x \mapsto \ln(1+x)$ et de $x \mapsto \dfrac{1}{1+x}$, tous deux de rayon de convergence égal à 1. Le théorème 5 permet alors d'affirmer que f sera développable en série entière, et que le rayon de convergence de la série entière obtenue sera $R \geqslant 1$; mais puisque f n'est pas définie en -1, on aura en fait $R = 1$.

On a, pour $|x| < 1$:

$$\ln(1+x) = \sum_{n=1}^{+\infty} (-1)^{n-1} \frac{x^n}{n} = x \sum_{n=0}^{+\infty} (-1)^n \frac{x^n}{n+1} \quad \text{et} \quad \frac{1}{1+x} = \sum_{n=0}^{+\infty} (-1)^n x^n$$

(**pour appliquer la formule donnant le produit de Cauchy de deux séries entières, il est important que les deux développements commencent à $n = 0$!**).

La série produit de Cauchy des deux séries ci-dessus s'écrit alors $\sum\limits_{n=0}^{+\infty} c_n x^n$ avec

$$c_n = \sum_{k=0}^{n} \frac{(-1)^k}{k+1} \cdot (-1)^{n-k} = (-1)^n \sum_{k=0}^{n} \frac{1}{k+1}$$

Méthodes de développement en série entière : 5) utilisation du produit de Cauchy

Cette méthode, qui s'appuie sur le théorème 5 conduit, en général, à des expressions compliquées.

Exemple : Développement en série entière, au voisinage de 0 de $f : x \mapsto \dfrac{\ln(1+x)}{1+x}$.

Solution

f est définie sur $]-1\,;+\infty[$. Pour $x \in\,]-1\,;1[$, on connaît les développements en série entière de $x \mapsto \ln(1+x)$ et de $x \mapsto \dfrac{1}{1+x}$, tous deux de rayon de convergence égal à 1. Le théorème 5 permet alors d'affirmer que f sera développable en série entière, et que le rayon de convergence de la série entière obtenue sera $R \geqslant 1$; mais puisque f n'est pas définie en -1, on aura en fait $R = 1$.

On a, pour $|x| < 1$:

$$\ln(1+x) = \sum_{n=1}^{+\infty} (-1)^{n-1} \frac{x^n}{n} = x \sum_{n=0}^{+\infty} (-1)^n \frac{x^n}{n+1} \quad \text{et} \quad \frac{1}{1+x} = \sum_{n=0}^{+\infty} (-1)^n x^n$$

(**pour appliquer la formule donnant le produit de Cauchy de deux séries entières, il est important que les deux développements commencent à $n = 0$!**).

La série produit de Cauchy des deux séries ci-dessus s'écrit alors $\displaystyle\sum_{n=0}^{+\infty} c_n x^n$ avec

$c_n = \displaystyle\sum_{k=0}^{n} \frac{(-1)^k}{k+1} \cdot (-1)^{n-k} = (-1)^n \sum_{k=0}^{n} \frac{1}{k+1}$ et on a ensuite, pour $x \in\,]-1\,;1[$: $f(x) = \displaystyle\sum_{n=0}^{+\infty} c_n x^{n+1}$.

Méthodes de développement en série entière : 6) utilisation d'une équation différentielle

On suppose ici que la fonction f vérifie une certaine équation différentielle, et que f est développable en série entière au voisinage de 0 sous la forme $f(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} a_n x^n$.

Méthodes de développement en série entière : 6) utilisation d'une équation différentielle

On suppose ici que la fonction f vérifie une certaine équation différentielle, et que f est développable en série entière au voisinage de 0 sous la forme $f(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} a_n x^n$. On connaît alors aussi le développement en série entière des dérivées de f (théorème 13), et on peut alors remplacer l'expression de f ainsi que celles de ses dérivées dans l'équation différentielle pour obtenir une relation de récurrence entre les coefficients, puis les calculer.

Méthodes de développement en série entière : 6) utilisation d'une équation différentielle

On suppose ici que la fonction f vérifie une certaine équation différentielle, et que f est développable en série entière au voisinage de 0 sous la forme $f(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} a_n x^n$. On connaît alors aussi le développement en série entière des dérivées de f (théorème 13), et on peut alors remplacer l'expression de f ainsi que celles de ses dérivées dans l'équation différentielle pour obtenir une relation de récurrence entre les coefficients, puis les calculer.

Le problème de cette méthode (outre les calculs !) est qu'elle suppose f développable en série entière **a priori**, donc il faut vérifier a posteriori que le résultat obtenu convient, c'est-à-dire que le rayon de convergence de la série obtenue est bien strictement positif.

Méthodes de développement en série entière : 6) utilisation d'une équation différentielle

On suppose ici que la fonction f vérifie une certaine équation différentielle, et que f est développable en série entière au voisinage de 0 sous la forme $f(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} a_n x^n$. On connaît alors aussi le développement en série entière des dérivées de f (théorème 13), et on peut alors remplacer l'expression de f ainsi que celles de ses dérivées dans l'équation différentielle pour obtenir une relation de récurrence entre les coefficients, puis les calculer.

Le problème de cette méthode (outre les calculs !) est qu'elle suppose f développable en série entière **a priori**, donc il faut vérifier a posteriori que le résultat obtenu convient, c'est-à-dire que le rayon de convergence de la série obtenue est bien strictement positif.

Nous allons détailler cette méthode sur des exemples.

Exemple 1 : Développement en série entière de $x \mapsto (1+x)^{\alpha}$.

Exemple 1 : Développement en série entière de $x \mapsto (1+x)^{\alpha}$.

Solution

Posons $f(x) = (1+x)^{\alpha}$; f est dérivable sur $]-1;1[$ et $f'(x) = \alpha(1+x)^{\alpha-1}$.

Exemple 1 : Développement en série entière de $x \mapsto (1+x)^\alpha$.

Solution

Posons $f(x) = (1+x)^\alpha$; f est dérivable sur $]-1;1[$ et $f'(x) = \alpha(1+x)^{\alpha-1}$.

La fonction f est donc solution de l'équation différentielle linéaire $(1+x)y' = \alpha y$. C'est l'unique solution de cette équation sur l'intervalle $]-1;1[$ vérifiant la condition initiale $f(0) = 1$ (d'après le théorème de Cauchy-Lipschitz, puisque la fonction $x \mapsto 1+x$ est continue et ne s'annule pas sur $]-1;1[$).

Exemple 1 : Développement en série entière de $x \mapsto (1+x)^\alpha$.

Solution

Posons $f(x) = (1+x)^\alpha$; f est dérivable sur $]-1;1[$ et $f'(x) = \alpha(1+x)^{\alpha-1}$.

La fonction f est donc solution de l'équation différentielle linéaire $(1+x)y' = \alpha y$. C'est l'unique solution de cette équation sur l'intervalle $]-1;1[$ vérifiant la condition initiale $f(0) = 1$ (d'après le théorème de Cauchy-Lipschitz, puisque la fonction $x \mapsto 1+x$ est continue et ne s'annule pas sur $]-1;1[$).

On cherche alors une série entière $y(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} a_n x^n$, de rayon de convergence R strictement positif, vérifiant la même équation différentielle et la même condition initiale.

Exemple 1 : Développement en série entière de $x \mapsto (1+x)^{\alpha}$.

Solution

Posons $f(x) = (1+x)^{\alpha}$; f est dérivable sur $]-1\,;1[$ et $f'(x) = \alpha(1+x)^{\alpha-1}$.

La fonction f est donc solution de l'équation différentielle linéaire $(1+x)y' = \alpha y$. C'est l'unique solution de cette équation sur l'intervalle $]-1\,;1[$ vérifiant la condition initiale $f(0)=1$ (d'après le théorème de Cauchy-Lipschitz, puisque la fonction $x \mapsto 1+x$ est continue et ne s'annule pas sur $]-1\,;1[$).

On cherche alors une série entière $y(x) = \sum\limits_{n=0}^{+\infty} a_n x^n$, de rayon de convergence R strictement positif, vérifiant la même équation différentielle et la même condition initiale.

$y(0)=1$ équivaut à $a_0=1$ et, puisque $y'(x) = \sum\limits_{n=1}^{+\infty} n a_n x^{n-1}$ pour $x \in\,]-R\,;R[$, on a

$$(1+x)y'(x) = \sum_{n=1}^{+\infty} n a_n x^{n-1} + \sum_{\substack{\cancel{n=1}\\ n=0}}^{+\infty} n a_n x^n = \alpha y(x) = \alpha \sum_{n=0}^{+\infty} a_n x^n$$

Exemple 1 : Développement en série entière de $x \mapsto (1+x)^\alpha$.

Solution

Posons $f(x) = (1+x)^\alpha$; f est dérivable sur $]-1;1[$ et $f'(x) = \alpha(1+x)^{\alpha-1}$.

La fonction f est donc solution de l'équation différentielle linéaire $(1+x)y' = \alpha y$. C'est l'unique solution de cette équation sur l'intervalle $]-1;1[$ vérifiant la condition initiale $f(0) = 1$ (d'après le théorème de Cauchy-Lipschitz, puisque la fonction $x \mapsto 1+x$ est continue et ne s'annule pas sur $]-1;1[$).

On cherche alors une série entière $y(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} a_n x^n$, de rayon de convergence R strictement positif, vérifiant la même équation différentielle et la même condition initiale.

$y(0) = 1$ équivaut à $a_0 = 1$ et, puisque $y'(x) = \sum_{n=1}^{+\infty} n a_n x^{n-1}$ pour $x \in]-R;R[$, on a

$$(1+x)y'(x) = \sum_{n=1}^{+\infty} n a_n x^{n-1} + \sum_{\substack{\cancel{n=1}\\ n=0}}^{+\infty} n a_n x^n = \alpha y(x) = \alpha \sum_{n=0}^{+\infty} a_n x^n$$

soit, après un changement d'indice dans la première somme :

$$\sum_{n=0}^{+\infty} \left[n a_n + (n+1) a_{n+1} \right] x^n = \alpha \sum_{n=0}^{+\infty} a_n x^n.$$

Solution (suite)

On a donc, par unicité du développement en série entière : $a_{n+1} = \dfrac{\alpha - n}{n+1} a_n$ pour tout $n \in \mathbb{N}$.

Solution (suite)

On a donc, par unicité du développement en série entière : $a_{n+1} = \dfrac{\alpha - n}{n+1} a_n$ pour tout $n \in \mathbb{N}$.

Il est facile d'en déduire par récurrence, puisque $a_0 = 1$: $a_n = \dfrac{\alpha(\alpha-1)\cdots(\alpha-n+1)}{n!}$ pour $n \in \mathbb{N}^*$.

Solution (suite)

On a donc, par unicité du développement en série entière : $a_{n+1} = \dfrac{\alpha - n}{n+1} a_n$ pour tout $n \in \mathbb{N}$.

Il est facile d'en déduire par récurrence, puisque $a_0 = 1$: $a_n = \dfrac{\alpha(\alpha-1)\cdots(\alpha-n+1)}{n!}$ pour $n \in \mathbb{N}^*$.

Ainsi, $y(x) = 1 + \displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{\alpha(\alpha-1)\cdots(\alpha-n+1)}{n!} x^n$.

Solution (suite)

On a donc, par unicité du développement en série entière : $a_{n+1} = \dfrac{\alpha - n}{n+1} a_n$ pour tout $n \in \mathbb{N}$.

Il est facile d'en déduire par récurrence, puisque $a_0 = 1$: $a_n = \dfrac{\alpha(\alpha-1)\cdots(\alpha-n+1)}{n!}$ pour $n \in \mathbb{N}^*$.

Ainsi, $y(x) = 1 + \sum_{n=1}^{+\infty} \dfrac{\alpha(\alpha-1)\cdots(\alpha-n+1)}{n!} x^n$.

Réciproquement, si on considère la fonction $g\colon x \mapsto 1 + \sum_{n=1}^{+\infty} \dfrac{\alpha(\alpha-1)\cdots(\alpha-n+1)}{n!} x^n$, la règle de d'Alembert permet de prouver facilement que cette série entière a pour rayon de convergence $R = 1$, donc est de classe $\mathscr{C}^1$ sur $]-1\,;1[$.

Solution (suite)

On a donc, par unicité du développement en série entière : $a_{n+1} = \dfrac{\alpha - n}{n+1} a_n$ pour tout $n \in \mathbb{N}$.

Il est facile d'en déduire par récurrence, puisque $a_0 = 1$: $a_n = \dfrac{\alpha(\alpha-1)\cdots(\alpha-n+1)}{n!}$ pour $n \in \mathbb{N}^*$.

Ainsi, $y(x) = 1 + \displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{\alpha(\alpha-1)\cdots(\alpha-n+1)}{n!} x^n$.

Réciproquement, si on considère la fonction $g \colon x \mapsto 1 + \displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{\alpha(\alpha-1)\cdots(\alpha-n+1)}{n!} x^n$, la règle de d'Alembert permet de prouver facilement que cette série entière a pour rayon de convergence $R = 1$, donc est de classe $\mathscr{C}^1$ sur $]-1\,;1[$.

En reprenant alors les calculs précédents dans l'autre sens, on obtient que g est bien solution de l'équation différentielle sur $]-1\,;1[$.

Solution (suite)

On a donc, par unicité du développement en série entière : $a_{n+1} = \dfrac{\alpha - n}{n+1} a_n$ pour tout $n \in \mathbb{N}$.

Il est facile d'en déduire par récurrence, puisque $a_0 = 1$: $a_n = \dfrac{\alpha(\alpha-1)\cdots(\alpha-n+1)}{n!}$ pour $n \in \mathbb{N}^*$.

Ainsi, $y(x) = 1 + \displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty} \dfrac{\alpha(\alpha-1)\cdots(\alpha-n+1)}{n!} x^n$.

Réciproquement, si on considère la fonction $g\colon x \mapsto 1 + \displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty} \dfrac{\alpha(\alpha-1)\cdots(\alpha-n+1)}{n!} x^n$, la règle de d'Alembert permet de prouver facilement que cette série entière a pour rayon de convergence $R = 1$, donc est de classe $\mathscr{C}^1$ sur $]-1\,;1[$.

En reprenant alors les calculs précédents dans l'autre sens, on obtient que g est bien solution de l'équation différentielle sur $]-1\,;1[$. Elle coïncide donc avec f sur $]-1\,;1[$ (par unicité de la solution au problème de Cauchy), ce qui permet de retrouver le développement connu de $x \mapsto (1+x)^{\alpha}$.

Exemple 2

Déterminer le développement en série entière au voisinage de 0 de la fonction f définie sur $\mathbb{R}$ par : $f(x) = \mathrm{e}^{x^2} \displaystyle\int_0^x \mathrm{e}^{-t^2}\,\mathrm{d}t$.

Exemple 2

Déterminer le développement en série entière au voisinage de 0 de la fonction f définie sur $\mathbb{R}$ par : $f(x) = \mathrm{e}^{x^2} \displaystyle\int_0^x \mathrm{e}^{-t^2}\,\mathrm{d}t$.

Exemple 3

Déterminer le développement en série entière au voisinage de 0 de la fonction f définie sur $[-1\,;1]$ par : $f(x) = (\mathrm{Arc}\sin x)^2$.

SOMMATION D'UNE SÉRIE ENTIÈRE

Sommation d'une série entière

Il s'agit ici du problème inverse du précédent : étant donné une série entière $\sum_{n\in\mathbb{N}} a_n x^n$, de rayon de convergence $R > 0$, il s'agit d'exprimer sa somme à l'aide des fonctions usuelles.

Il n'y a pas de méthode générale pour ce faire, mais on peut essayer d'exploiter les pistes suivantes :

Sommation d'une série entière

Il s'agit ici du problème inverse du précédent : étant donné une série entière $\sum_{n\in\mathbb{N}} a_n x^n$, de rayon de convergence $R > 0$, il s'agit d'exprimer sa somme à l'aide des fonctions usuelles.

Il n'y a pas de méthode générale pour ce faire, mais on peut essayer d'exploiter les pistes suivantes :

- Faire directement apparaître, dans $\sum a_n x^n$, des développements en série entière connus. Pour cela, on peut (éventuellement) : décomposer a_n comme combinaison linéaire de termes plus simples, utiliser un changement de variable, utiliser dérivation ou intégration, reconnaître un produit de Cauchy...

Sommation d'une série entière

Il s'agit ici du problème inverse du précédent : étant donné une série entière $\sum_{n\in\mathbb{N}} a_n x^n$, de rayon de convergence $R > 0$, il s'agit d'exprimer sa somme à l'aide des fonctions usuelles.

Il n'y a pas de méthode générale pour ce faire, mais on peut essayer d'exploiter les pistes suivantes :

- Faire directement apparaître, dans $\sum a_n x^n$, des développements en série entière connus. Pour cela, on peut (éventuellement) : décomposer a_n comme combinaison linéaire de termes plus simples, utiliser un changement de variable, utiliser dérivation ou intégration, reconnaître un produit de Cauchy...
- À l'aide d'une relation de récurrence entre les a_n, déterminer une équation différentielle dont la fonction somme est solution.