Chapitre XVIII : Variables aléatoires discrètes

PSI*

Février 2023

Lycée d'Arsonval

GÉNÉRALITÉS

Définition

Définition 1

Soit $(\Omega, \mathcal{A})$, un espace probabilisable. On appelle **variable aléatoire discrète** définie sur $(\Omega, \mathcal{A})$ à valeurs dans un ensemble E toute application X de Ω dans E telle que :

Définition

Définition 1

Soit $(\Omega, \mathcal{A})$, un espace probabilisable. On appelle **variable aléatoire discrète** définie sur $(\Omega, \mathcal{A})$ à valeurs dans un ensemble E toute application X de Ω dans E telle que :

- son image $X(\Omega)$ est au plus dénombrable (on pourra donc écrire $X(\Omega) = \{x_i,\ i \in I\}$ avec $I \subset \mathbb{N}$) ;

Définition

Définition 1

Soit $(\Omega, \mathcal{A})$, un espace probabilisable. On appelle **variable aléatoire discrète** définie sur $(\Omega, \mathcal{A})$ à valeurs dans un ensemble E toute application X de Ω dans E telle que :

- son image $X(\Omega)$ est au plus dénombrable (on pourra donc écrire $X(\Omega) = \{x_i,\ i \in I\}$ avec $I \subset \mathbb{N}$) ;
- pour tout $x \in X(\Omega)$, l'ensemble $X^{-1}(\{x\}) = \{\omega \in \Omega \mid X(\omega) = x\}$ appartient à $\mathcal{A}$ (c'est-à-dire est un évènement).

Définition

Définition 1

Soit $(\Omega, \mathcal{A})$, un espace probabilisable. On appelle **variable aléatoire discrète** définie sur $(\Omega, \mathcal{A})$ à valeurs dans un ensemble E toute application X de Ω dans E telle que :

- son image $X(\Omega)$ est au plus dénombrable (on pourra donc écrire $X(\Omega) = \{x_i,\ i \in I\}$ avec $I \subset \mathbb{N}$) ;
- pour tout $x \in X(\Omega)$, l'ensemble $X^{-1}(\{x\}) = \{\omega \in \Omega \mid X(\omega) = x\}$ appartient à $\mathcal{A}$ (c'est-à-dire est un évènement).

  Cet ensemble se note, en abrégé : $(X = x)$.

Définition

Définition 1

Soit $(\Omega, \mathcal{A})$, un espace probabilisable. On appelle **variable aléatoire discrète** définie sur $(\Omega, \mathcal{A})$ à valeurs dans un ensemble E toute application X de Ω dans E telle que :

- son image $X(\Omega)$ est au plus dénombrable (on pourra donc écrire $X(\Omega) = \{x_i,\ i \in I\}$ avec $I \subset \mathbb{N}$) ;
- pour tout $x \in X(\Omega)$, l'ensemble $X^{-1}(\{x\}) = \{\omega \in \Omega \mid X(\omega) = x\}$ appartient à $\mathcal{A}$ (c'est-à-dire est un évènement).

  Cet ensemble se note, en abrégé : $(X = x)$.

Si $X(\Omega)$ est un ensemble fini, on dit que X est une **variable aléatoire finie**.
Si X est constante, on dit que c'est une variable aléatoire **certaine**.

Définition

Définition 1

Soit $(\Omega, \mathcal{A})$, un espace probabilisable. On appelle **variable aléatoire discrète** définie sur $(\Omega, \mathcal{A})$ à valeurs dans un ensemble E toute application X de Ω dans E telle que :

- son image $X(\Omega)$ est au plus dénombrable (on pourra donc écrire $X(\Omega) = \{x_i,\ i \in I\}$ avec $I \subset \mathbb{N}$) ;
- pour tout $x \in X(\Omega)$, l'ensemble $X^{-1}(\{x\}) = \{\omega \in \Omega \mid X(\omega) = x\}$ appartient à $\mathcal{A}$ (c'est-à-dire est un évènement).

  Cet ensemble se note, en abrégé : $(X = x)$.

Si $X(\Omega)$ est un ensemble fini, on dit que X est une **variable aléatoire finie**.
Si X est constante, on dit que c'est une variable aléatoire **certaine**.

Exemple 1

Un joueur lance deux fois de suite un dé et note les deux nombres obtenus sous la forme d'un couple.
L'univers de cette expérience est $\Omega = [\![1\,;6]\!] \times [\![1\,;6]\!]$.

Définition

Définition 1

Soit $(\Omega, \mathcal{A})$, un espace probabilisable. On appelle **variable aléatoire discrète** définie sur $(\Omega, \mathcal{A})$ à valeurs dans un ensemble E toute application X de Ω dans E telle que :

- son image $X(\Omega)$ est au plus dénombrable (on pourra donc écrire $X(\Omega) = \{x_i,\ i \in I\}$ avec $I \subset \mathbb{N}$) ;
- pour tout $x \in X(\Omega)$, l'ensemble $X^{-1}(\{x\}) = \{\omega \in \Omega \mid X(\omega) = x\}$ appartient à $\mathcal{A}$ (c'est-à-dire est un évènement).

  Cet ensemble se note, en abrégé : $(X = x)$.

Si $X(\Omega)$ est un ensemble fini, on dit que X est une **variable aléatoire finie**.
Si X est constante, on dit que c'est une variable aléatoire **certaine**.

Exemple 1

Un joueur lance deux fois de suite un dé et note les deux nombres obtenus sous la forme d'un couple. L'univers de cette expérience est $\Omega = [\![1\,;6]\!] \times [\![1\,;6]\!]$.

On peut alors définir la variable aléatoire finie X qui à chaque couple associe la somme des deux nombres obtenus. Ici on a $X(\Omega) = [\![2\,;12]\!]$.

Exemple 2

On effectue une succession de lancers d'un dé cubique jusqu'à obtenir 6. Soit X le nombre de lancers effectués.

Exemple 2

On effectue une succession de lancers d'un dé cubique jusqu'à obtenir 6. Soit X le nombre de lancers effectués.

L'univers associé à cette expérience est $[\![1\,;6]\!]^{\mathbb{N}}$, qui n'est pas dénombrable. On ne sait donc pas décrire la tribu et la probabilité associée. Il ne nous est donc pas possible de prouver rigoureusement que X est une variable aléatoire.

Exemple 2

On effectue une succession de lancers d'un dé cubique jusqu'à obtenir 6. Soit X le nombre de lancers effectués.

L'univers associé à cette expérience est $[\![1\,;6]\!]^{\mathbb{N}}$, qui n'est pas dénombrable. On ne sait donc pas décrire la tribu et la probabilité associée. Il ne nous est donc pas possible de prouver rigoureusement que X est une variable aléatoire.

On peut tout de même donner très clairement $X(\Omega)$:

Exemple 2

On effectue une succession de lancers d'un dé cubique jusqu'à obtenir 6. Soit X le nombre de lancers effectués.

L'univers associé à cette expérience est $[\![1\,;6]\!]^{\mathbb{N}}$, qui n'est pas dénombrable. On ne sait donc pas décrire la tribu et la probabilité associée. Il ne nous est donc pas possible de prouver rigoureusement que X est une variable aléatoire.

On peut tout de même donner très clairement $X(\Omega)$:

En étant rigoureux on devrait écrire : $X(\Omega) = \mathbb{N}^* \cup \{+\infty\}$ car il se peut que l'on n'obtienne jamais 6.

Exemple 2

On effectue une succession de lancers d'un dé cubique jusqu'à obtenir 6. Soit X le nombre de lancers effectués.

L'univers associé à cette expérience est $[\![1\,;6]\!]^{\mathbb{N}}$, qui n'est pas dénombrable. On ne sait donc pas décrire la tribu et la probabilité associée. Il ne nous est donc pas possible de prouver rigoureusement que X est une variable aléatoire.

On peut tout de même donner très clairement $X(\Omega)$:

En étant rigoureux on devrait écrire : $X(\Omega) = \mathbb{N}^* \cup \{+\infty\}$ car il se peut que l'on n'obtienne jamais 6. Mais on peut démontrer (voir ci-après) que la probabilité de ne jamais obtenir 6 est égale à 0, c'est-à-dire que l'on obtiendra presque sûrement 6.

Exemple 2

On effectue une succession de lancers d'un dé cubique jusqu'à obtenir 6. Soit X le nombre de lancers effectués.

L'univers associé à cette expérience est $[\![1\,;6]\!]^{\mathbb{N}}$, qui n'est pas dénombrable. On ne sait donc pas décrire la tribu et la probabilité associée. Il ne nous est donc pas possible de prouver rigoureusement que X est une variable aléatoire.

On peut tout de même donner très clairement $X(\Omega)$:

En étant rigoureux on devrait écrire : $X(\Omega) = \mathbb{N}^* \cup \{+\infty\}$ car il se peut que l'on n'obtienne jamais 6. Mais on peut démontrer (voir ci-après) que la probabilité de ne jamais obtenir 6 est égale à 0, c'est-à-dire que l'on obtiendra presque sûrement 6. On peut alors choisir de considérer que $X(\Omega) = \mathbb{N}^*$ et X est une variable aléatoire discrète infinie.

Exemple 2

On effectue une succession de lancers d'un dé cubique jusqu'à obtenir 6. Soit X le nombre de lancers effectués.

L'univers associé à cette expérience est $[\![1\,;6]\!]^{\mathbb{N}}$, qui n'est pas dénombrable. On ne sait donc pas décrire la tribu et la probabilité associée. Il ne nous est donc pas possible de prouver rigoureusement que X est une variable aléatoire.

On peut tout de même donner très clairement $X(\Omega)$:

En étant rigoureux on devrait écrire : $X(\Omega) = \mathbb{N}^* \cup \{+\infty\}$ car il se peut que l'on n'obtienne jamais 6. Mais on peut démontrer (voir ci-après) que la probabilité de ne jamais obtenir 6 est égale à 0, c'est-à-dire que l'on obtiendra presque sûrement 6. On peut alors choisir de considérer que $X(\Omega) = \mathbb{N}^*$ et X est une variable aléatoire discrète infinie.

Remarque :
Lorsque Ω est dénombrable, on prend traditionnellement $\mathcal{A} = \mathcal{P}(\Omega)$ comme tribu d'évènements ;

Exemple 2

On effectue une succession de lancers d'un dé cubique jusqu'à obtenir 6. Soit X le nombre de lancers effectués.

L'univers associé à cette expérience est $[\![1\,;6]\!]^{\mathbb{N}}$, qui n'est pas dénombrable. On ne sait donc pas décrire la tribu et la probabilité associée. Il ne nous est donc pas possible de prouver rigoureusement que X est une variable aléatoire.

On peut tout de même donner très clairement $X(\Omega)$:

En étant rigoureux on devrait écrire : $X(\Omega) = \mathbb{N}^* \cup \{+\infty\}$ car il se peut que l'on n'obtienne jamais 6. Mais on peut démontrer (voir ci-après) que la probabilité de ne jamais obtenir 6 est égale à 0, c'est-à-dire que l'on obtiendra presque sûrement 6. On peut alors choisir de considérer que $X(\Omega) = \mathbb{N}^*$ et X est une variable aléatoire discrète infinie.

Remarque :

Lorsque Ω est dénombrable, on prend traditionnellement $\mathcal{A} = \mathcal{P}(\Omega)$ comme tribu d'évènements ; dans ce cas, toute application X de Ω dans E est une variable aléatoire discrète,

Exemple 2

On effectue une succession de lancers d'un dé cubique jusqu'à obtenir 6. Soit X le nombre de lancers effectués.

L'univers associé à cette expérience est $[\![1;6]\!]^{\mathbb{N}}$, qui n'est pas dénombrable. On ne sait donc pas décrire la tribu et la probabilité associée. Il ne nous est donc pas possible de prouver rigoureusement que X est une variable aléatoire.

On peut tout de même donner très clairement $X(\Omega)$:

En étant rigoureux on devrait écrire : $X(\Omega) = \mathbb{N}^* \cup \{+\infty\}$ car il se peut que l'on n'obtienne jamais 6. Mais on peut démontrer (voir ci-après) que la probabilité de ne jamais obtenir 6 est égale à 0, c'est-à-dire que l'on obtiendra presque sûrement 6. On peut alors choisir de considérer que $X(\Omega) = \mathbb{N}^*$ et X est une variable aléatoire discrète infinie.

Remarque :

Lorsque Ω est dénombrable, on prend traditionnellement $\mathcal{A} = \mathcal{P}(\Omega)$ comme tribu d'évènements ; dans ce cas, toute application X de Ω dans E est une variable aléatoire discrète, car son image est forcément au plus dénombrable, et l'image réciproque de tout élément de E est une partie de Ω donc de la tribu $\mathcal{A}$.

Théorème 1

Soit X une variable aléatoire discrète définie sur $(\Omega, \mathcal{A})$, à valeurs dans E.

Pour toute partie $A \subset E$, l'ensemble $X^{-1}(A) = \{\omega \in \Omega \mid X(\omega) \in A\}$ est un événement de $\mathcal{A}$.
Cet évènement se note : $(X \in A)$.

Théorème 1

Soit X une variable aléatoire discrète définie sur $(\Omega, \mathcal{A})$, à valeurs dans E.

Pour toute partie $A \subset E$, l'ensemble $X^{-1}(A) = \{\omega \in \Omega \mid X(\omega) \in A\}$ est un événement de $\mathcal{A}$.
Cet évènement se note : $(X \in A)$.

Démonstration

En effet, si $A = \bigcup\limits_{i \in I} \{x_i\}$ avec $I \subset \mathbb{N}$, on aura $X^{-1}(A) = \bigcup\limits_{i \in I} X^{-1}(\{x_i\})$:

Théorème 1

Soit X une variable aléatoire discrète définie sur $(\Omega, \mathcal{A})$, à valeurs dans E.

Pour toute partie $A \subset E$, l'ensemble $X^{-1}(A) = \{\omega \in \Omega \mid X(\omega) \in A\}$ est un événement de $\mathcal{A}$.
Cet évènement se note : $(X \in A)$.

Démonstration

En effet, si $A = \bigcup_{i \in I} \{x_i\}$ avec $I \subset \mathbb{N}$, on aura $X^{-1}(A) = \bigcup_{i \in I} X^{-1}(\{x_i\})$: c'est donc une réunion dénombrable d'éléments de $\mathcal{A}$, donc c'est un élément de $\mathcal{A}$ par définition d'une tribu.

Théorème 1

Soit X une variable aléatoire discrète définie sur $(\Omega, \mathcal{A})$, à valeurs dans E.

Pour toute partie $A \subset E$, l'ensemble $X^{-1}(A) = \{\omega \in \Omega \mid X(\omega) \in A\}$ est un événement de $\mathcal{A}$.
Cet évènement se note : $(X \in A)$.

Démonstration

En effet, si $A = \bigcup_{i \in I} \{x_i\}$ avec $I \subset \mathbb{N}$, on aura $X^{-1}(A) = \bigcup_{i \in I} X^{-1}(\{x_i\})$: c'est donc une réunion dénombrable d'éléments de $\mathcal{A}$, donc c'est un élément de $\mathcal{A}$ par définition d'une tribu.

Remarque :
Dans le cas où $E = \mathbb{R}$, on pourra donc considérer, pour tout x réel, les évènements $(X \geqslant x)$, $(X > x)$ etc...
Par exemple : $(X > x) = \{\omega \in \Omega \mid X(\omega) > x\}$.

Le résultat suivant est extrêmement important et permet en particulier de vérifier la cohérence des résultats obtenus.

Le résultat suivant est extrêmement important et permet en particulier de vérifier la cohérence des résultats obtenus.

Théorème 2

Soit X une variable aléatoire discrète. Si $X(\Omega) = \{x_i \mid i \in I\}$, alors la famille d'événements $(X = x_i)_{i \in I}$ est un système complet d'événements.

En particulier on a : $\displaystyle\sum_{i \in I} \mathbb{P}(X = x_i) = 1$.

Le résultat suivant est extrêmement important et permet en particulier de vérifier la cohérence des résultats obtenus.

Théorème 2

Soit X une variable aléatoire discrète. Si $X(\Omega) = \{x_i \mid i \in I\}$, alors la famille d'événements $(X = x_i)_{i \in I}$ est un système complet d'événements.

En particulier on a : $\sum_{i \in I} \mathbb{P}(X = x_i) = 1$.

Démonstration

- Si $i \neq j$, $(X = x_i) \cap (X = x_j) = \emptyset$ puisque un élément $\omega \in \Omega$ ne peut avoir deux images différentes.

Le résultat suivant est extrêmement important et permet en particulier de vérifier la cohérence des résultats obtenus.

Théorème 2

Soit X une variable aléatoire discrète. Si $X(\Omega) = \{x_i \mid i \in I\}$, alors la famille d'événements $(X = x_i)_{i\in I}$ est un système complet d'événements.

En particulier on a : $\sum\limits_{i\in I} \mathbb{P}(X = x_i) = 1$.

Démonstration

- Si $i \neq j$, $(X = x_i) \cap (X = x_j) = \emptyset$ puisque un élément $\omega \in \Omega$ ne peut avoir deux images différentes.
- Tout $\omega \in \Omega$ appartient à $(X = X(\omega))$ donc $\Omega = \bigcup\limits_{i\in I}(X = x_i)$.

Le résultat suivant est extrêmement important et permet en particulier de vérifier la cohérence des résultats obtenus.

Théorème 2

Soit X une variable aléatoire discrète. Si $X(\Omega) = \{x_i \mid i \in I\}$, alors la famille d'événements $(X = x_i)_{i \in I}$ est un système complet d'événements.

En particulier on a : $\displaystyle\sum_{i \in I} \mathbb{P}(X = x_i) = 1$.

Démonstration

- Si $i \neq j$, $(X = x_i) \cap (X = x_j) = \emptyset$ puisque un élément $\omega \in \Omega$ ne peut avoir deux images différentes.
- Tout $\omega \in \Omega$ appartient à $(X = X(\omega))$ donc $\Omega = \displaystyle\bigcup_{i \in I} (X = x_i)$.

Remarque :

Comme $(X = x_i)_{i \in I}$ est un système complet d'événements, on peut appliquer la formule des probabilités totales pour n'importe quel événement A :

$$\mathbb{P}(A) = \sum_{i \in I} \mathbb{P}((X = x_i) \cap A) = \sum_{i \in I} \mathbb{P}(X = x_i)\mathbb{P}(A \mid (X = x_i)).$$

Loi d'une variable aléatoire

Définition 2

Soit $(\Omega, \mathcal{A}, \mathbb{P})$ un espace probabilisé, et X une variable aléatoire discrète à valeurs dans E.

L'application $\mathbb{P}_X : \begin{array}{ccl} \mathcal{P}\big(X(\Omega)\big) & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ A & \longmapsto & \mathbb{P}(X \in A) \end{array}$ s'appelle la **loi de probabilité** de X.

Loi d'une variable aléatoire

Définition 2

Soit $(\Omega, \mathcal{A}, \mathbb{P})$ un espace probabilisé, et X une variable aléatoire discrète à valeurs dans E.

L'application $\mathbb{P}_X : \begin{array}{ccl} \mathcal{P}\big(X(\Omega)\big) & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ A & \longmapsto & \mathbb{P}(X \in A) \end{array}$ s'appelle la **loi de probabilité** de X.

Remarques

1. Puisque, pour toute partie A de $X(\omega)$ on a $\mathbb{P}(X \in A) = \sum_{x \in A} \mathbb{P}(X = x)$, il suffit de connaître toutes les probabilités $\mathbb{P}(X = x)$ pour $x \in X(\Omega)$ pour connaître la loi de X.

Loi d'une variable aléatoire

Définition 2

Soit $(\Omega, \mathcal{A}, \mathbb{P})$ un espace probabilisé, et X une variable aléatoire discrète à valeurs dans E.

L'application $\mathbb{P}_X : \begin{array}{rcl} \mathcal{P}\big(X(\Omega)\big) & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ A & \longmapsto & \mathbb{P}(X \in A) \end{array}$ s'appelle la **loi de probabilité** de X.

Remarques

1. Puisque, pour toute partie A de $X(\omega)$ on a $\mathbb{P}(X \in A) = \sum_{x \in A} \mathbb{P}(X = x)$, il suffit de connaître toutes les probabilités $\mathbb{P}(X = x)$ pour $x \in X(\Omega)$ pour connaître la loi de X.

   L'ensemble des $\mathbb{P}(X = x)$ pour $x \in X(\Omega)$ s'appelle la **distribution de probabilité** de X.

Loi d'une variable aléatoire

Définition 2

Soit $(\Omega, \mathcal{A}, \mathbb{P})$ un espace probabilisé, et X une variable aléatoire discrète à valeurs dans E.

L'application $\mathbb{P}_X : \begin{array}{rcl} \mathcal{P}\big(X(\Omega)\big) & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ A & \longmapsto & \mathbb{P}(X \in A) \end{array}$ s'appelle la **loi de probabilité** de X.

Remarques

1. Puisque, pour toute partie A de $X(\omega)$ on a $\mathbb{P}(X \in A) = \sum_{x \in A} \mathbb{P}(X = x)$, il suffit de connaître toutes les probabilités $\mathbb{P}(X = x)$ pour $x \in X(\Omega)$ pour connaître la loi de X.

   L'ensemble des $\mathbb{P}(X = x)$ pour $x \in X(\Omega)$ s'appelle la **distribution de probabilité** de X.

2. Pour répondre à la question « déterminer la loi de X », il faut **commencer par donner clairement $X(\Omega)$**.

Loi d'une variable aléatoire

Définition 2

Soit $(\Omega, \mathcal{A}, \mathbb{P})$ un espace probabilisé, et X une variable aléatoire discrète à valeurs dans E.

L'application $\begin{array}{rccl} \mathbb{P}_X : & \mathcal{P}\big(X(\Omega)\big) & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ & A & \longmapsto & \mathbb{P}(X \in A) \end{array}$ s'appelle la **loi de probabilité** de X.

Remarques

1. Puisque, pour toute partie A de $X(\omega)$ on a $\mathbb{P}(X \in A) = \sum_{x \in A} \mathbb{P}(X = x)$, il suffit de connaître toutes les probabilités $\mathbb{P}(X = x)$ pour $x \in X(\Omega)$ pour connaître la loi de X.

   L'ensemble des $\mathbb{P}(X = x)$ pour $x \in X(\Omega)$ s'appelle la **distribution de probabilité** de X.

2. Pour répondre à la question « déterminer la loi de X », il faut **commencer par donner clairement $X(\Omega)$**.

   Puis pour chaque élément x_i de cet ensemble $X(\Omega)$ il faut donner $\mathbb{P}(X = x_i)$ (d'après la remarque précédente, cela suffit).

Loi d'une variable aléatoire

Définition 2

Soit $(\Omega, \mathcal{A}, \mathbb{P})$ un espace probabilisé, et X une variable aléatoire discrète à valeurs dans E.

L'application $\mathbb{P}_X : \begin{array}{rcl} \mathcal{P}\big(X(\Omega)\big) & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ A & \longmapsto & \mathbb{P}(X \in A) \end{array}$ s'appelle la **loi de probabilité** de X.

Remarques

1. Puisque, pour toute partie A de $X(\omega)$ on a $\mathbb{P}(X \in A) = \sum_{x \in A} \mathbb{P}(X = x)$, il suffit de connaître toutes les probabilités $\mathbb{P}(X = x)$ pour $x \in X(\Omega)$ pour connaître la loi de X.

   L'ensemble des $\mathbb{P}(X = x)$ pour $x \in X(\Omega)$ s'appelle la **distribution de probabilité** de X.

2. Pour répondre à la question « déterminer la loi de X », il faut **commencer par donner clairement $X(\Omega)$**.

   Puis pour chaque élément x_i de cet ensemble $X(\Omega)$ il faut donner $\mathbb{P}(X = x_i)$ (d'après la remarque précédente, cela suffit).

Proposition 1

$\mathbb{P}_X$ est une probabilité sur $\Big(X(\Omega), \mathcal{P}\big(X(\Omega)\big)\Big)$.

Le théorème suivant (**admis**) montre qu'il suffit de connaître la distribution de probabilité pour caractériser une variable aléatoire.

Le théorème suivant (**admis**) montre qu'il suffit de connaître la distribution de probabilité pour caractériser une variable aléatoire.

Théorème 3: Germe de probabilité

Soit $(\Omega, \mathcal{A})$ un espace probabilisable, et $\{x_i,\ i \in I\}$ un ensemble au plus dénombrable.

Soit $(p_i)_{i \in I}$ une famille de réels positifs telle que $\sum_{i \in I} p_i = 1$.

Le théorème suivant (**admis**) montre qu'il suffit de connaître la distribution de probabilité pour caractériser une variable aléatoire.

Théorème 3: Germe de probabilité

Soit $(\Omega, \mathcal{A})$ un espace probabilisable, et $\{x_i,\ i \in I\}$ un ensemble au plus dénombrable.

Soit $(p_i)_{i \in I}$ une famille de réels positifs telle que $\sum\limits_{i \in I} p_i = 1$.

Alors il existe une probabilité $\mathbb{P}$ sur $(\Omega, \mathcal{A})$ et une variable aléatoire discrète X sur $(\Omega, \mathcal{A}, \mathbb{P})$, à valeurs dans $\{x_i,\ i \in I\}$, tels que

$$\forall\, i \in I\ ,\ \mathbb{P}(X = x_i) = p_i\,.$$

Le théorème suivant (**admis**) montre qu'il suffit de connaître la distribution de probabilité pour caractériser une variable aléatoire.

Théorème 3: Germe de probabilité

Soit $(\Omega, \mathcal{A})$ un espace probabilisable, et $\{x_i,\ i \in I\}$ un ensemble au plus dénombrable.

Soit $(p_i)_{i\in I}$ une famille de réels positifs telle que $\sum_{i\in I} p_i = 1$.

Alors il existe une probabilité $\mathbb{P}$ sur $(\Omega, \mathcal{A})$ et une variable aléatoire discrète X sur $(\Omega, \mathcal{A}, \mathbb{P})$, à valeurs dans $\{x_i,\ i \in I\}$, tels que

$$\forall\, i \in I\ ,\ \mathbb{P}(X = x_i) = p_i\,.$$

Rem : L'écriture $\sum_{i\in I} p_i$ sous-entend, lorsque I est infini, que la famille est sommable !

Fonction d'une variable aléatoire

Proposition 2

Soient X une variable aléatoire discrète sur un espace probabilisé $(\Omega, \mathcal{A}, \mathbb{P})$ à valeurs dans un ensemble E et f une fonction définie sur $X(\Omega)$ à valeurs dans un ensemble F.

Alors $f \circ X$ est une variable aléatoire discrète sur $(\Omega, \mathcal{A}, \mathbb{P})$ (on la notera simplement $f(X)$).

Fonction d'une variable aléatoire

Proposition 2

Soient X une variable aléatoire discrète sur un espace probabilisé $(\Omega, \mathcal{A}, \mathbb{P})$ à valeurs dans un ensemble E et f une fonction définie sur $X(\Omega)$ à valeurs dans un ensemble F.

Alors $f \circ X$ est une variable aléatoire discrète sur $(\Omega, \mathcal{A}, \mathbb{P})$ (on la notera simplement $f(X)$).

Démonstration

Si $X(\Omega) = \{x_i,\ i \in I\}$ avec $I \subset \mathbb{N}$, alors $f \circ X(\Omega) = \{f(x_i),\ i \in I\}$ donc $f \circ X(\Omega)$ est au plus dénombrable.

Fonction d'une variable aléatoire

Proposition 2

Soient X une variable aléatoire discrète sur un espace probabilisé $(\Omega, \mathcal{A}, \mathbb{P})$ à valeurs dans un ensemble E et f une fonction définie sur $X(\Omega)$ à valeurs dans un ensemble F.

Alors $f \circ X$ est une variable aléatoire discrète sur $(\Omega, \mathcal{A}, \mathbb{P})$ (on la notera simplement $f(X)$).

Démonstration

Si $X(\Omega) = \{x_i,\ i \in I\}$ avec $I \subset \mathbb{N}$, alors $f \circ X(\Omega) = \{f(x_i),\ i \in I\}$ donc $f \circ X(\Omega)$ est au plus dénombrable. De plus soit $x \in f \circ X(\Omega)$ alors

$$A = (f \circ X)^{-1}(\{x\}) = \{\omega \in \Omega \text{ tq } f(X(\omega)) = x\} = \left\{\omega \in \Omega \text{ tq } X(\omega) \in f^{-1}(\{x\})\right\} = \left(X \in f^{-1}(\{x\})\right).$$

Fonction d'une variable aléatoire

Proposition 2

Soient X une variable aléatoire discrète sur un espace probabilisé $(\Omega, \mathcal{A}, \mathbb{P})$ à valeurs dans un ensemble E et f une fonction définie sur $X(\Omega)$ à valeurs dans un ensemble F.

Alors $f \circ X$ est une variable aléatoire discrète sur $(\Omega, \mathcal{A}, \mathbb{P})$ (on la notera simplement $f(X)$).

Démonstration

Si $X(\Omega) = \{x_i,\ i \in I\}$ avec $I \subset \mathbb{N}$, alors $f \circ X(\Omega) = \{f(x_i),\ i \in I\}$ donc $f \circ X(\Omega)$ est au plus dénombrable. De plus soit $x \in f \circ X(\Omega)$ alors

$$A = (f \circ X)^{-1}(\{x\}) = \{\omega \in \Omega \text{ tq } f(X(\omega)) = x\} = \left\{\omega \in \Omega \text{ tq } X(\omega) \in f^{-1}(\{x\})\right\} = \left(X \in f^{-1}(\{x\})\right).$$

Puisque $f^{-1}(\{x\})$ est un sous-ensemble de E, A est bien un évènement ce qui prouve que $f \circ X$ est bien une variable aléatoire sur $(\Omega, \mathcal{A}, \mathbb{P})$.

Fonction d'une variable aléatoire

Proposition 2

Soient X une variable aléatoire discrète sur un espace probabilisé $(\Omega, \mathcal{A}, \mathbb{P})$ à valeurs dans un ensemble E et f une fonction définie sur $X(\Omega)$ à valeurs dans un ensemble F.

Alors $f \circ X$ est une variable aléatoire discrète sur $(\Omega, \mathcal{A}, \mathbb{P})$ (on la notera simplement $f(X)$).

Proposition 3

Soient X et Y deux variables aléatoires discrètes sur un espace probabilisé $(\Omega, \mathcal{A}, \mathbb{P})$ à valeurs dans un ensemble E et f une fonction définie sur $X(\Omega)$ à valeurs dans un ensemble F.

Si X et Y suivent la même loi, alors $f(X)$ et $f(Y)$ suivent aussi la même loi.

Fonction d'une variable aléatoire

Proposition 2

Soient X une variable aléatoire discrète sur un espace probabilisé $(\Omega, \mathcal{A}, \mathbb{P})$ à valeurs dans un ensemble E et f une fonction définie sur $X(\Omega)$ à valeurs dans un ensemble F.

Alors $f \circ X$ est une variable aléatoire discrète sur $(\Omega, \mathcal{A}, \mathbb{P})$ (on la notera simplement $f(X)$).

Proposition 3

Soient X et Y deux variables aléatoires discrètes sur un espace probabilisé $(\Omega, \mathcal{A}, \mathbb{P})$ à valeurs dans un ensemble E et f une fonction définie sur $X(\Omega)$ à valeurs dans un ensemble F.

Si X et Y suivent la même loi, alors $f(X)$ et $f(Y)$ suivent aussi la même loi.

Démonstration

Par définition, la loi de $f(X)$ est la donnée des $\mathbb{P}(f(X) \in B)$ pour toute partie B de $f(X)(\Omega)$.

Fonction d'une variable aléatoire

Proposition 2

Soient X une variable aléatoire discrète sur un espace probabilisé $(\Omega, \mathcal{A}, \mathbb{P})$ à valeurs dans un ensemble E et f une fonction définie sur $X(\Omega)$ à valeurs dans un ensemble F.

Alors $f \circ X$ est une variable aléatoire discrète sur $(\Omega, \mathcal{A}, \mathbb{P})$ (on la notera simplement $f(X)$).

Proposition 3

Soient X et Y deux variables aléatoires discrètes sur un espace probabilisé $(\Omega, \mathcal{A}, \mathbb{P})$ à valeurs dans un ensemble E et f une fonction définie sur $X(\Omega)$ à valeurs dans un ensemble F.

Si X et Y suivent la même loi, alors $f(X)$ et $f(Y)$ suivent aussi la même loi.

Démonstration

Par définition, la loi de $f(X)$ est la donnée des $\mathbb{P}(f(X) \in B)$ pour toute partie B de $f(X)(\Omega)$.

Or $\mathbb{P}(f(X) \in B) = \mathbb{P}(X \in f^{-1}(B)) = \mathbb{P}_X(f^{-1}(B))$ donc il est clair que si $\mathbb{P}_X = \mathbb{P}_Y$, les lois de $f(X)$ et de $f(Y)$ sont les mêmes.

Fonction d'une variable aléatoire

Proposition 2

Soient X une variable aléatoire discrète sur un espace probabilisé $(\Omega, \mathcal{A}, \mathbb{P})$ à valeurs dans un ensemble E et f une fonction définie sur $X(\Omega)$ à valeurs dans un ensemble F.

Alors $f \circ X$ est une variable aléatoire discrète sur $(\Omega, \mathcal{A}, \mathbb{P})$ (on la notera simplement $f(X)$).

Proposition 3

Soient X et Y deux variables aléatoires discrètes sur un espace probabilisé $(\Omega, \mathcal{A}, \mathbb{P})$ à valeurs dans un ensemble E et f une fonction définie sur $X(\Omega)$ à valeurs dans un ensemble F.

Si X et Y suivent la même loi, alors $f(X)$ et $f(Y)$ suivent aussi la même loi.

Démonstration

Par définition, la loi de $f(X)$ est la donnée des $\mathbb{P}(f(X) \in B)$ pour toute partie B de $f(X)(\Omega)$.

Or $\mathbb{P}(f(X) \in B) = \mathbb{P}(X \in f^{-1}(B)) = \mathbb{P}_X(f^{-1}(B))$ donc il est clair que si $\mathbb{P}_X = \mathbb{P}_Y$, les lois de $f(X)$ et de $f(Y)$ sont les mêmes.

Notation :

on note $X \sim Y$ lorsque X et Y ont même loi.

LOIS USUELLES

Lois discrètes finies 1) Loi uniforme

Situation : Tirage « au hasard » d'un entier parmi $[\![1\,;n]\!]$ (ou une boule dans une urne...), tous les tirages étant équiprobables.

Lois discrètes finies 1) Loi uniforme

Situation : Tirage « au hasard » d'un entier parmi $[\![1\,;n]\!]$ (ou une boule dans une urne...), tous les tirages étant équiprobables.

Définition 3

On dit qu'une variable aléatoire sur un espace probabilisé $(\Omega, \mathcal{A}, \mathcal{P})$ suit la **loi uniforme sur** $[\![\mathbf{1}\,;\mathbf{n}]\!]$, et l'on note $X \sim \mathcal{U}([\![1\,;n]\!])$ (ou $X \hookrightarrow \mathcal{U}([\![1\,;n]\!])$) si :

Lois discrètes finies 1) Loi uniforme

Situation : Tirage « au hasard » d'un entier parmi $[\![1\,;n]\!]$ (ou une boule dans une urne...), tous les tirages étant équiprobables.

Définition 3

On dit qu'une variable aléatoire sur un espace probabilisé $(\Omega, \mathcal{A}, \mathcal{P})$ suit la **loi uniforme sur $[\![\mathbf{1}\,;\mathbf{n}]\!]$**, et l'on note $X \sim \mathcal{U}([\![1\,;n]\!])$ (ou $X \hookrightarrow \mathcal{U}([\![1\,;n]\!])$) si :

- $X(\Omega)) = [\![1\,;n]\!]$;

Lois discrètes finies 1) Loi uniforme

Situation : Tirage « au hasard » d'un entier parmi $[\![1\,;n]\!]$ (ou une boule dans une urne...), tous les tirages étant équiprobables.

Définition 3

On dit qu'une variable aléatoire sur un espace probabilisé $(\Omega, \mathcal{A}, \mathcal{P})$ suit la **loi uniforme sur $[\![\mathbf{1}\,;\mathbf{n}]\!]$**, et l'on note $X \sim \mathcal{U}([\![1\,;n]\!])$ (ou $X \hookrightarrow \mathcal{U}([\![1\,;n]\!])$) si :

- $X(\Omega)) = [\![1\,;n]\!]$;
- $\forall\, x \in X(\Omega),\ \mathbb{P}(X = x) = \dfrac{1}{n}\cdot$

Lois discrètes finies 2) Loi de Bernoulli

Situation : Expérience de type succès-échec (pile ou face, tirage d'une boule noire ou blanche...)

Lois discrètes finies 2) Loi de Bernoulli

Situation : Expérience de type succès-échec (pile ou face, tirage d'une boule noire ou blanche...)

Définition 4

Soit p un réel dans $[0\,;1]$. On dit qu'une variable aléatoire sur un espace probabilisé $(\Omega, \mathcal{A}, \mathcal{P})$ suit la **loi de Bernoulli de paramètre p**, et l'on note $X \sim \mathcal{B}(p)$ (ou $X \hookrightarrow \mathcal{B}(p)$) si :

Lois discrètes finies 2) Loi de Bernoulli

Situation : Expérience de type succès-échec (pile ou face, tirage d'une boule noire ou blanche...)

Définition 4

Soit p un réel dans $[0\,;1]$. On dit qu'une variable aléatoire sur un espace probabilisé $(\Omega, \mathcal{A}, \mathcal{P})$ suit la **loi de Bernoulli de paramètre p**, et l'on note $X \sim \mathcal{B}(p)$ (ou $X \hookrightarrow \mathcal{B}(p)$) si :

- $X(\Omega) = \{0; 1\}$;

Lois discrètes finies 2) Loi de Bernoulli

Situation : Expérience de type succès-échec (pile ou face, tirage d'une boule noire ou blanche...)

Définition 4

Soit p un réel dans $[0\,;1]$. On dit qu'une variable aléatoire sur un espace probabilisé $(\Omega, \mathcal{A}, \mathcal{P})$ suit la **loi de Bernoulli de paramètre p**, et l'on note $X \sim \mathcal{B}(p)$ (ou $X \hookrightarrow \mathcal{B}(p)$) si :

- $X(\Omega) = \{0; 1\}$;
- $\mathbb{P}(X = 1) = p \quad \text{et} \quad \mathbb{P}(X = 0) = 1 - p$.

Lois discrètes finies 2) Loi de Bernoulli

Situation : Expérience de type succès-échec (pile ou face, tirage d'une boule noire ou blanche...)

Définition 4

Soit p un réel dans $[0\,;1]$. On dit qu'une variable aléatoire sur un espace probabilisé $(\Omega, \mathcal{A}, \mathcal{P})$ suit la **loi de Bernoulli de paramètre p**, et l'on note $X \sim \mathcal{B}(p)$ (ou $X \hookrightarrow \mathcal{B}(p)$) si :

- $X(\Omega) = \{0;1\}$;
- $\mathbb{P}(X=1) = p \quad \text{et} \quad \mathbb{P}(X=0) = 1-p$.

Remarque : Les cas $p=0$ et $p=1$ ne sont guère intéressants, c'est pourquoi on considère souvent $p \in]0\,;1[$.

Lois discrètes finies 3) Loi binomiale (tirages avec remise)

Situation : On considère une expérience de type succès-échec que l'on effectue n fois dans les même conditions, et on note X le nombre de fois où l'expérience a amené un succès. X prend donc les valeurs

$0, 1, \ldots, n$.

Lois discrètes finies 3) Loi binomiale (tirages avec remise)

Situation : On considère une expérience de type succès-échec que l'on effectue n fois dans les même conditions, et on note X le nombre de fois où l'expérience a amené un succès. X prend donc les valeurs $0, 1, \ldots, n$. Pour $k \in [\![0\,;n]\!]$, on cherche à calculer $\mathbb{P}(X = k)$.

Lois discrètes finies 3) Loi binomiale (tirages avec remise)

Situation : On considère une expérience de type succès-échec que l'on effectue n fois dans les même conditions, et on note X le nombre de fois où l'expérience a amené un succès. X prend donc les valeurs $0, 1, \ldots, n$. Pour $k \in [\![0 \,;\, n]\!]$, on cherche à calculer $\mathbb{P}(X = k)$. Parmi les n expériences, il y a $\binom{n}{k}$ façons de placer les k fois où il y a eu un succès, et chacun de ces événements est réalisé avec la probabilité $p^k(1-p)^{n-k}$, où p est la probabilité d'un succès.

Lois discrètes finies 3) Loi binomiale (tirages avec remise)

Situation : On considère une expérience de type succès-échec que l'on effectue n fois dans les même conditions, et on note X le nombre de fois où l'expérience a amené un succès. X prend donc les valeurs $0, 1, \ldots, n$. Pour $k \in [\![0\,;n]\!]$, on cherche à calculer $\mathbb{P}(X = k)$. Parmi les n expériences, il y a $\binom{n}{k}$ façons de placer les k fois où il y a eu un succès, et chacun de ces événements est réalisé avec la probabilité $p^k(1-p)^{n-k}$, où p est la probabilité d'un succès. On a donc : $\mathbb{P}(X = k) = \binom{n}{k}p^k(1-p)^{n-k}$.

Définition 5

Soit n un entier non nul et p un réel dans $[0\,;1]$. On dit qu'une variable aléatoire sur un espace probabilisé $(\Omega, \mathcal{A}, \mathcal{P})$ suit la **loi binomiale de paramètres n et p**, et l'on note $X \sim \mathcal{B}(n, p)$ (ou $X \hookrightarrow \mathcal{B}(n, p)$) si :

Lois discrètes finies 3) Loi binomiale (tirages avec remise)

Situation : On considère une expérience de type succès-échec que l'on effectue n fois dans les même conditions, et on note X le nombre de fois où l'expérience a amené un succès. X prend donc les valeurs $0, 1, \ldots, n$. Pour $k \in [\![0\,;n]\!]$, on cherche à calculer $\mathbb{P}(X = k)$. Parmi les n expériences, il y a $\binom{n}{k}$ façons de placer les k fois où il y a eu un succès, et chacun de ces événements est réalisé avec la probabilité $p^k(1-p)^{n-k}$, où p est la probabilité d'un succès. On a donc : $\mathbb{P}(X = k) = \binom{n}{k}p^k(1-p)^{n-k}$.

Définition 5

Soit n un entier non nul et p un réel dans $[0\,;1]$. On dit qu'une variable aléatoire sur un espace probabilisé $(\Omega, \mathcal{A}, \mathcal{P})$ suit la **loi binomiale de paramètres n et p**, et l'on note $X \sim \mathcal{B}(n,p)$ (ou $X \hookrightarrow \mathcal{B}(n,p)$) si :

- $X(\Omega) = [\![0\,;n]\!]$;

Lois discrètes finies 3) Loi binomiale (tirages avec remise)

Situation : On considère une expérience de type succès-échec que l'on effectue n fois dans les même conditions, et on note X le nombre de fois où l'expérience a amené un succès. X prend donc les valeurs $0, 1, \dots, n$. Pour $k \in [\![0\,;n]\!]$, on cherche à calculer $\mathbb{P}(X = k)$. Parmi les n expériences, il y a $\binom{n}{k}$ façons de placer les k fois où il y a eu un succès, et chacun de ces événements est réalisé avec la probabilité $p^k(1-p)^{n-k}$, où p est la probabilité d'un succès. On a donc : $\mathbb{P}(X = k) = \binom{n}{k} p^k(1-p)^{n-k}$.

Définition 5

Soit n un entier non nul et p un réel dans $[0\,;1]$. On dit qu'une variable aléatoire sur un espace probabilisé $(\Omega, \mathcal{A}, \mathcal{P})$ suit la **loi binomiale de paramètres n et p**, et l'on note $X \sim \mathcal{B}(n, p)$ (ou $X \hookrightarrow \mathcal{B}(n, p)$) si :

- $X(\Omega) = [\![0\,;n]\!]$;
- $\forall\, k \in [\![0\,;n]\!],\ \mathbb{P}(X = k) = \binom{n}{k} p^k(1-p)^{n-k}$.

Lois discrètes finies 3) Loi binomiale (tirages avec remise)

Situation : On considère une expérience de type succès-échec que l'on effectue n fois dans les même conditions, et on note X le nombre de fois où l'expérience a amené un succès. X prend donc les valeurs $0, 1, \dots, n$. Pour $k \in [\![0\,;n]\!]$, on cherche à calculer $\mathbb{P}(X = k)$. Parmi les n expériences, il y a $\binom{n}{k}$ façons de placer les k fois où il y a eu un succès, et chacun de ces événements est réalisé avec la probabilité $p^k(1-p)^{n-k}$, où p est la probabilité d'un succès. On a donc : $\mathbb{P}(X = k) = \binom{n}{k} p^k (1-p)^{n-k}$.

Définition 5

Soit n un entier non nul et p un réel dans $[0\,;1]$. On dit qu'une variable aléatoire sur un espace probabilisé $(\Omega, \mathcal{A}, \mathcal{P})$ suit la **loi binomiale de paramètres n et p**, et l'on note $X \sim \mathcal{B}(n,p)$ (ou $X \hookrightarrow \mathcal{B}(n,p)$) si :

- $X(\Omega) = [\![0\,;n]\!]$;
- $\forall\, k \in [\![0\,;n]\!],\ \mathbb{P}(X = k) = \binom{n}{k} p^k (1-p)^{n-k}$.

Remarques :

1. Les cas $p = 0$ et $p = 1$ ne sont guère intéressants, c'est pourquoi on considère souvent $p \in \,]0\,;1[$.

Lois discrètes finies 3) Loi binomiale (tirages avec remise)

Situation : On considère une expérience de type succès-échec que l'on effectue n fois dans les même conditions, et on note X le nombre de fois où l'expérience a amené un succès. X prend donc les valeurs $0, 1, \ldots, n$. Pour $k \in [\![0\,;n]\!]$, on cherche à calculer $\mathbb{P}(X = k)$. Parmi les n expériences, il y a $\binom{n}{k}$ façons de placer les k fois où il y a eu un succès, et chacun de ces événements est réalisé avec la probabilité $p^k(1-p)^{n-k}$, où p est la probabilité d'un succès. On a donc : $\mathbb{P}(X = k) = \binom{n}{k}p^k(1-p)^{n-k}$.

Définition 5

Soit n un entier non nul et p un réel dans $[0\,;1]$. On dit qu'une variable aléatoire sur un espace probabilisé $(\Omega, \mathcal{A}, \mathcal{P})$ suit la **loi binomiale de paramètres n et p**, et l'on note $X \sim \mathcal{B}(n,p)$ (ou $X \hookrightarrow \mathcal{B}(n,p)$) si :

- $X(\Omega) = [\![0\,;n]\!]$;
- $\forall\, k \in [\![0\,;n]\!]$, $\mathbb{P}(X = k) = \binom{n}{k}p^k(1-p)^{n-k}$.

Remarques :

1. Les cas $p = 0$ et $p = 1$ ne sont guère intéressants, c'est pourquoi on considère souvent $p \in\,]0\,;1[$.
2. On note traditionnellement $q = 1 - p$ de sorte que $\mathbb{P}(X = k) = \binom{n}{k}p^k q^{n-k}$.

Lois discrètes finies 3) Loi binomiale (tirages avec remise)

Situation : On considère une expérience de type succès-échec que l'on effectue n fois dans les même conditions, et on note X le nombre de fois où l'expérience a amené un succès. X prend donc les valeurs $0, 1, \dots, n$. Pour $k \in [\![0\,;n]\!]$, on cherche à calculer $\mathbb{P}(X = k)$. Parmi les n expériences, il y a $\binom{n}{k}$ façons de placer les k fois où il y a eu un succès, et chacun de ces événements est réalisé avec la probabilité $p^k(1-p)^{n-k}$, où p est la probabilité d'un succès. On a donc : $\mathbb{P}(X = k) = \binom{n}{k}p^k(1-p)^{n-k}$.

Définition 5

Soit n un entier non nul et p un réel dans $[0\,;1]$. On dit qu'une variable aléatoire sur un espace probabilisé $(\Omega, \mathcal{A}, \mathcal{P})$ suit la **loi binomiale de paramètres n et p**, et l'on note $X \sim \mathcal{B}(n,p)$ (ou $X \hookrightarrow \mathcal{B}(n,p)$) si :

- $X(\Omega) = [\![0\,;n]\!]$;
- $\forall\, k \in [\![0\,;n]\!],\ \mathbb{P}(X = k) = \binom{n}{k}p^k(1-p)^{n-k}$.

Remarques :

1. Les cas $p = 0$ et $p = 1$ ne sont guère intéressants, c'est pourquoi on considère souvent $p \in\,]0\,;1[$.
2. On note traditionnellement $q = 1 - p$ de sorte que $\mathbb{P}(X = k) = \binom{n}{k}p^k q^{n-k}$.
3. Une loi de Bernoulli de paramètre p est aussi une loi binomiale de paramètres 1 et p, c'est pourquoi l'on note souvent $\mathcal{B}(1,p)$ au lieu de $\mathcal{B}(p)$.

Lois discrètes infinies 1) Loi géométrique

Situation : On considère une expérience de type succès-échec et on répète l'expérience dans des conditions identiques. On note X le nombre d'épreuves effectuées jusqu'à ce que l'on obtienne un succès pour la première fois.

Lois discrètes infinies 1) Loi géométrique

Situation : On considère une expérience de type succès-échec et on répète l'expérience dans des conditions identiques. On note X le nombre d'épreuves effectuées jusqu'à ce que l'on obtienne un succès pour la première fois.
Notons p la probabilité d'un succès, avec $p \in \,]0\,;1[$ (sinon, inutile de jouer !), et A_i l'événement « on a obtenu un succès lors de la i^{eme} expérience ».

Lois discrètes infinies 1) Loi géométrique

Situation : On considère une expérience de type succès-échec et on répète l'expérience dans des conditions identiques. On note X le nombre d'épreuves effectuées jusqu'à ce que l'on obtienne un succès pour la première fois.
Notons p la probabilité d'un succès, avec $p \in]0\,;1[$ (sinon, inutile de jouer !), et A_i l'événement « on a obtenu un succès lors de la i^{eme} expérience ».

Alors, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$,

$$\mathbb{P}(X = n) = \mathbb{P}(\overline{A_1} \cap \overline{A_2} \cap \ldots \cap \overline{A_{n-1}} \cap A_n) = (1-p)^{n-1} p\,.$$

Lois discrètes infinies 1) Loi géométrique

Situation : On considère une expérience de type succès-échec et on répète l'expérience dans des conditions identiques. On note X le nombre d'épreuves effectuées jusqu'à ce que l'on obtienne un succès pour la première fois.
Notons p la probabilité d'un succès, avec $p \in]0\,;1[$ (sinon, inutile de jouer !), et A_i l'événement « on a obtenu un succès lors de la i^{eme} expérience ».

Alors, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$,

$$\mathbb{P}(X = n) = \mathbb{P}(\overline{A_1} \cap \overline{A_2} \cap ... \cap \overline{A_{n-1}} \cap A_n) = (1-p)^{n-1}p\,.$$

Soit R l'événement « on n'obtient que des échecs ». On a $R = \bigcap_{i=1}^{+\infty} \overline{A_i}$.

Lois discrètes infinies 1) Loi géométrique

Situation : On considère une expérience de type succès-échec et on répète l'expérience dans des conditions identiques. On note X le nombre d'épreuves effectuées jusqu'à ce que l'on obtienne un succès pour la première fois.
Notons p la probabilité d'un succès, avec $p \in]0\,;1[$ (sinon, inutile de jouer !), et A_i l'événement « on a obtenu un succès lors de la i^{eme} expérience ».

Alors, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$,

$$\mathbb{P}(X = n) = \mathbb{P}(\overline{A_1} \cap \overline{A_2} \cap \ldots \cap \overline{A_{n-1}} \cap A_n) = (1-p)^{n-1}p\,.$$

Soit R l'événement « on n'obtient que des échecs ». On a $R = \bigcap\limits_{i=1}^{+\infty} \overline{A_i}$.

Donc : $\mathbb{P}(X = +\infty) = \mathbb{P}(R) = \lim\limits_{n \to +\infty} P\left(\bigcap\limits_{i=1}^{n} \overline{A_i}\right) = \lim\limits_{n \to +\infty} (1-p)^n = 0\,.$

Lois discrètes infinies 1) Loi géométrique

Situation : On considère une expérience de type succès-échec et on répète l'expérience dans des conditions identiques. On note X le nombre d'épreuves effectuées jusqu'à ce que l'on obtienne un succès pour la première fois.
Notons p la probabilité d'un succès, avec $p \in]0\,;1[$ (sinon, inutile de jouer !), et A_i l'événement « on a obtenu un succès lors de la i^{eme} expérience ».

Alors, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$,

$$\mathbb{P}(X = n) = \mathbb{P}(\overline{A_1} \cap \overline{A_2} \cap \ldots \cap \overline{A_{n-1}} \cap A_n) = (1-p)^{n-1}p\,.$$

Soit R l'événement « on n'obtient que des échecs ». On a $R = \bigcap_{i=1}^{+\infty} \overline{A_i}$.

Donc : $\mathbb{P}(X = +\infty) = \mathbb{P}(R) = \lim_{n \to +\infty} P\left(\bigcap_{i=1}^{n} \overline{A_i}\right) = \lim_{n \to +\infty} (1-p)^n = 0\,.$

On peut donc considérer que X prend ses valeurs dans $\mathbb{N}^*$.

Lois discrètes infinies 1) Loi géométrique

Situation : On considère une expérience de type succès-échec et on répète l'expérience dans des conditions identiques. On note X le nombre d'épreuves effectuées jusqu'à ce que l'on obtienne un succès pour la première fois.
Notons p la probabilité d'un succès, avec $p \in]0\,;1[$ (sinon, inutile de jouer !), et A_i l'événement « on a obtenu un succès lors de la i^{eme} expérience ».

Alors, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$,

$$\mathbb{P}(X = n) = \mathbb{P}(\overline{A_1} \cap \overline{A_2} \cap \ldots \cap \overline{A_{n-1}} \cap A_n) = (1-p)^{n-1} p\,.$$

Soit R l'événement « on n'obtient que des échecs ». On a $R = \bigcap_{i=1}^{+\infty} \overline{A_i}$.

Donc : $\mathbb{P}(X = +\infty) = \mathbb{P}(R) = \lim_{n \to +\infty} P\left(\bigcap_{i=1}^{n} \overline{A_i}\right) = \lim_{n \to +\infty} (1-p)^n = 0\,.$

On peut donc considérer que X prend ses valeurs dans $\mathbb{N}^*$.

Définition 6

Soit p un réel dans $]0,1[$. On dit qu'une variable aléatoire sur un espace probabilisé $(\Omega, \mathcal{A}, \mathcal{P})$ suit la **loi géométrique de paramètre p**, et l'on note $X \sim \mathcal{G}(p)$ (ou $X \hookrightarrow \mathcal{G}(p)$) si :

Lois discrètes infinies 1) Loi géométrique

Situation : On considère une expérience de type succès-échec et on répète l'expérience dans des conditions identiques. On note X le nombre d'épreuves effectuées jusqu'à ce que l'on obtienne un succès pour la première fois.
Notons p la probabilité d'un succès, avec $p \in]0\,;1[$ (sinon, inutile de jouer !), et A_i l'événement « on a obtenu un succès lors de la i^{eme} expérience ».

Alors, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$,

$$\mathbb{P}(X = n) = \mathbb{P}(\overline{A_1} \cap \overline{A_2} \cap \ldots \cap \overline{A_{n-1}} \cap A_n) = (1-p)^{n-1} p\,.$$

Soit R l'événement « on n'obtient que des échecs ». On a $R = \bigcap_{i=1}^{+\infty} \overline{A_i}$.

Donc : $\mathbb{P}(X = +\infty) = \mathbb{P}(R) = \lim_{n \to +\infty} P\left(\bigcap_{i=1}^{n} \overline{A_i}\right) = \lim_{n \to +\infty} (1-p)^n = 0\,.$

On peut donc considérer que X prend ses valeurs dans $\mathbb{N}^*$.

Définition 6

Soit p un réel dans $]0,1[$. On dit qu'une variable aléatoire sur un espace probabilisé $(\Omega, \mathcal{A}, \mathcal{P})$ suit la **loi géométrique de paramètre p**, et l'on note $X \sim \mathcal{G}(p)$ (ou $X \hookrightarrow \mathcal{G}(p)$) si :

- $X(\Omega) = \mathbb{N}^*$;

Lois discrètes infinies 1) Loi géométrique

Situation : On considère une expérience de type succès-échec et on répète l'expérience dans des conditions identiques. On note X le nombre d'épreuves effectuées jusqu'à ce que l'on obtienne un succès pour la première fois.
Notons p la probabilité d'un succès, avec $p \in]0\,;1[$ (sinon, inutile de jouer !), et A_i l'événement « on a obtenu un succès lors de la i^{eme} expérience ».

Alors, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$,

$$\mathbb{P}(X = n) = \mathbb{P}(\overline{A_1} \cap \overline{A_2} \cap \ldots \cap \overline{A_{n-1}} \cap A_n) = (1-p)^{n-1} p\,.$$

Soit R l'événement « on n'obtient que des échecs ». On a $R = \bigcap_{i=1}^{+\infty} \overline{A_i}$.

Donc : $\mathbb{P}(X = +\infty) = \mathbb{P}(R) = \lim_{n\to+\infty} P\left(\bigcap_{i=1}^{n} \overline{A_i}\right) = \lim_{n\to+\infty} (1-p)^n = 0\,.$

On peut donc considérer que X prend ses valeurs dans $\mathbb{N}^*$.

Définition 6

Soit p un réel dans $]0,1[$. On dit qu'une variable aléatoire sur un espace probabilisé $(\Omega, \mathcal{A}, \mathcal{P})$ suit la **loi géométrique de paramètre p**, et l'on note $X \sim \mathcal{G}(p)$ (ou $X \hookrightarrow \mathcal{G}(p)$) si :

- $X(\Omega) = \mathbb{N}^*$;
- $\forall\, n \in \mathbb{N}^*, \quad \mathbb{P}(X = n) = (1-p)^{n-1} p\,.$

Lois discrètes infinies 1) Loi géométrique

Situation : On considère une expérience de type succès-échec et on répète l'expérience dans des conditions identiques. On note X le nombre d'épreuves effectuées jusqu'à ce que l'on obtienne un succès pour la première fois.
Notons p la probabilité d'un succès, avec $p \in]0\,;1[$ (sinon, inutile de jouer !), et A_i l'événement « on a obtenu un succès lors de la i^{eme} expérience ».

Alors, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$,

$$\mathbb{P}(X = n) = \mathbb{P}(\overline{A_1} \cap \overline{A_2} \cap \ldots \cap \overline{A_{n-1}} \cap A_n) = (1-p)^{n-1} p\,.$$

Soit R l'événement « on n'obtient que des échecs ». On a $R = \bigcap_{i=1}^{+\infty} \overline{A_i}$.

Donc : $\mathbb{P}(X = +\infty) = \mathbb{P}(R) = \lim_{n\to+\infty} P\left(\bigcap_{i=1}^{n} \overline{A_i}\right) = \lim_{n\to+\infty} (1-p)^n = 0\,.$

On peut donc considérer que X prend ses valeurs dans $\mathbb{N}^*$.

Définition 6

Soit p un réel dans $]0,1[$. On dit qu'une variable aléatoire sur un espace probabilisé $(\Omega, \mathcal{A}, \mathcal{P})$ suit la **loi géométrique de paramètre p**, et l'on note $X \sim \mathcal{G}(p)$ (ou $X \hookrightarrow \mathcal{G}(p)$) si :

- $X(\Omega) = \mathbb{N}^*$;
- $\forall\, n \in \mathbb{N}^*, \quad \mathbb{P}(X = n) = (1-p)^{n-1} p\,.$

Rem : Il est facile de vérifier que $\sum_{n=1}^{+\infty} \mathbb{P}(X = n)$ est bien égal à 1 (série géométrique).

Proposition 4

Si $X \hookrightarrow \mathcal{G}(p)$, alors pour tout $k \in \mathbb{N}^*$:

$$\mathbb{P}(X > k) = (1-p)^k.$$

Proposition 4

Si $X \hookrightarrow \mathcal{G}(p)$, alors pour tout $k \in \mathbb{N}^*$:

$$\mathbb{P}(X > k) = (1-p)^k.$$

Démonstration

On peut écrire que, puisque $(X > k) = \bigsqcup\limits_{n>k} (X = n)$:

Proposition 4

Si $X \hookrightarrow \mathcal{G}(p)$, alors pour tout $k \in \mathbb{N}^*$:

$$\mathbb{P}(X > k) = (1-p)^k.$$

Démonstration

On peut écrire que, puisque $(X > k) = \bigsqcup_{n>k} (X = n)$:

$$\mathbb{P}(X > k) = \sum_{n=k+1}^{+\infty} \mathbb{P}(X = n) = \sum_{n=k+1}^{+\infty} (1-p)^{n-1} p$$

Proposition 4

Si $X \hookrightarrow \mathcal{G}(p)$, alors pour tout $k \in \mathbb{N}^*$:

$$\mathbb{P}(X > k) = (1-p)^k.$$

Démonstration

On peut écrire que, puisque $(X > k) = \bigsqcup_{n>k} (X = n)$:

$$\mathbb{P}(X > k) = \sum_{n=k+1}^{+\infty} \mathbb{P}(X = n) = \sum_{n=k+1}^{+\infty} (1-p)^{n-1} p$$

puis utiliser les formules sur les séries géométriques,

Proposition 4

Si $X \hookrightarrow \mathcal{G}(p)$, alors pour tout $k \in \mathbb{N}^*$:

$$\mathbb{P}(X > k) = (1-p)^k.$$

Démonstration

On peut écrire que, puisque $(X > k) = \bigsqcup_{n>k} (X = n)$:

$$\mathbb{P}(X > k) = \sum_{n=k+1}^{+\infty} \mathbb{P}(X = n) = \sum_{n=k+1}^{+\infty} (1-p)^{n-1} p$$

puis utiliser les formules sur les séries géométriques, ou bien faire une démonstration probabiliste en remarquant que l'évènement $(X > k)$ est tout simplement l'évènement : « les k premières épreuves ont été un échec ».

Lois discrètes infinies 2) Loi de Poisson

Situation :

Beaucoup de situations sont liées à l'étude de la réalisation d'un événement dans un intervalle de temps donné (arrivée de clients qui se présentent à un guichet d'une banque en une heure, apparitions de pannes d'un réseau informatique en une année, arrivée de malades aux urgences d'un hôpital en une nuit,....).

Lois discrètes infinies 2) Loi de Poisson

Situation :

Beaucoup de situations sont liées à l'étude de la réalisation d'un événement dans un intervalle de temps donné (arrivée de clients qui se présentent à un guichet d'une banque en une heure, apparitions de pannes d'un réseau informatique en une année, arrivée de malades aux urgences d'un hôpital en une nuit,....).

Processus de Poisson :

Précisons les hypothèses faites relativement à la réalisation de l'événement qui nous intéresse.

Lois discrètes infinies 2) Loi de Poisson

Situation :

Beaucoup de situations sont liées à l'étude de la réalisation d'un événement dans un intervalle de temps donné (arrivée de clients qui se présentent à un guichet d'une banque en une heure, apparitions de pannes d'un réseau informatique en une année, arrivée de malades aux urgences d'un hôpital en une nuit,....).

Processus de Poisson :

Précisons les hypothèses faites relativement à la réalisation de l'événement qui nous intéresse.

1. Les nombres de réalisations de l'événement au cours d'intervalles de temps disjoints sont des variables aléatoires indépendantes, c'est-à-dire que le nombre de réalisations au cours d'un intervalle de temps est indépendant du nombre de réalisations au cours d'intervalles de temps antérieurs.

Lois discrètes infinies 2) Loi de Poisson

Situation :

Beaucoup de situations sont liées à l'étude de la réalisation d'un événement dans un intervalle de temps donné (arrivée de clients qui se présentent à un guichet d'une banque en une heure, apparitions de pannes d'un réseau informatique en une année, arrivée de malades aux urgences d'un hôpital en une nuit,....).

Processus de Poisson :

Précisons les hypothèses faites relativement à la réalisation de l'événement qui nous intéresse.

1. Les nombres de réalisations de l'événement au cours d'intervalles de temps disjoints sont des variables aléatoires indépendantes, c'est-à-dire que le nombre de réalisations au cours d'un intervalle de temps est indépendant du nombre de réalisations au cours d'intervalles de temps antérieurs.
2. La probabilité pour que l'événement se réalise une fois, au cours d'un petit intervalle de temps Δt, est proportionnelle à l'amplitude de l'intervalle et vaut $\alpha\Delta t$, où α est une valeur positive que l'on suppose constante tout au long de la période d'observation.

Lois discrètes infinies 2) Loi de Poisson

Situation :

Beaucoup de situations sont liées à l'étude de la réalisation d'un événement dans un intervalle de temps donné (arrivée de clients qui se présentent à un guichet d'une banque en une heure, apparitions de pannes d'un réseau informatique en une année, arrivée de malades aux urgences d'un hôpital en une nuit,....).

Processus de Poisson :

Précisons les hypothèses faites relativement à la réalisation de l'événement qui nous intéresse.

1. Les nombres de réalisations de l'événement au cours d'intervalles de temps disjoints sont des variables aléatoires indépendantes, c'est-à-dire que le nombre de réalisations au cours d'un intervalle de temps est indépendant du nombre de réalisations au cours d'intervalles de temps antérieurs.
2. La probabilité pour que l'événement se réalise une fois, au cours d'un petit intervalle de temps Δt, est proportionnelle à l'amplitude de l'intervalle et vaut $\alpha \Delta t$, où α est une valeur positive que l'on suppose constante tout au long de la période d'observation.
3. Il est très rare d'observer plus d'une fois l'événement au cours d'un petit intervalle de temps Δt, c'est-à-dire que la probabilité pour que l'événement se réalise plus d'une fois au cours de l'intervalle de temps Δt est négligeable.

Lois discrètes infinies 2) Loi de Poisson

Situation :

Beaucoup de situations sont liées à l'étude de la réalisation d'un événement dans un intervalle de temps donné (arrivée de clients qui se présentent à un guichet d'une banque en une heure, apparitions de pannes d'un réseau informatique en une année, arrivée de malades aux urgences d'un hôpital en une nuit,....).

Processus de Poisson :

Précisons les hypothèses faites relativement à la réalisation de l'événement qui nous intéresse.

1. Les nombres de réalisations de l'événement au cours d'intervalles de temps disjoints sont des variables aléatoires indépendantes, c'est-à-dire que le nombre de réalisations au cours d'un intervalle de temps est indépendant du nombre de réalisations au cours d'intervalles de temps antérieurs.
2. La probabilité pour que l'événement se réalise une fois, au cours d'un petit intervalle de temps Δt, est proportionnelle à l'amplitude de l'intervalle et vaut $\alpha\Delta t$, où α est une valeur positive que l'on suppose constante tout au long de la période d'observation.
3. Il est très rare d'observer plus d'une fois l'événement au cours d'un petit intervalle de temps Δt, c'est-à-dire que la probabilité pour que l'événement se réalise plus d'une fois au cours de l'intervalle de temps Δt est négligeable.

Sous ces hypothèses, la variable aléatoire $X =$ « nombre de fois où l'événement considéré se réalise au cours d'un intervalle de temps de durée t » est distribuée suivant une loi de Poisson de paramètre $\lambda = \alpha t$.

Lois discrètes infinies 2) Loi de Poisson

Loi de Poisson :

Nous connaissons déjà la loi de probabilités de la variable $Y =$ « nombre de réalisations d'un événement donné, de probabilité p, au cours de n essais ». Il s'agit d'une loi binomiale $\mathcal{B}(n, p)$.

Lois discrètes infinies 2) Loi de Poisson

Loi de Poisson :

Nous connaissons déjà la loi de probabilités de la variable $Y =$ « nombre de réalisations d'un événement donné, de probabilité p, au cours de n essais ». Il s'agit d'une loi binomiale $\mathcal{B}(n, p)$.

Divisons alors l'intervalle de temps de longueur t en n petits intervalles de temps disjoints de longueur $\Delta t = t/n$.

Lois discrètes infinies 2) Loi de Poisson

Loi de Poisson :

Nous connaissons déjà la loi de probabilités de la variable $Y =$ « nombre de réalisations d'un événement donné, de probabilité p, au cours de n essais ». Il s'agit d'une loi binomiale $\mathcal{B}(n, p)$.

Divisons alors l'intervalle de temps de longueur t en n petits intervalles de temps disjoints de longueur $\Delta t = t/n$.

L'hypothèse 3. permet d'affirmer que dans chacun de ces n petits intervalles il n'y a principalement que deux possibilités : l'événement se réalise une fois ou ne se réalise pas (cela sera d'autant plus vrai que n est grand).

Lois discrètes infinies 2) Loi de Poisson

Loi de Poisson :

Nous connaissons déjà la loi de probabilités de la variable $Y =$ « nombre de réalisations d'un événement donné, de probabilité p, au cours de n essais ». Il s'agit d'une loi binomiale $\mathcal{B}(n, p)$.

Divisons alors l'intervalle de temps de longueur t en n petits intervalles de temps disjoints de longueur $\Delta t = t/n$.

L'hypothèse 3. permet d'affirmer que dans chacun de ces n petits intervalles il n'y a principalement que deux possibilités : l'événement se réalise une fois ou ne se réalise pas (cela sera d'autant plus vrai que n est grand).

L'hypothèse 2. permet d'affirmer que dans chacun de ces n petits intervalles, la probabilité de réalisation de l'événement est constante et égale à $\alpha\Delta t = \alpha t/n = p$.

Lois discrètes infinies 2) Loi de Poisson

Loi de Poisson :

Nous connaissons déjà la loi de probabilités de la variable $Y =$ « nombre de réalisations d'un événement donné, de probabilité p, au cours de n essais ». Il s'agit d'une loi binomiale $\mathcal{B}(n, p)$.

Divisons alors l'intervalle de temps de longueur t en n petits intervalles de temps disjoints de longueur $\Delta t = t/n$.

L'hypothèse 3. permet d'affirmer que dans chacun de ces n petits intervalles il n'y a principalement que deux possibilités : l'événement se réalise une fois ou ne se réalise pas (cela sera d'autant plus vrai que n est grand).

L'hypothèse 2. permet d'affirmer que dans chacun de ces n petits intervalles, la probabilité de réalisation de l'événement est constante et égale à $\alpha \Delta t = \alpha t/n = p$.

D'après l'hypothèse 1., ces évènements sont indépendants, donc le nombre de réalisations de l'évènement dans l'intervalle de temps t suit la loi binomiale $\mathcal{B}(n, \alpha t/n)$.

Lois discrètes infinies 2) Loi de Poisson

Loi de Poisson :

Nous connaissons déjà la loi de probabilités de la variable $Y =$ « nombre de réalisations d'un événement donné, de probabilité p, au cours de n essais ». Il s'agit d'une loi binomiale $\mathcal{B}(n, p)$.

Divisons alors l'intervalle de temps de longueur t en n petits intervalles de temps disjoints de longueur $\Delta t = t/n$.

L'hypothèse 3. permet d'affirmer que dans chacun de ces n petits intervalles il n'y a principalement que deux possibilités : l'événement se réalise une fois ou ne se réalise pas (cela sera d'autant plus vrai que n est grand).

L'hypothèse 2. permet d'affirmer que dans chacun de ces n petits intervalles, la probabilité de réalisation de l'événement est constante et égale à $\alpha\Delta t = \alpha t/n = p$.

D'après l'hypothèse 1., ces évènements sont indépendants, donc le nombre de réalisations de l'évènement dans l'intervalle de temps t suit la loi binomiale $\mathcal{B}(n, \alpha t/n)$.

Pour trouver la loi que l'on cherche, c'est-à-dire la loi de Poisson de paramètre αt, il suffit de faire tendre n vers $+\infty$.

Lois discrètes infinies 2) Loi de Poisson

Calcul :

Si Y suit une loi $\mathcal{B}(n, \lambda/n)$, on sait que

$$\mathbb{P}(Y = k) = \binom{n}{k}\left(\frac{\lambda}{n}\right)^k \left(1 - \frac{\lambda}{n}\right)^{n-k}$$

Lois discrètes infinies 2) Loi de Poisson

Calcul :

Si Y suit une loi $\mathcal{B}(n, \lambda/n)$, on sait que

$$\mathbb{P}(Y = k) = \binom{n}{k}\left(\frac{\lambda}{n}\right)^k \left(1 - \frac{\lambda}{n}\right)^{n-k} = \left(1 - \frac{\lambda}{n}\right)^{n-k} \frac{\lambda^k}{k!} \frac{n(n-1)\cdots(n-k+1)}{n^k}$$

Lois discrètes infinies 2) Loi de Poisson

Calcul :

Si Y suit une loi $\mathcal{B}(n, \lambda/n)$, on sait que

$$\mathbb{P}(Y = k) = \binom{n}{k}\left(\frac{\lambda}{n}\right)^k\left(1 - \frac{\lambda}{n}\right)^{n-k} = \left(1 - \frac{\lambda}{n}\right)^{n-k}\frac{\lambda^k}{k!}\,\frac{n(n-1)\cdots(n-k+1)}{n^k}$$

$$= \left(1 - \frac{\lambda}{n}\right)^{n}\frac{\lambda^k}{k!}\left(1 - \frac{\lambda}{n}\right)^{-k}\left[\frac{n}{n}\times\frac{n-1}{n}\times\cdots\times\frac{n-k+1}{n}\right].$$

Lois discrètes infinies 2) Loi de Poisson

Calcul :

Si Y suit une loi $\mathcal{B}(n, \lambda/n)$, on sait que

$$\mathbb{P}(Y=k) = \binom{n}{k}\left(\frac{\lambda}{n}\right)^k \left(1-\frac{\lambda}{n}\right)^{n-k} = \left(1-\frac{\lambda}{n}\right)^{n-k} \frac{\lambda^k}{k!} \frac{n(n-1)\cdots(n-k+1)}{n^k}$$

$$= \left(1-\frac{\lambda}{n}\right)^{n} \frac{\lambda^k}{k!} \left(1-\frac{\lambda}{n}\right)^{-k} \left[\frac{n}{n} \times \frac{n-1}{n} \times \cdots \times \frac{n-k+1}{n}\right].$$

Chaque terme du produit entre crochets tend vers 1 lorsque n tend vers l'infini. Il y a k termes, c'est-à-dire un nombre fini ne dépendant pas de n donc le crochet tend vers 1.

Lois discrètes infinies 2) Loi de Poisson

Calcul :

Si Y suit une loi $\mathcal{B}(n, \lambda/n)$, on sait que

$$\mathbb{P}(Y=k) = \binom{n}{k}\left(\frac{\lambda}{n}\right)^k\left(1-\frac{\lambda}{n}\right)^{n-k} = \left(1-\frac{\lambda}{n}\right)^{n-k}\frac{\lambda^k}{k!}\,\frac{n(n-1)\cdots(n-k+1)}{n^k}$$
$$= \left(1-\frac{\lambda}{n}\right)^{n}\frac{\lambda^k}{k!}\left(1-\frac{\lambda}{n}\right)^{-k}\left[\frac{n}{n}\times\frac{n-1}{n}\times\cdots\times\frac{n-k+1}{n}\right].$$

Chaque terme du produit entre crochets tend vers 1 lorsque n tend vers l'infini. Il y a k termes, c'est-à-dire un nombre fini ne dépendant pas de n donc le crochet tend vers 1. Pour la même raison, $\left(1-\frac{\lambda}{n}\right)^{-k}$ tend vers 1.

Lois discrètes infinies 2) Loi de Poisson

Calcul :

Si Y suit une loi $\mathcal{B}(n, \lambda/n)$, on sait que

$$\begin{aligned}\mathbb{P}(Y=k) = \binom{n}{k}\left(\frac{\lambda}{n}\right)^k\left(1-\frac{\lambda}{n}\right)^{n-k} &= \left(1-\frac{\lambda}{n}\right)^{n-k}\frac{\lambda^k}{k!}\,\frac{n(n-1)\cdots(n-k+1)}{n^k}\\ &= \left(1-\frac{\lambda}{n}\right)^{n}\frac{\lambda^k}{k!}\left(1-\frac{\lambda}{n}\right)^{-k}\left[\frac{n}{n}\times\frac{n-1}{n}\times\cdots\times\frac{n-k+1}{n}\right].\end{aligned}$$

Chaque terme du produit entre crochets tend vers 1 lorsque n tend vers l'infini. Il y a k termes, c'est-à-dire un nombre fini ne dépendant pas de n donc le crochet tend vers 1. Pour la même raison, $\left(1-\frac{\lambda}{n}\right)^{-k}$ tend vers 1. De plus,

$$\left(1-\frac{\lambda}{n}\right)^{n} = \mathrm{e}^{n\ln\left(1-\frac{\lambda}{n}\right)} \quad \text{et} \quad \ln\left(1-\frac{\lambda}{n}\right) \underset{n\to\infty}{\sim} -\frac{\lambda}{n}$$

donc $\left(1-\frac{\lambda}{n}\right)^{n}$ tend vers $\mathrm{e}^{-\lambda}$.

Lois discrètes infinies 2) Loi de Poisson

Calcul :

Si Y suit une loi $\mathcal{B}(n, \lambda/n)$, on sait que

$$\mathbb{P}(Y = k) = \binom{n}{k}\left(\frac{\lambda}{n}\right)^k \left(1 - \frac{\lambda}{n}\right)^{n-k} = \left(1 - \frac{\lambda}{n}\right)^{n-k} \frac{\lambda^k}{k!} \frac{n(n-1)\cdots(n-k+1)}{n^k}$$

$$= \left(1 - \frac{\lambda}{n}\right)^{n} \frac{\lambda^k}{k!} \left(1 - \frac{\lambda}{n}\right)^{-k} \left[\frac{n}{n} \times \frac{n-1}{n} \times \cdots \times \frac{n-k+1}{n}\right].$$

Chaque terme du produit entre crochets tend vers 1 lorsque n tend vers l'infini. Il y a k termes, c'est-à-dire un nombre fini ne dépendant pas de n donc le crochet tend vers 1. Pour la même raison, $\left(1 - \frac{\lambda}{n}\right)^{-k}$ tend vers 1. De plus,

$$\left(1 - \frac{\lambda}{n}\right)^{n} = \mathrm{e}^{n \ln\left(1 - \frac{\lambda}{n}\right)} \quad \text{et} \quad \ln\left(1 - \frac{\lambda}{n}\right) \underset{n\to\infty}{\sim} -\frac{\lambda}{n}$$

donc $\left(1 - \frac{\lambda}{n}\right)^{n}$ tend vers $\mathrm{e}^{-\lambda}$. On en conclut que $\mathbb{P}(Y = k)$ tend vers $\mathrm{e}^{-\lambda}\lambda^k/k!$.

Lois discrètes infinies 2) Loi de Poisson

Calcul :

Si Y suit une loi $\mathcal{B}(n, \lambda/n)$, on sait que

$$\mathbb{P}(Y=k) = \binom{n}{k}\left(\frac{\lambda}{n}\right)^k\left(1-\frac{\lambda}{n}\right)^{n-k} = \left(1-\frac{\lambda}{n}\right)^{n-k}\frac{\lambda^k}{k!}\frac{n(n-1)\cdots(n-k+1)}{n^k}$$

$$= \left(1-\frac{\lambda}{n}\right)^{n}\frac{\lambda^k}{k!}\left(1-\frac{\lambda}{n}\right)^{-k}\left[\frac{n}{n}\times\frac{n-1}{n}\times\cdots\times\frac{n-k+1}{n}\right].$$

Chaque terme du produit entre crochets tend vers 1 lorsque n tend vers l'infini. Il y a k termes, c'est-à-dire un nombre fini ne dépendant pas de n donc le crochet tend vers 1. Pour la même raison, $\left(1-\frac{\lambda}{n}\right)^{-k}$ tend vers 1. De plus,

$$\left(1-\frac{\lambda}{n}\right)^{n} = \mathrm{e}^{n\ln\left(1-\frac{\lambda}{n}\right)} \quad \text{et} \quad \ln\left(1-\frac{\lambda}{n}\right)\underset{n\to\infty}{\sim} -\frac{\lambda}{n}$$

donc $\left(1-\frac{\lambda}{n}\right)^{n}$ tend vers $\mathrm{e}^{-\lambda}$. On en conclut que $\mathbb{P}(Y=k)$ tend vers $\mathrm{e}^{-\lambda}\lambda^k/k!$.

Définition 7

Soit λ un réel strictement positif. On dit qu'une variable aléatoire sur un espace probabilisé $(\Omega, \mathcal{A}, \mathcal{P})$ suit la **loi de Poisson de paramètre** λ, et l'on note $X \sim \mathcal{P}(\lambda)$ (ou $X \hookrightarrow \mathcal{P}(\lambda)$) si :

Lois discrètes infinies 2) Loi de Poisson

Calcul :

Si Y suit une loi $\mathcal{B}(n, \lambda/n)$, on sait que

$$\mathbb{P}(Y=k) = \binom{n}{k}\left(\frac{\lambda}{n}\right)^k\left(1-\frac{\lambda}{n}\right)^{n-k} = \left(1-\frac{\lambda}{n}\right)^{n-k}\frac{\lambda^k}{k!}\,\frac{n(n-1)\cdots(n-k+1)}{n^k}$$
$$= \left(1-\frac{\lambda}{n}\right)^{n}\frac{\lambda^k}{k!}\left(1-\frac{\lambda}{n}\right)^{-k}\left[\frac{n}{n}\times\frac{n-1}{n}\times\cdots\times\frac{n-k+1}{n}\right].$$

Chaque terme du produit entre crochets tend vers 1 lorsque n tend vers l'infini. Il y a k termes, c'est-à-dire un nombre fini ne dépendant pas de n donc le crochet tend vers 1. Pour la même raison, $\left(1-\frac{\lambda}{n}\right)^{-k}$ tend vers 1. De plus,

$$\left(1-\frac{\lambda}{n}\right)^{n} = \mathrm{e}^{n\ln\left(1-\frac{\lambda}{n}\right)} \quad \text{et} \quad \ln\left(1-\frac{\lambda}{n}\right) \underset{n\to\infty}{\sim} -\frac{\lambda}{n}$$

donc $\left(1-\frac{\lambda}{n}\right)^{n}$ tend vers $\mathrm{e}^{-\lambda}$. On en conclut que $\mathbb{P}(Y=k)$ tend vers $\mathrm{e}^{-\lambda}\lambda^k/k!$.

Définition 7

Soit λ un réel strictement positif. On dit qu'une variable aléatoire sur un espace probabilisé $(\Omega, \mathcal{A}, \mathcal{P})$ suit la **loi de Poisson de paramètre** λ, et l'on note $X \sim \mathcal{P}(\lambda)$ (ou $X \hookrightarrow \mathcal{P}(\lambda)$) si :

- $X(\Omega) = \mathbb{N}$;

Lois discrètes infinies 2) Loi de Poisson

Calcul :

Si Y suit une loi $\mathcal{B}(n, \lambda/n)$, on sait que

$$\mathbb{P}(Y=k) = \binom{n}{k}\left(\frac{\lambda}{n}\right)^k\left(1-\frac{\lambda}{n}\right)^{n-k} = \left(1-\frac{\lambda}{n}\right)^{n-k}\frac{\lambda^k}{k!}\,\frac{n(n-1)\cdots(n-k+1)}{n^k}$$
$$= \left(1-\frac{\lambda}{n}\right)^{n}\frac{\lambda^k}{k!}\left(1-\frac{\lambda}{n}\right)^{-k}\left[\frac{n}{n}\times\frac{n-1}{n}\times\cdots\times\frac{n-k+1}{n}\right].$$

Chaque terme du produit entre crochets tend vers 1 lorsque n tend vers l'infini. Il y a k termes, c'est-à-dire un nombre fini ne dépendant pas de n donc le crochet tend vers 1. Pour la même raison, $\left(1-\frac{\lambda}{n}\right)^{-k}$ tend vers 1. De plus,

$$\left(1-\frac{\lambda}{n}\right)^{n} = \mathrm{e}^{n\ln\left(1-\frac{\lambda}{n}\right)} \quad \text{et} \quad \ln\left(1-\frac{\lambda}{n}\right) \underset{n\to\infty}{\sim} -\frac{\lambda}{n}$$

donc $\left(1-\frac{\lambda}{n}\right)^{n}$ tend vers $\mathrm{e}^{-\lambda}$. On en conclut que $\mathbb{P}(Y=k)$ tend vers $\mathrm{e}^{-\lambda}\lambda^k/k!$.

Définition 7

Soit λ un réel strictement positif. On dit qu'une variable aléatoire sur un espace probabilisé $(\Omega, \mathcal{A}, \mathcal{P})$ suit la **loi de Poisson de paramètre** λ, et l'on note $X \sim \mathcal{P}(\lambda)$ (ou $X \hookrightarrow \mathcal{P}(\lambda)$) si :

- $X(\Omega) = \mathbb{N}$;
- $\forall\, n \in \mathbb{N},\ \mathbb{P}(X=n) = \dfrac{\mathrm{e}^{-\lambda}\lambda^n}{n!}$.

COUPLES DE VARIABLES ALÉATOIRES DISCRÈTES

Définitions

Proposition 5: (et définition 8)

Soit $(\Omega, \mathcal{A}, \mathcal{P})$, un espace probabilisé et E un ensemble.
Soient X et Y deux variables aléatoires discrètes sur Ω à valeurs dans E. Alors l'application :

$$\begin{aligned} Z : \Omega &\longrightarrow E^2 \\ \omega &\longmapsto (X(\omega), Y(\omega)) \end{aligned}$$

est une variable aléatoire discrète.

Définitions

Proposition 5: (et définition 8)

Soit $(\Omega, \mathcal{A}, \mathcal{P})$, un espace probabilisé et E un ensemble.
Soient X et Y deux variables aléatoires discrètes sur Ω à valeurs dans E. Alors l'application :

$$\begin{aligned} Z : \Omega &\longrightarrow E^2 \\ \omega &\longmapsto (X(\omega), Y(\omega)) \end{aligned}$$

est une variable aléatoire discrète.

On dit que le couple (X, Y) est un **couple de variables aléatoires discrètes**.

Définitions

Proposition 5: (et définition 8)

Soit $(\Omega, \mathcal{A}, \mathcal{P})$, un espace probabilisé et E un ensemble.
Soient X et Y deux variables aléatoires discrètes sur Ω à valeurs dans E. Alors l'application :

$$\begin{aligned} Z : \Omega &\longrightarrow E^2 \\ \omega &\longmapsto (X(\omega), Y(\omega)) \end{aligned}$$

est une variable aléatoire discrète.

On dit que le couple (X, Y) est un **couple de variables aléatoires discrètes**.

Démonstration

Supposons que X et Y sont des variables aléatoires discrètes. Alors $X(\Omega)$ et $Y(\Omega)$ sont au plus dénombrables ; il en est donc de même du produit $X(\Omega) \times Y(\Omega)$, donc de $Z(\Omega)$ qui en est une partie.

Définitions

Proposition 5: (et définition 8)

Soit $(\Omega, \mathcal{A}, \mathcal{P})$, un espace probabilisé et E un ensemble.
Soient X et Y deux variables aléatoires discrètes sur Ω à valeurs dans E. Alors l'application :

$$\begin{aligned} Z : \Omega &\longrightarrow E^2 \\ \omega &\longmapsto (X(\omega), Y(\omega)) \end{aligned}$$

est une variable aléatoire discrète.

On dit que le couple (X, Y) est un **couple de variables aléatoires discrètes**.

Démonstration

Supposons que X et Y sont des variables aléatoires discrètes. Alors $X(\Omega)$ et $Y(\Omega)$ sont au plus dénombrables ; il en est donc de même du produit $X(\Omega) \times Y(\Omega)$, donc de $Z(\Omega)$ qui en est une partie.
Ensuite, pour tout $(x, y) \in \mathbb{Z}(\Omega)$:

$$Z^{-1}(\{(x, y)\}) = \{\omega \in \Omega \text{ tq } (x, y) = Z(\omega) = (X(\omega), Y(\omega))\}$$

Définitions

Proposition 5: (et définition 8)

Soit $(\Omega, \mathcal{A}, \mathcal{P})$, un espace probabilisé et E un ensemble.
Soient X et Y deux variables aléatoires discrètes sur Ω à valeurs dans E. Alors l'application :

$$\begin{aligned} Z : \Omega &\longrightarrow E^2 \\ \omega &\longmapsto (X(\omega), Y(\omega)) \end{aligned}$$

est une variable aléatoire discrète.

On dit que le couple (X, Y) est un **couple de variables aléatoires discrètes**.

Démonstration

Supposons que X et Y sont des variables aléatoires discrètes. Alors $X(\Omega)$ et $Y(\Omega)$ sont au plus dénombrables ; il en est donc de même du produit $X(\Omega) \times Y(\Omega)$, donc de $Z(\Omega)$ qui en est une partie.
Ensuite, pour tout $(x, y) \in \mathbb{Z}(\Omega)$:

$$\begin{aligned} Z^{-1}(\{(x, y)\}) &= \{\omega \in \Omega \text{ tq } (x, y) = Z(\omega) = (X(\omega), Y(\omega))\} \\ &= \{\omega \in \Omega \text{ tq } X(\omega) = x \text{ et } Y(\omega) = y\} = X^{-1}(\{x\}) \cap Y^{-1}(\{y\}) \end{aligned}$$

Définitions

Proposition 5: (et définition 8)

Soit $(\Omega, \mathcal{A}, \mathcal{P})$, un espace probabilisé et E un ensemble.
Soient X et Y deux variables aléatoires discrètes sur Ω à valeurs dans E. Alors l'application :

$$\begin{aligned} Z : \Omega &\longrightarrow E^2 \\ \omega &\longmapsto (X(\omega), Y(\omega)) \end{aligned}$$

est une variable aléatoire discrète.

On dit que le couple (X, Y) est un **couple de variables aléatoires discrètes**.

Démonstration

Supposons que X et Y sont des variables aléatoires discrètes. Alors $X(\Omega)$ et $Y(\Omega)$ sont au plus dénombrables ; il en est donc de même du produit $X(\Omega) \times Y(\Omega)$, donc de $Z(\Omega)$ qui en est une partie.
Ensuite, pour tout $(x, y) \in \mathbb{Z}(\Omega)$:

$$\begin{aligned} Z^{-1}(\{(x, y)\}) &= \{\omega \in \Omega \text{ tq } (x, y) = Z(\omega) = (X(\omega), Y(\omega))\} \\ &= \{\omega \in \Omega \text{ tq } X(\omega) = x \text{ et } Y(\omega) = y\} = X^{-1}(\{x\}) \cap Y^{-1}(\{y\}) \end{aligned}$$

donc $Z^{-1}(\{(x, y)\}) \in \mathcal{A}$ puisque par hypothèse $X^{-1}(\{x\})$ et $Y^{-1}(\{y\})$ sont dans $\mathcal{A}$.

Définition 9

On appelle **loi du couple de variables aléatoires discrètes** (X, Y), ou encore **loi conjointe des variables aléatoires** X **et** Y la donnée l'ensemble des couples $\big((x_i, y_j), p_{i,j}\big)$ où

$$x_i \in X(\Omega) \quad , \quad y_j \in Y(\Omega) \quad \text{et} \quad p_{i,j} = \mathbb{P}\Big((X = x_i) \cap (Y = y_j)\Big) = \mathbb{P}\Big((X, Y) = (x_i, y_j)\Big).$$

Définition 9

On appelle **loi du couple de variables aléatoires discrètes** (X, Y), ou encore **loi conjointe des variables aléatoires** X **et** Y la donnée l'ensemble des couples $\big((x_i, y_j), p_{i,j}\big)$ où

$$x_i \in X(\Omega) \quad , \quad y_j \in Y(\Omega) \quad \text{et} \quad p_{i,j} = \mathbb{P}\Big((X = x_i) \cap (Y = y_j)\Big) = \mathbb{P}\Big((X, Y) = (x_i, y_j)\Big).$$

Les lois de X et Y s'appellent les **lois marginales** du couple X et Y.

Définition 9

On appelle **loi du couple de variables aléatoires discrètes** (X, Y), ou encore **loi conjointe des variables aléatoires** X **et** Y la donnée l'ensemble des couples $\big((x_i, y_j), p_{i,j}\big)$ où

$$x_i \in X(\Omega) \quad , \quad y_j \in Y(\Omega) \quad \text{et} \quad p_{i,j} = \mathbb{P}\big((X = x_i) \cap (Y = y_j)\big) = \mathbb{P}\big((X, Y) = (x_i, y_j)\big).$$

Les lois de X et Y s'appellent les **lois marginales** du couple X et Y.

Proposition 6: Lien entre lois conjointes et lois marginales

Soit $(\Omega, \mathcal{A}, \mathcal{P})$, un espace probabilisé et (X, Y) un couple de variables aléatoires discrètes sur Ω. Notons $X(\Omega) = \{x_i,\ i \in I\}$ et $Y(\Omega) = \big\{y_j,\ j \in J\big\}$ où I, J sont deux parties de $\mathbb{N}$. Alors

$$\forall\, i \in I,\ \mathbb{P}(X = x_i) = \sum_{j \in J} \mathbb{P}\big((X = x_i) \cap (Y = y_j)\big) = \sum_{j \in J} p_{i,j}$$

$$\forall\, j \in J,\ \mathbb{P}(Y = y_j) = \sum_{i \in I} \mathbb{P}\big((Y = y_j) \cap (X = x_i)\big) = \sum_{i \in I} p_{i,j}\,.$$

Définition 9

On appelle **loi du couple de variables aléatoires discrètes** (X, Y), ou encore **loi conjointe des variables aléatoires** X **et** Y la donnée l'ensemble des couples $\big((x_i, y_j), p_{i,j}\big)$ où

$$x_i \in X(\Omega) \quad , \quad y_j \in Y(\Omega) \quad \text{et} \quad p_{i,j} = \mathbb{P}\Big((X = x_i) \cap (Y = y_j)\Big) = \mathbb{P}\Big((X, Y) = (x_i, y_j)\Big).$$

Les lois de X et Y s'appellent les **lois marginales** du couple X et Y.

Proposition 6: Lien entre lois conjointes et lois marginales

Soit $(\Omega, \mathcal{A}, \mathcal{P})$, un espace probabilisé et (X, Y) un couple de variables aléatoires discrètes sur Ω. Notons $X(\Omega) = \{x_i,\ i \in I\}$ et $Y(\Omega) = \big\{y_j,\ j \in J\big\}$ où I, J sont deux parties de $\mathbb{N}$. Alors

$$\forall\, i \in I,\ \mathbb{P}(X = x_i) = \sum_{j \in J} \mathbb{P}\Big((X = x_i) \cap (Y = y_j)\Big) = \sum_{j \in J} p_{i,j}$$

$$\forall\, j \in J,\ \mathbb{P}(Y = y_j) = \sum_{i \in I} \mathbb{P}\Big((Y = y_j) \cap (X = x_i)\Big) = \sum_{i \in I} p_{i,j}\,.$$

Démonstration

Formule des probabilités totales appliqué au système complet d'évènements $(Y = y_j)_{j \in J}$.

Définition 9

On appelle **loi du couple de variables aléatoires discrètes** (X, Y), ou encore **loi conjointe des variables aléatoires** X **et** Y la donnée l'ensemble des couples $\big((x_i, y_j), p_{i,j}\big)$ où

$$x_i \in X(\Omega) \quad , \quad y_j \in Y(\Omega) \quad \text{et} \quad p_{i,j} = \mathbb{P}\Big((X = x_i) \cap (Y = y_j)\Big) = \mathbb{P}\Big((X, Y) = (x_i, y_j)\Big).$$

Les lois de X et Y s'appellent les **lois marginales** du couple X et Y.

Proposition 6: Lien entre lois conjointes et lois marginales

Soit $(\Omega, \mathcal{A}, \mathcal{P})$, un espace probabilisé et (X, Y) un couple de variables aléatoires discrètes sur Ω. Notons $X(\Omega) = \{x_i,\ i \in I\}$ et $Y(\Omega) = \left\{y_j,\ j \in J\right\}$ où I, J sont deux parties de $\mathbb{N}$. Alors

$$\forall\, i \in I,\ \mathbb{P}(X = x_i) = \sum_{j \in J} \mathbb{P}\Big((X = x_i) \cap (Y = y_j)\Big) = \sum_{j \in J} p_{i,j}$$

$$\forall\, j \in J,\ \mathbb{P}(Y = y_j) = \sum_{i \in I} \mathbb{P}\Big((Y = y_j) \cap (X = x_i)\Big) = \sum_{i \in I} p_{i,j}\,.$$

D'après le théorème de Fubini, la proposition 6 implique que la suite double $(p_{i,j})_{(i,j) \in I \times J}$ est sommable et :

$$\sum_{i \in I, j \in J} p_{i,j} = \sum_{i \in I} \left(\sum_{j \in J} p_{i,j} \right) = \sum_{j \in J} \left(\sum_{i \in I} p_{i,j} \right) = 1.$$

Définition 10

Soit $(\Omega, \mathcal{A}, \mathcal{P})$, un espace probabilisé et (X, Y) un couple de variables aléatoires discrètes sur Ω. Notons $X(\Omega) = \{x_i,\ i \in I\}$ et $Y(\Omega) = \left\{y_j,\ j \in J\right\}$ où I, J sont deux parties de $\mathbb{N}$.

Définition 10

Soit $(\Omega, \mathcal{A}, \mathcal{P})$, un espace probabilisé et (X, Y) un couple de variables aléatoires discrètes sur Ω. Notons $X(\Omega) = \{x_i,\ i \in I\}$ et $Y(\Omega) = \left\{y_j,\ j \in J\right\}$ où I, J sont deux parties de $\mathbb{N}$.

- Pour tout indice $j \in J$ tel que $\mathbb{P}(Y = y_j)$ soit non nul, on appelle **loi conditionnelle de X sachant** $(Y = y_j)$ l'application de $X(\Omega)$ dans $[0\,;1]$ définie par la relation

$$x_i \longmapsto \mathbb{P}_{(Y=y_j)}(X = x_i) = \mathbb{P}\Big((X = x_i) \mid (Y = y_j)\Big) = \frac{\mathbb{P}\Big((X = x_i) \cap (Y = y_j)\Big)}{\mathbb{P}(Y = y_j)}.$$

Définition 10

Soit $(\Omega, \mathcal{A}, \mathcal{P})$, un espace probabilisé et (X, Y) un couple de variables aléatoires discrètes sur Ω. Notons $X(\Omega) = \{x_i,\ i \in I\}$ et $Y(\Omega) = \left\{y_j,\ j \in J\right\}$ où I, J sont deux parties de $\mathbb{N}$.

- Pour tout indice $j \in J$ tel que $\mathbb{P}(Y = y_j)$ soit non nul, on appelle **loi conditionnelle de X sachant** $(Y = y_j)$ l'application de $X(\Omega)$ dans $[0\,;1]$ définie par la relation

$$x_i \longmapsto \mathbb{P}_{(Y=y_j)}(X = x_i) = \mathbb{P}\Big((X = x_i) \mid (Y = y_j)\Big) = \frac{\mathbb{P}\Big((X = x_i) \cap (Y = y_j)\Big)}{\mathbb{P}(Y = y_j)}.$$

- Pour tout indice $i \in I$ tel que $\mathbb{P}(X = x_i)$ soit non nul, on appelle **loi conditionnelle de Y sachant** $(X = x_i)$ l'application de $Y(\Omega)$ dans $[0\,;1]$ définie par la relation

$$y_j \longmapsto \mathbb{P}_{(X=x_i)}(Y = y_j) = \mathbb{P}\Big((Y = y_j) \mid (X = x_i)\Big) = \frac{\mathbb{P}\Big((X = x_i) \cap (Y = y_j)\Big)}{\mathbb{P}(X = x_i)}.$$

Définition 10

Soit $(\Omega, \mathcal{A}, \mathcal{P})$, un espace probabilisé et (X, Y) un couple de variables aléatoires discrètes sur Ω. Notons $X(\Omega) = \{x_i,\ i \in I\}$ et $Y(\Omega) = \left\{y_j,\ j \in J\right\}$ où I, J sont deux parties de $\mathbb{N}$.

- Pour tout indice $j \in J$ tel que $\mathbb{P}(Y = y_j)$ soit non nul, on appelle **loi conditionnelle de X sachant $(Y = y_j)$** l'application de $X(\Omega)$ dans $[0\,;1]$ définie par la relation

$$x_i \longmapsto \mathbb{P}_{(Y=y_j)}(X = x_i) = \mathbb{P}\Big((X = x_i) \mid (Y = y_j)\Big) = \frac{\mathbb{P}\Big((X = x_i) \cap (Y = y_j)\Big)}{\mathbb{P}(Y = y_j)}.$$

- Pour tout indice $i \in I$ tel que $\mathbb{P}(X = x_i)$ soit non nul, on appelle **loi conditionnelle de Y sachant $(X = x_i)$** l'application de $Y(\Omega)$ dans $[0\,;1]$ définie par la relation

$$y_j \longmapsto \mathbb{P}_{(X=x_i)}(Y = y_j) = \mathbb{P}\Big((Y = y_j) \mid (X = x_i)\Big) = \frac{\mathbb{P}\Big((X = x_i) \cap (Y = y_j)\Big)}{\mathbb{P}(X = x_i)}.$$

Il est important de bien savoir jongler entre loi du couple, loi marginale et loi conditionnelle. Il s'agit en fait uniquement d'appliquer la définition des probabilités conditionnelles ou alors d'appliquer la formule des probabilités totales. Cela est résumé dans la proposition suivante.

Proposition 7

- Loi conditionnelle à partir de la loi du couple :

$$\mathbb{P}_{(X=x_i)}(Y=y_j)=\frac{\mathbb{P}\Big((X=x_i)\cap(Y=y_j)\Big)}{\mathbb{P}(X=x_i)}$$

$$\mathbb{P}_{(Y=y_j)}(X=x_i)=\frac{\mathbb{P}\Big((X=x_i)\cap(Y=y_j)\Big)}{\mathbb{P}(Y=y_j)}$$

Proposition 7

- Loi conditionnelle à partir de la loi du couple :

$$\mathbb{P}_{(X=x_i)}(Y=y_j) = \frac{\mathbb{P}\big((X=x_i)\cap(Y=y_j)\big)}{\mathbb{P}(X=x_i)}$$

$$\mathbb{P}_{(Y=y_j)}(X=x_i) = \frac{\mathbb{P}\big((X=x_i)\cap(Y=y_j)\big)}{\mathbb{P}(Y=y_j)}$$

- Loi du couple à partir de la loi conditionnelle :

$$\mathbb{P}\big((X=x_i)\cap(Y=y_j)\big) = \mathbb{P}(X=x_i)\mathbb{P}_{(X=x_i)}(Y=y_j)$$

$$\mathbb{P}\big((X=x_i)\cap(Y=y_j)\big) = \mathbb{P}(Y=y_j)\mathbb{P}_{(Y=y_j)}(X=x_i)$$

Proposition 7

- Loi conditionnelle à partir de la loi du couple :

$$\mathbb{P}_{(X=x_i)}(Y = y_j) = \frac{\mathbb{P}\Big((X = x_i) \cap (Y = y_j)\Big)}{\mathbb{P}(X = x_i)}$$

$$\mathbb{P}_{(Y=y_j)}(X = x_i) = \frac{\mathbb{P}\Big((X = x_i) \cap (Y = y_j)\Big)}{\mathbb{P}(Y = y_j)}$$

- Loi du couple à partir de la loi conditionnelle :

$$\mathbb{P}\Big((X = x_i) \cap (Y = y_j)\Big) = \mathbb{P}(X = x_i)\mathbb{P}_{(X=x_i)}(Y = y_j)$$

$$\mathbb{P}\Big((X = x_i) \cap (Y = y_j)\Big) = \mathbb{P}(Y = y_j)\mathbb{P}_{(Y=y_j)}(X = x_i)$$

- Lois marginales à partir de la loi du couple :

$$\mathbb{P}(X = x_i) = \sum_{j \in J} \mathbb{P}\Big((X = x_i) \cap (Y = y_j)\Big)$$

$$\mathbb{P}(Y = y_j) = \sum_{i \in I} \mathbb{P}\Big((X = x_i) \cap (Y = y_j)\Big)$$

Proposition 7

- Loi conditionnelle à partir de la loi du couple :

$$\mathbb{P}_{(X=x_i)}(Y=y_j) = \frac{\mathbb{P}\Big((X=x_i)\cap(Y=y_j)\Big)}{\mathbb{P}(X=x_i)}$$

$$\mathbb{P}_{(Y=y_j)}(X=x_i) = \frac{\mathbb{P}\Big((X=x_i)\cap(Y=y_j)\Big)}{\mathbb{P}(Y=y_j)}$$

- Loi du couple à partir de la loi conditionnelle :

$$\mathbb{P}\Big((X=x_i)\cap(Y=y_j)\Big) = \mathbb{P}(X=x_i)\mathbb{P}_{(X=x_i)}(Y=y_j)$$

$$\mathbb{P}\Big((X=x_i)\cap(Y=y_j)\Big) = \mathbb{P}(Y=y_j)\mathbb{P}_{(Y=y_j)}(X=x_i)$$

- Lois marginales à partir de la loi du couple :

$$\mathbb{P}(X=x_i) = \sum_{j\in J}\mathbb{P}\Big((X=x_i)\cap(Y=y_j)\Big)$$

$$\mathbb{P}(Y=y_j) = \sum_{i\in I}\mathbb{P}\Big((X=x_i)\cap(Y=y_j)\Big)$$

- Lois marginales à partir des lois conditionnelles :

$$\mathbb{P}(X=x_i) = \sum_{j\in J}\mathbb{P}(Y=y_j)P_{(Y=y_j)}(X=x_i)$$

$$\mathbb{P}(Y=y_j) = \sum_{i\in I}\mathbb{P}(X=x_i)P_{(X=x_i)}(Y=y_j)$$

Exemple 1

On réalise une suite de lancers indépendants d'une pièce ayant la probabilité $p \in]0\,;1[$ de tomber côté Pile. On note X la longueur de la première série de lancers identiques et Y la longueur de la seconde série. Par exemple, les successions de lancers PPFFFP... et FFPPPF... correspondent à $X = 2$ et $Y = 3$.

Déterminer la loi conjointe du couple (X, Y) et en déduire les lois de X et de Y.

Exemple 1

On réalise une suite de lancers indépendants d'une pièce ayant la probabilité $p \in]0\,;1[$ de tomber côté Pile. On note X la longueur de la première série de lancers identiques et Y la longueur de la seconde série. Par exemple, les successions de lancers PPFFFP... et FFPPPF... correspondent à $X = 2$ et $Y = 3$.

Déterminer la loi conjointe du couple (X, Y) et en déduire les lois de X et de Y.

Solution

Comme d'habitude, on peut considérer que X et Y prennent leurs valeurs dans $\mathbb{N}^*$, les évènements $(X = +\infty)$ et $(Y = +\infty)$ étant quasi impossibles.

Exemple 1

On réalise une suite de lancers indépendants d'une pièce ayant la probabilité $p \in]0\,;1[$ de tomber côté Pile. On note X la longueur de la première série de lancers identiques et Y la longueur de la seconde série. Par exemple, les successions de lancers PPFFFP... et FFPPPF... correspondent à $X = 2$ et $Y = 3$.

Déterminer la loi conjointe du couple (X, Y) et en déduire les lois de X et de Y.

Solution

Comme d'habitude, on peut considérer que X et Y prennent leurs valeurs dans $\mathbb{N}^*$, les évènements $(X = +\infty)$ et $(Y = +\infty)$ étant quasi impossibles.

On a alors, pour $(k, \ell) \in \mathbb{N}^{*2}$:

$$\mathbb{P}\Big((X = k) \cap (Y = \ell)\Big) = p^k (1-p)^\ell p + (1-p)^k p^\ell (1-p)$$

(à expliquer...)

Exemple 1

On réalise une suite de lancers indépendants d'une pièce ayant la probabilité $p \in]0\,;1[$ de tomber côté Pile. On note X la longueur de la première série de lancers identiques et Y la longueur de la seconde série. Par exemple, les successions de lancers PPFFFP... et FFPPPF... correspondent à $X = 2$ et $Y = 3$.

Déterminer la loi conjointe du couple (X, Y) et en déduire les lois de X et de Y.

Solution

Comme d'habitude, on peut considérer que X et Y prennent leurs valeurs dans $\mathbb{N}^*$, les évènements $(X = +\infty)$ et $(Y = +\infty)$ étant quasi impossibles.

On a alors, pour $(k, \ell) \in {\mathbb{N}^*}^2$:

$$\mathbb{P}\Big((X = k) \cap (Y = \ell)\Big) = p^k(1-p)^\ell p + (1-p)^k p^\ell (1-p)$$

(à expliquer...) d'où l'on tire après calcul (sommes de séries géométriques) :

$$\mathbb{P}(X = k) = \sum_{\ell=1}^{+\infty} \mathbb{P}\Big((X = k) \cap (Y = \ell)\Big) = (1-p)p^k + p(1-p)^k$$

Exemple 1

On réalise une suite de lancers indépendants d'une pièce ayant la probabilité $p \in]0\,;1[$ de tomber côté Pile. On note X la longueur de la première série de lancers identiques et Y la longueur de la seconde série. Par exemple, les successions de lancers PPFFFP... et FFPPPF... correspondent à $X = 2$ et $Y = 3$.

Déterminer la loi conjointe du couple (X, Y) et en déduire les lois de X et de Y.

Solution

Comme d'habitude, on peut considérer que X et Y prennent leurs valeurs dans $\mathbb{N}^*$, les évènements $(X = +\infty)$ et $(Y = +\infty)$ étant quasi impossibles.

On a alors, pour $(k, \ell) \in \mathbb{N}^{*2}$:

$$\mathbb{P}\Big((X = k) \cap (Y = \ell)\Big) = p^k (1-p)^\ell p + (1-p)^k p^\ell (1-p)$$

(à expliquer...) d'où l'on tire après calcul (sommes de séries géométriques) :

$$\mathbb{P}(X = k) = \sum_{\ell=1}^{+\infty} \mathbb{P}\Big((X = k) \cap (Y = \ell)\Big) = (1-p)p^k + p(1-p)^k$$

et

$$\mathbb{P}(Y = \ell) = \sum_{k=1}^{+\infty} \mathbb{P}\Big((X = k) \cap (Y = \ell)\Big) = p^2(1-p)^{\ell-1} + (1-p)^2 p^{\ell-1}.$$

Exemple 2

Le nombre X de voitures (ou de motos !) se présentant à une barrière de péage en 1h suit une loi de Poisson de paramètre $\lambda > 0$.
Cette barrière comporte N postes de péage. Chaque véhicule arrivant se présente à un péage choisi au hasard. On note Y le nombre de véhicules se présentant au poste n°1.
Quelle est la loi de Y ?

Exemple 2

Le nombre X de voitures (ou de motos !) se présentant à une barrière de péage en 1h suit une loi de Poisson de paramètre $\lambda > 0$.
Cette barrière comporte N postes de péage. Chaque véhicule arrivant se présente à un péage choisi au hasard. On note Y le nombre de véhicules se présentant au poste n°1.
Quelle est la loi de Y ?

Solution

X et Y sont des variables aléatoires à valeurs dans $\mathbb{N}$.

Exemple 2

Le nombre X de voitures (ou de motos !) se présentant à une barrière de péage en 1h suit une loi de Poisson de paramètre $\lambda > 0$.
Cette barrière comporte N postes de péage. Chaque véhicule arrivant se présente à un péage choisi au hasard. On note Y le nombre de véhicules se présentant au poste n°1.
Quelle est la loi de Y ?

Solution

X et Y sont des variables aléatoires à valeurs dans $\mathbb{N}$.
Par hypothèse, la loi de Y conditionnée par $(X = n)$ est la loi binomiale $\mathcal{B}(n, \frac{1}{N})$:

Exemple 2

Le nombre X de voitures (ou de motos !) se présentant à une barrière de péage en 1h suit une loi de Poisson de paramètre $\lambda > 0$.
Cette barrière comporte N postes de péage. Chaque véhicule arrivant se présente à un péage choisi au hasard. On note Y le nombre de véhicules se présentant au poste n°1.
Quelle est la loi de Y ?

Solution

X et Y sont des variables aléatoires à valeurs dans $\mathbb{N}$.
Par hypothèse, la loi de Y conditionnée par $(X = n)$ est la loi binomiale $\mathcal{B}(n, \frac{1}{N})$:

$$\forall\, n \in \mathbb{N},\ \forall\, k \in [\![0\,;n]\!],\ \mathbb{P}((Y = k) \mid (X = n)) = \binom{n}{k}\frac{1}{N^k}\left(1 - \frac{1}{N}\right)^{n-k}.$$

Exemple 2

Le nombre X de voitures (ou de motos !) se présentant à une barrière de péage en 1h suit une loi de Poisson de paramètre $\lambda > 0$.
Cette barrière comporte N postes de péage. Chaque véhicule arrivant se présente à un péage choisi au hasard. On note Y le nombre de véhicules se présentant au poste n°1.
Quelle est la loi de Y ?

Solution

X et Y sont des variables aléatoires à valeurs dans $\mathbb{N}$.
Par hypothèse, la loi de Y conditionnée par $(X = n)$ est la loi binomiale $\mathcal{B}(n, \frac{1}{N})$:

$$\forall\, n \in \mathbb{N},\ \forall\, k \in [\![0\,;n]\!],\ \mathbb{P}((Y = k) \mid (X = n)) = \binom{n}{k}\frac{1}{N^k}\left(1 - \frac{1}{N}\right)^{n-k}.$$

On en déduit la loi du couple (X, Y) : pour tout $(n, k) \in \mathbb{N}^2$:

$$\mathbb{P}((X = n) \cap (Y = k)) = \begin{cases} \mathbb{P}((Y = k) \mid (X = n))\mathbb{P}(X = n) = \binom{n}{k}\frac{1}{N^k}\left(1 - \frac{1}{N}\right)^{n-k} \mathrm{e}^{-\lambda}\frac{\lambda^n}{n!} & \text{si } k \leqslant n \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}.$$

Exemple 2

Le nombre X de voitures (ou de motos !) se présentant à une barrière de péage en 1h suit une loi de Poisson de paramètre $\lambda > 0$.
Cette barrière comporte N postes de péage. Chaque véhicule arrivant se présente à un péage choisi au hasard. On note Y le nombre de véhicules se présentant au poste n°1.
Quelle est la loi de Y ?

Solution

X et Y sont des variables aléatoires à valeurs dans $\mathbb{N}$.
Par hypothèse, la loi de Y conditionnée par $(X = n)$ est la loi binomiale $\mathcal{B}(n, \frac{1}{N})$:

$$\forall\, n \in \mathbb{N},\ \forall\, k \in [\![0\,;n]\!],\ \mathbb{P}((Y = k) \mid (X = n)) = \binom{n}{k}\frac{1}{N^k}\left(1 - \frac{1}{N}\right)^{n-k}.$$

On en déduit la loi du couple (X, Y) : pour tout $(n, k) \in \mathbb{N}^2$:

$$\mathbb{P}((X = n) \cap (Y = k)) = \begin{cases} \mathbb{P}((Y = k) \mid (X = n))\mathbb{P}(X = n) = \dbinom{n}{k}\dfrac{1}{N^k}\left(1 - \dfrac{1}{N}\right)^{n-k} \mathrm{e}^{-\lambda}\dfrac{\lambda^n}{n!} & \text{si } k \leqslant n \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}.$$

Rem : Compte tenu de la convention $\dbinom{n}{k} = 0$ si $k > n$, la 1ère expression suffit.

Solution (suite)

La loi de Y s'obtient alors en sommant (les séries écrites sont forcément convergentes) :

$$\forall\, k \in \mathbb{N},\ \mathbb{P}(Y = k) = \sum_{n=0}^{+\infty} \mathbb{P}((X = n) \cap (Y = k))$$

Solution (suite)

La loi de Y s'obtient alors en sommant (les séries écrites sont forcément convergentes) :

$$\forall\, k \in \mathbb{N},\ \mathbb{P}(Y=k) = \sum_{n=0}^{+\infty} \mathbb{P}((X=n)\cap(Y=k)) = \sum_{n=k}^{+\infty} \binom{n}{k}\frac{1}{N^k}\left(1-\frac{1}{N}\right)^{n-k} \mathrm{e}^{-\lambda}\frac{\lambda^n}{n!}$$

Solution (suite)

La loi de Y s'obtient alors en sommant (les séries écrites sont forcément convergentes) :

$$\forall k \in \mathbb{N},\ \mathbb{P}(Y=k) = \sum_{n=0}^{+\infty} \mathbb{P}((X=n)\cap(Y=k)) = \sum_{n=k}^{+\infty} \binom{n}{k} \frac{1}{N^k}\left(1-\frac{1}{N}\right)^{n-k} \mathrm{e}^{-\lambda}\frac{\lambda^n}{n!}$$

$$= \mathrm{e}^{-\lambda}\left(\frac{\lambda}{N}\right)^k \frac{1}{k!}\sum_{n=k}^{+\infty}\frac{1}{(n-k)!}\left(\lambda\left(1-\frac{1}{N}\right)\right)^{n-k}$$

Solution (suite)

La loi de Y s'obtient alors en sommant (les séries écrites sont forcément convergentes) :

$$\forall\, k \in \mathbb{N},\ \mathbb{P}(Y=k) = \sum_{n=0}^{+\infty} \mathbb{P}((X=n)\cap(Y=k)) = \sum_{n=k}^{+\infty} \binom{n}{k} \frac{1}{N^k}\left(1-\frac{1}{N}\right)^{n-k} \mathrm{e}^{-\lambda}\frac{\lambda^n}{n!}$$

$$= \mathrm{e}^{-\lambda}\left(\frac{\lambda}{N}\right)^k \frac{1}{k!} \sum_{n=k}^{+\infty} \frac{1}{(n-k)!}\left(\lambda\left(1-\frac{1}{N}\right)\right)^{n-k}$$

$$= \mathrm{e}^{-\lambda}\left(\frac{\lambda}{N}\right)^k \frac{1}{k!} \sum_{i=0}^{+\infty} \frac{1}{i!}\left(\lambda\left(1-\frac{1}{N}\right)\right)^{i}$$

Solution (suite)

La loi de Y s'obtient alors en sommant (les séries écrites sont forcément convergentes) :

$$\begin{aligned}\forall\, k \in \mathbb{N},\ \mathbb{P}(Y=k) &= \sum_{n=0}^{+\infty} \mathbb{P}((X=n)\cap(Y=k)) = \sum_{n=k}^{+\infty} \binom{n}{k} \frac{1}{N^k}\left(1-\frac{1}{N}\right)^{n-k} \mathrm{e}^{-\lambda}\frac{\lambda^n}{n!} \\ &= \mathrm{e}^{-\lambda}\left(\frac{\lambda}{N}\right)^k \frac{1}{k!}\sum_{n=k}^{+\infty}\frac{1}{(n-k)!}\left(\lambda\left(1-\frac{1}{N}\right)\right)^{n-k} \\ &= \mathrm{e}^{-\lambda}\left(\frac{\lambda}{N}\right)^k \frac{1}{k!}\sum_{i=0}^{+\infty}\frac{1}{i!}\left(\lambda\left(1-\frac{1}{N}\right)\right)^{i} \\ &= \frac{1}{k!}\mathrm{e}^{-\lambda}\left(\frac{\lambda}{N}\right)^k \mathrm{e}^{\lambda\left(1-\frac{1}{N}\right)} = \frac{1}{k!}\mathrm{e}^{-\frac{\lambda}{N}}\left(\frac{\lambda}{N}\right)^k\end{aligned}$$

Solution (suite)

La loi de Y s'obtient alors en sommant (les séries écrites sont forcément convergentes) :

$$\begin{aligned}\forall\, k \in \mathbb{N},\ \mathbb{P}(Y=k) = \sum_{n=0}^{+\infty} \mathbb{P}((X=n)\cap(Y=k)) &= \sum_{n=k}^{+\infty} \binom{n}{k} \frac{1}{N^k}\left(1-\frac{1}{N}\right)^{n-k} \mathrm{e}^{-\lambda}\frac{\lambda^n}{n!} \\ &= \mathrm{e}^{-\lambda}\left(\frac{\lambda}{N}\right)^k \frac{1}{k!}\sum_{n=k}^{+\infty}\frac{1}{(n-k)!}\left(\lambda\left(1-\frac{1}{N}\right)\right)^{n-k} \\ &= \mathrm{e}^{-\lambda}\left(\frac{\lambda}{N}\right)^k \frac{1}{k!}\sum_{i=0}^{+\infty}\frac{1}{i!}\left(\lambda\left(1-\frac{1}{N}\right)\right)^{i} \\ &= \frac{1}{k!}\mathrm{e}^{-\lambda}\left(\frac{\lambda}{N}\right)^k \mathrm{e}^{\lambda\left(1-\frac{1}{N}\right)} = \frac{1}{k!}\mathrm{e}^{-\frac{\lambda}{N}}\left(\frac{\lambda}{N}\right)^k\end{aligned}$$

donc Y suit une loi de Poisson de paramètre $\dfrac{\lambda}{N}$.

Solution (suite)

La loi de Y s'obtient alors en sommant (les séries écrites sont forcément convergentes) :

$$\forall\, k \in \mathbb{N},\ \mathbb{P}(Y = k) = \sum_{n=0}^{+\infty} \mathbb{P}((X = n) \cap (Y = k)) = \sum_{n=k}^{+\infty} \binom{n}{k} \frac{1}{N^k} \left(1 - \frac{1}{N}\right)^{n-k} \mathrm{e}^{-\lambda} \frac{\lambda^n}{n!}$$

$$= \mathrm{e}^{-\lambda} \left(\frac{\lambda}{N}\right)^k \frac{1}{k!} \sum_{n=k}^{+\infty} \frac{1}{(n-k)!} \left(\lambda\left(1 - \frac{1}{N}\right)\right)^{n-k}$$

$$= \mathrm{e}^{-\lambda} \left(\frac{\lambda}{N}\right)^k \frac{1}{k!} \sum_{i=0}^{+\infty} \frac{1}{i!} \left(\lambda\left(1 - \frac{1}{N}\right)\right)^{i}$$

$$= \frac{1}{k!} \mathrm{e}^{-\lambda} \left(\frac{\lambda}{N}\right)^k \mathrm{e}^{\lambda\left(1 - \frac{1}{N}\right)} = \frac{1}{k!} \mathrm{e}^{-\frac{\lambda}{N}} \left(\frac{\lambda}{N}\right)^k$$

donc Y suit une loi de Poisson de paramètre $\dfrac{\lambda}{N}$.(ce résultat est tout à fait cohérent ! Pourquoi ?)

Solution (suite)

La loi de Y s'obtient alors en sommant (les séries écrites sont forcément convergentes) :

$$\begin{aligned}
\forall\, k \in \mathbb{N},\ \mathbb{P}(Y=k) &= \sum_{n=0}^{+\infty} \mathbb{P}((X=n)\cap(Y=k)) = \sum_{n=k}^{+\infty} \binom{n}{k} \frac{1}{N^k}\left(1-\frac{1}{N}\right)^{n-k} \mathrm{e}^{-\lambda}\frac{\lambda^n}{n!} \\
&= \mathrm{e}^{-\lambda}\left(\frac{\lambda}{N}\right)^k \frac{1}{k!} \sum_{n=k}^{+\infty} \frac{1}{(n-k)!}\left(\lambda\left(1-\frac{1}{N}\right)\right)^{n-k} \\
&= \mathrm{e}^{-\lambda}\left(\frac{\lambda}{N}\right)^k \frac{1}{k!} \sum_{i=0}^{+\infty} \frac{1}{i!}\left(\lambda\left(1-\frac{1}{N}\right)\right)^{i} \\
&= \frac{1}{k!}\mathrm{e}^{-\lambda}\left(\frac{\lambda}{N}\right)^k \mathrm{e}^{\lambda\left(1-\frac{1}{N}\right)} = \frac{1}{k!}\mathrm{e}^{-\frac{\lambda}{N}}\left(\frac{\lambda}{N}\right)^k
\end{aligned}$$

donc Y suit une loi de Poisson de paramètre $\dfrac{\lambda}{N}$.(ce résultat est tout à fait cohérent ! Pourquoi ?)

Extension :

Si $X_1, \ldots, X_n$ sont n variables aléatoires discrètes définies sur un espace probabilisé $(\Omega, \mathcal{A}, \mathcal{P})$ à valeurs dans un ensemble E, on peut considérer de la même façon l'application $(X_1, \ldots, X_n)$ de Ω dans E^n qui à tout $\omega \in \Omega$ associe le n-uplet $\big(X_1(\omega), \ldots, X_n(\omega)\big)$.

Ce n-uplet s'appelle un ***n*-uplet de variables aléatoires discrètes** ou, parfois, un **vecteur aléatoire**.

Indépendance de deux variables aléatoires

Définition 11

Soit (X, Y) un couple aléatoire discret défini sur un espace probabilisé $(\Omega, \mathcal{A}, \mathcal{P})$. Notons $X(\Omega) = \{x_i,\ i \in I\}$ et $Y(\Omega) = \left\{y_j,\ j \in J\right\}$ où I, J sont deux parties de $\mathbb{N}$.
On dit que les variables X et Y sont **indépendantes** si

$$\forall\, i \in I, \forall\, j \in J,\ \mathbb{P}\Big((X = x_i) \cap (Y = y_j)\Big) = \mathbb{P}(X = x_i)\mathbb{P}(Y = y_j).$$

On note alors $X \perp\!\!\!\perp Y$.

Indépendance de deux variables aléatoires

Définition 11

Soit (X, Y) un couple aléatoire discret défini sur un espace probabilisé $(\Omega, \mathcal{A}, \mathcal{P})$. Notons $X(\Omega) = \{x_i,\ i \in I\}$ et $Y(\Omega) = \left\{y_j,\ j \in J\right\}$ où I, J sont deux parties de $\mathbb{N}$.
On dit que les variables X et Y sont **indépendantes** si

$$\forall\, i \in I, \forall\, j \in J,\ \mathbb{P}\Big((X = x_i) \cap (Y = y_j)\Big) = \mathbb{P}(X = x_i)\mathbb{P}(Y = y_j).$$

On note alors $X \perp\!\!\!\perp Y$.

Exemple 1

Une urne contient a boules noires et b boules blanches. On tire deux fois une boule et on note X_i la variable qui vaut 1 si la boule tirée au i-ème tirage est blanche et 0 sinon.
Étudier l'indépendance de X_1 et de X_2 si le tirage se fait avec remise puis dans le cas où le tirage se fait sans remise.

Indépendance de deux variables aléatoires

Définition 11

Soit (X, Y) un couple aléatoire discret défini sur un espace probabilisé $(\Omega, \mathcal{A}, \mathcal{P})$. Notons $X(\Omega) = \{x_i,\ i \in I\}$ et $Y(\Omega) = \left\{y_j,\ j \in J\right\}$ où I, J sont deux parties de $\mathbb{N}$.
On dit que les variables X et Y sont **indépendantes** si

$$\forall\, i \in I, \forall\, j \in J,\ \mathbb{P}\Big((X = x_i) \cap (Y = y_j)\Big) = \mathbb{P}(X = x_i)\mathbb{P}(Y = y_j).$$

On note alors $X \perp\!\!\!\perp Y$.

Exemple 1

Une urne contient a boules noires et b boules blanches. On tire deux fois une boule et on note X_i la variable qui vaut 1 si la boule tirée au i-ème tirage est blanche et 0 sinon.
Étudier l'indépendance de X_1 et de X_2 si le tirage se fait avec remise puis dans le cas où le tirage se fait sans remise.

Solution

- tirage avec remise : $\mathbb{P}(X_1 = 1) = \frac{b}{a+b}$ et $\mathbb{P}(X_2 = 1) = \frac{b}{a+b}$ et $\mathbb{P}(X_1 = 1, X_2 = 1) = (\frac{b}{a+b})^2$ et de même pour les autres donc X_1 et X_2 sont indépendants.

Indépendance de deux variables aléatoires

Définition 11

Soit (X, Y) un couple aléatoire discret défini sur un espace probabilisé $(\Omega, \mathcal{A}, \mathcal{P})$. Notons $X(\Omega) = \{x_i,\ i \in I\}$ et $Y(\Omega) = \left\{y_j,\ j \in J\right\}$ où I, J sont deux parties de $\mathbb{N}$.
On dit que les variables X et Y sont **indépendantes** si

$$\forall\, i \in I,\ \forall\, j \in J,\ \mathbb{P}\Big((X = x_i) \cap (Y = y_j)\Big) = \mathbb{P}(X = x_i)\mathbb{P}(Y = y_j).$$

On note alors $X \perp\!\!\!\perp Y$.

Exemple 1

Une urne contient a boules noires et b boules blanches. On tire deux fois une boule et on note X_i la variable qui vaut 1 si la boule tirée au i-ème tirage est blanche et 0 sinon.
Étudier l'indépendance de X_1 et de X_2 si le tirage se fait avec remise puis dans le cas où le tirage se fait sans remise.

Solution

- tirage avec remise : $\mathbb{P}(X_1 = 1) = \frac{b}{a+b}$ et $\mathbb{P}(X_2 = 1) = \frac{b}{a+b}$ et $\mathbb{P}(X_1 = 1, X_2 = 1) = (\frac{b}{a+b})^2$ et de même pour les autres donc X_1 et X_2 sont indépendants.
- tirage sans remise : $\mathbb{P}(X_1 = 1) = \frac{b}{a+b}$ et $\mathbb{P}(X_2 = 1) = \frac{b(b-1)+ab}{(a+b)(a+b-1)} = \frac{b}{a+b}$ et $\mathbb{P}(X_1 = 1, X_2 = 1) = \frac{b(b-1)}{(a+b)(a+b-1)}$ donc X_1 et X_2 ne sont pas indépendants.

Exemple 2

Étudier l'indépendance des lois X et Y connaissant la loi du couple (X, Y) dans les cas suivants :

- $p_{ij} = \dfrac{1}{e^2} \frac{1}{i!j!}$ pour tous entiers $i, j \in \mathbb{N}$.
- $p_{ij} = \dfrac{1}{2e^2} \frac{i+j}{i!j!}$ pour tous entiers $i, j \in \mathbb{N}$.

Exemple 2

Étudier l'indépendance des lois X et Y connaissant la loi du couple (X,Y) dans les cas suivants :

- $p_{ij} = \dfrac{1}{e^2}\frac{1}{i!j!}$ pour tous entiers $i,j \in \mathbb{N}$.
- $p_{ij} = \dfrac{1}{2e^2}\frac{i+j}{i!j!}$ pour tous entiers $i,j \in \mathbb{N}$.

Solution

Dans le premier cas il y a indépendance, $p_{ij} = p_i p_j$.

Exemple 2

Étudier l'indépendance des lois X et Y connaissant la loi du couple (X, Y) dans les cas suivants :

- $p_{ij} = \dfrac{1}{e^2} \frac{1}{i!j!}$ pour tous entiers $i, j \in \mathbb{N}$.
- $p_{ij} = \dfrac{1}{2e^2} \frac{i+j}{i!j!}$ pour tous entiers $i, j \in \mathbb{N}$.

Solution

Dans le premier cas il y a indépendance, $p_{ij} = p_i p_j$.

Dans le second cas, il n'y a pas indépendance $p_i = \dfrac{i+1}{2i!e}$ et $p_j = \dfrac{j+1}{2j!e}$.

Théorème 4

Deux variables aléatoires discrètes X et Y sont indépendantes si et seulement si :

$$\forall A \subset X(\Omega),\ \forall B \subset Y(\Omega),\ \mathbb{P}\Big((X \in A) \cap (Y \in B)\Big) = \mathbb{P}(X \in A) \times \mathbb{P}(Y \in B)\,.$$

Théorème 4

Deux variables aléatoires discrètes X et Y sont indépendantes si et seulement si :

$$\forall A \subset X(\Omega),\ \forall B \subset Y(\Omega),\ \mathbb{P}\Big((X \in A) \cap (Y \in B)\Big) = \mathbb{P}(X \in A) \times \mathbb{P}(Y \in B)\,.$$

Démonstration

Supposons X et Y indépendantes (la réciproque est immédiate). Alors si A et B sont des parties comme dans l'énoncé elles sont au plus dénombrables.

Théorème 4

Deux variables aléatoires discrètes X et Y sont indépendantes si et seulement si :

$$\forall A \subset X(\Omega),\ \forall B \subset Y(\Omega),\ \mathbb{P}\Big((X \in A) \cap (Y \in B)\Big) = \mathbb{P}(X \in A) \times \mathbb{P}(Y \in B)\,.$$

Démonstration

Supposons X et Y indépendantes (la réciproque est immédiate). Alors si A et B sont des parties comme dans l'énoncé elles sont au plus dénombrables. On peut donc écrire

$$A = \{x_i,\ i \in I\} \quad , \quad B = \left\{y_j,\ j \in J\right\} \quad \text{avec } I, J \subset \mathbb{N}.$$

où les x_i sont distincts, ainsi que les y_j.

Théorème 4

Deux variables aléatoires discrètes X et Y sont indépendantes si et seulement si :

$$\forall A \subset X(\Omega),\ \forall B \subset Y(\Omega),\ \mathbb{P}\Big((X \in A) \cap (Y \in B)\Big) = \mathbb{P}(X \in A) \times \mathbb{P}(Y \in B).$$

Démonstration

Supposons X et Y indépendantes (la réciproque est immédiate). Alors si A et B sont des parties comme dans l'énoncé elles sont au plus dénombrables. On peut donc écrire

$$A = \{x_i,\ i \in I\} \quad , \quad B = \left\{y_j,\ j \in J\right\} \quad \text{avec } I, J \subset \mathbb{N}.$$

où les x_i sont distincts, ainsi que les y_j. On aura alors :

$$\mathbb{P}((X \in A) \cap (Y \in B)) = \mathbb{P}\left(\bigsqcup_{i \in I} \bigsqcup_{j \in J} (X = x_i) \cap (Y = y_j)\right)$$

Théorème 4

Deux variables aléatoires discrètes X et Y sont indépendantes si et seulement si :

$$\forall A \subset X(\Omega),\ \forall B \subset Y(\Omega),\ \mathbb{P}\Big((X \in A) \cap (Y \in B)\Big) = \mathbb{P}(X \in A) \times \mathbb{P}(Y \in B)\,.$$

Démonstration

Supposons X et Y indépendantes (la réciproque est immédiate). Alors si A et B sont des parties comme dans l'énoncé elles sont au plus dénombrables. On peut donc écrire

$$A = \{x_i,\ i \in I\} \quad , \quad B = \left\{y_j,\ j \in J\right\} \quad \text{avec } I, J \subset \mathbb{N}.$$

où les x_i sont distincts, ainsi que les y_j. On aura alors :

$$\mathbb{P}((X \in A) \cap (Y \in B)) = \mathbb{P}\left(\bigsqcup_{i \in I} \bigsqcup_{j \in J} (X = x_i) \cap (Y = y_j)\right) = \sum_{i \in I} \sum_{j \in J} \mathbb{P}((X = x_i) \cap (Y = y_j)) \quad \text{par } \sigma - \text{additivité}$$

Théorème 4

Deux variables aléatoires discrètes X et Y sont indépendantes si et seulement si :

$$\forall A \subset X(\Omega),\ \forall B \subset Y(\Omega),\ \mathbb{P}\big((X \in A) \cap (Y \in B)\big) = \mathbb{P}(X \in A) \times \mathbb{P}(Y \in B).$$

Démonstration

Supposons X et Y indépendantes (la réciproque est immédiate). Alors si A et B sont des parties comme dans l'énoncé elles sont au plus dénombrables. On peut donc écrire

$$A = \{x_i,\ i \in I\} \quad , \quad B = \left\{y_j,\ j \in J\right\} \quad \text{avec } I, J \subset \mathbb{N}.$$

où les x_i sont distincts, ainsi que les y_j. On aura alors :

$$\begin{aligned}\mathbb{P}((X \in A) \cap (Y \in B)) &= \mathbb{P}\left(\bigsqcup_{i \in I} \bigsqcup_{j \in J} (X = x_i) \cap (Y = y_j)\right) = \sum_{i \in I} \sum_{j \in J} \mathbb{P}((X = x_i) \cap (Y = y_j)) \quad \text{par } \sigma-\text{additivité} \\ &= \sum_{i \in I} \sum_{j \in J} \mathbb{P}(X = x_i)\mathbb{P}(Y = y_j) \qquad \text{par indépendance}\end{aligned}$$

Théorème 4

Deux variables aléatoires discrètes X et Y sont indépendantes si et seulement si :

$$\forall A \subset X(\Omega),\ \forall B \subset Y(\Omega),\ \mathbb{P}\Big((X \in A) \cap (Y \in B)\Big) = \mathbb{P}(X \in A) \times \mathbb{P}(Y \in B)\,.$$

Démonstration

Supposons X et Y indépendantes (la réciproque est immédiate). Alors si A et B sont des parties comme dans l'énoncé elles sont au plus dénombrables. On peut donc écrire

$$A = \{x_i,\ i \in I\} \quad , \quad B = \left\{y_j,\ j \in J\right\} \quad \text{avec } I, J \subset \mathbb{N}.$$

où les x_i sont distincts, ainsi que les y_j. On aura alors :

$$\begin{aligned}\mathbb{P}((X \in A) \cap (Y \in B)) &= \mathbb{P}\left(\bigsqcup_{i\in I}\bigsqcup_{j\in J}(X = x_i) \cap (Y = y_j)\right) = \sum_{i\in I}\sum_{j\in J}\mathbb{P}((X = x_i) \cap (Y = y_j)) \quad \text{par } \sigma-\text{additivité}\\ &= \sum_{i\in I}\sum_{j\in J}\mathbb{P}(X = x_i)\mathbb{P}(Y = y_j) \qquad \text{par indépendance}\\ &= \left(\sum_{i\in I}\mathbb{P}(X = x_i)\right)\left(\sum_{j\in J}\mathbb{P}(Y = y_j)\right) \qquad \text{cas particulier du théorème de Fubini}\end{aligned}$$

Théorème 4

Deux variables aléatoires discrètes X et Y sont indépendantes si et seulement si :

$$\forall A \subset X(\Omega),\ \forall B \subset Y(\Omega),\ \mathbb{P}\Big((X \in A) \cap (Y \in B)\Big) = \mathbb{P}(X \in A) \times \mathbb{P}(Y \in B)\,.$$

Démonstration

Supposons X et Y indépendantes (la réciproque est immédiate). Alors si A et B sont des parties comme dans l'énoncé elles sont au plus dénombrables. On peut donc écrire

$$A = \{x_i,\ i \in I\} \quad , \quad B = \left\{y_j,\ j \in J\right\} \quad \text{avec } I, J \subset \mathbb{N}.$$

où les x_i sont distincts, ainsi que les y_j. On aura alors :

$$\begin{aligned}
\mathbb{P}((X \in A) \cap (Y \in B)) &= \mathbb{P}\left(\bigsqcup_{i \in I} \bigsqcup_{j \in J} (X = x_i) \cap (Y = y_j)\right) = \sum_{i \in I} \sum_{j \in J} \mathbb{P}((X = x_i) \cap (Y = y_j)) \quad \text{par } \sigma - \text{additivité} \\
&= \sum_{i \in I} \sum_{j \in J} \mathbb{P}(X = x_i)\mathbb{P}(Y = y_j) \qquad \text{par indépendance} \\
&= \left(\sum_{i \in I} \mathbb{P}(X = x_i)\right)\left(\sum_{j \in J} \mathbb{P}(Y = y_j)\right) \qquad \text{cas particulier du théorème de Fubini} \\
&= \mathbb{P}(X \in A) \times \mathbb{P}(Y \in B)\,.
\end{aligned}$$

Cela démontre $X \perp\!\!\!\perp Y$.

Théorème 5: Fonction de deux variables aléatoires indépendantes

Soient X et Y deux variables aléatoires discrètes un espace probabilisé $(\Omega, \mathcal{A}, \mathcal{P})$, indépendantes.
Soient f et g deux applications définies sur $X(\Omega)$ et $Y(\Omega)$ respectivement. Alors les variables aléatoires $f(X)$ et $g(Y)$ sont indépendantes.

(En abrégé : $X \perp\!\!\!\perp Y \Longrightarrow f(X) \perp\!\!\!\perp f(Y)$.)

Théorème 5: Fonction de deux variables aléatoires indépendantes

Soient X et Y deux variables aléatoires discrètes un espace probabilisé $(\Omega, \mathcal{A}, \mathcal{P})$, indépendantes.
Soient f et g deux applications définies sur $X(\Omega)$ et $Y(\Omega)$ respectivement. Alors les variables aléatoires $f(X)$ et $g(Y)$ sont indépendantes.

(En abrégé : $X \perp\!\!\!\perp Y \Longrightarrow f(X) \perp\!\!\!\perp f(Y)$.)

Démonstration

On utilise le th. précédent. Soient $A \subset f(X(\Omega))$ et $B \subset g(Y(\Omega))$. On a :

Théorème 5: Fonction de deux variables aléatoires indépendantes

Soient X et Y deux variables aléatoires discrètes un espace probabilisé $(\Omega, \mathcal{A}, \mathcal{P})$, indépendantes.
Soient f et g deux applications définies sur $X(\Omega)$ et $Y(\Omega)$ respectivement. Alors les variables aléatoires $f(X)$ et $g(Y)$ sont indépendantes.

(En abrégé : $X \perp\!\!\!\perp Y \Longrightarrow f(X) \perp\!\!\!\perp f(Y)$.)

Démonstration

On utilise le th. précédent. Soient $A \subset f(X(\Omega))$ et $B \subset g(Y(\Omega))$. On a :

$$\mathbb{P}((f(X) \in A) \cap (g(Y) \in B)) = \mathbb{P}((X \in f^{-1}(A)) \cap (Y \in g^{-1}(B)))$$

Théorème 5: Fonction de deux variables aléatoires indépendantes

Soient X et Y deux variables aléatoires discrètes un espace probabilisé $(\Omega, \mathcal{A}, \mathcal{P})$, indépendantes.
Soient f et g deux applications définies sur $X(\Omega)$ et $Y(\Omega)$ respectivement. Alors les variables aléatoires $f(X)$ et $g(Y)$ sont indépendantes.

(En abrégé : $X \perp\!\!\!\perp Y \Longrightarrow f(X) \perp\!\!\!\perp f(Y)$.)

Démonstration

On utilise le th. précédent. Soient $A \subset f(X(\Omega))$ et $B \subset g(Y(\Omega))$. On a :

$$\begin{aligned}\mathbb{P}((f(X) \in A) \cap (g(Y) \in B)) &= \mathbb{P}((X \in f^{-1}(A)) \cap (Y \in g^{-1}(B))) \\ &= \mathbb{P}(X \in f^{-1}(A))\mathbb{P}(Y \in g^{-1}(B)) \qquad \text{car } X, Y \text{ indépendantes}\end{aligned}$$

Théorème 5: Fonction de deux variables aléatoires indépendantes

Soient X et Y deux variables aléatoires discrètes un espace probabilisé $(\Omega, \mathcal{A}, \mathcal{P})$, indépendantes.
Soient f et g deux applications définies sur $X(\Omega)$ et $Y(\Omega)$ respectivement. Alors les variables aléatoires $f(X)$ et $g(Y)$ sont indépendantes.

(En abrégé : $X \perp\!\!\!\perp Y \Longrightarrow f(X) \perp\!\!\!\perp f(Y)$.)

Démonstration

On utilise le th. précédent. Soient $A \subset f(X(\Omega))$ et $B \subset g(Y(\Omega))$. On a :

$$\begin{aligned}
\mathbb{P}((f(X) \in A) \cap (g(Y) \in B)) &= \mathbb{P}((X \in f^{-1}(A)) \cap (Y \in g^{-1}(B))) \\
&= \mathbb{P}(X \in f^{-1}(A))\mathbb{P}(Y \in g^{-1}(B)) \qquad \text{car } X, Y \text{ indépendantes} \\
&= \mathbb{P}(f(X) \in A)\mathbb{P}(g(Y) \in B)).
\end{aligned}$$

Théorème 5: Fonction de deux variables aléatoires indépendantes

Soient X et Y deux variables aléatoires discrètes un espace probabilisé $(\Omega, \mathcal{A}, \mathcal{P})$, indépendantes.
Soient f et g deux applications définies sur $X(\Omega)$ et $Y(\Omega)$ respectivement. Alors les variables aléatoires $f(X)$ et $g(Y)$ sont indépendantes.

(En abrégé : $X \perp\!\!\!\perp Y \Longrightarrow f(X) \perp\!\!\!\perp f(Y)$.)

Démonstration

On utilise le th. précédent. Soient $A \subset f(X(\Omega))$ et $B \subset g(Y(\Omega))$. On a :

$$\begin{aligned}
\mathbb{P}((f(X) \in A) \cap (g(Y) \in B)) &= \mathbb{P}((X \in f^{-1}(A)) \cap (Y \in g^{-1}(B))) \\
&= \mathbb{P}(X \in f^{-1}(A))\mathbb{P}(Y \in g^{-1}(B)) \qquad \text{car } X, Y \text{ indépendantes} \\
&= \mathbb{P}(f(X) \in A)\mathbb{P}(g(Y) \in B)).
\end{aligned}$$

On a donc bien $f(X) \perp\!\!\!\perp g(Y)$.

Indépendance de n variables aléatoires

Définition 12

Soient $X_1, \dots, X_n$ n variables aléatoires discrètes ($n \geqslant 2$) définies un espace probabilisé $(\Omega, \mathcal{A}, \mathcal{P})$, à valeurs dans un ensemble E.
On dit que les variables $X_1, \dots, X_n$ sont **mutuellement indépendantes** (ou tout simplement **indépendantes**) lorsque pour tout $(x_1, \dots, x_n) \in X_1(\Omega) \times \cdots \times X_n(\Omega)$:

$$\mathbb{P}\Big((X_1 = x_1) \cap \cdots \cap (X_n = x_n)\Big) = \mathbb{P}(X_1 = x_1) \times \cdots \times \mathbb{P}(X_n = x_n)$$

Indépendance de n variables aléatoires

Définition 12

Soient $X_1, \ldots, X_n$ n variables aléatoires discrètes ($n \geqslant 2$) définies un espace probabilisé $(\Omega, \mathcal{A}, \mathcal{P})$, à valeurs dans un ensemble E.
On dit que les variables $X_1, \ldots, X_n$ sont **mutuellement indépendantes** (ou tout simplement **indépendantes**) lorsque pour tout $(x_1, \ldots, x_n) \in X_1(\Omega) \times \cdots \times X_n(\Omega)$:

$$\mathbb{P}\big((X_1 = x_1) \cap \cdots \cap (X_n = x_n)\big) = \mathbb{P}(X_1 = x_1) \times \cdots \times \mathbb{P}(X_n = x_n)$$

Comme dans le cas de deux variables aléatoires (voir théorème 4), on démontre le résultat suivant :

Indépendance de n variables aléatoires

Définition 12

Soient $X_1, ..., X_n$ n variables aléatoires discrètes ($n \geqslant 2$) définies un espace probabilisé $(\Omega, \mathcal{A}, \mathcal{P})$, à valeurs dans un ensemble E.
On dit que les variables $X_1, ..., X_n$ sont **mutuellement indépendantes** (ou tout simplement **indépendantes**) lorsque pour tout $(x_1, ..., x_n) \in X_1(\Omega) \times \cdots \times X_n(\Omega)$:

$$\mathbb{P}\Big((X_1 = x_1) \cap \cdots \cap (X_n = x_n)\Big) = \mathbb{P}(X_1 = x_1) \times \cdots \times \mathbb{P}(X_n = x_n)$$

Comme dans le cas de deux variables aléatoires (voir théorème 4), on démontre le résultat suivant :

Proposition 8

Soient $X_1, ..., X_n$ n variables aléatoires discrètes sur un espace probabilisé $(\Omega, \mathcal{A}, \mathcal{P})$.
Alors pour tous sous-ensembles $A_1 \subset X_1(\Omega), \ldots, A_n \subset X_n(\Omega)$ on a :

$$P\left(\bigcap_{i=1}^{n}(X_i \in A_i)\right) = \prod_{i=1}^{n} \mathbb{P}(X_i \in A_i).$$

Corollaire:

L'indépendance de n variables aléatoires $X_1, \ldots, X_n$ entraîne l'indépendance de k quelconques d'entre elles (et donc en particulier l'indépendance deux à deux).

Corollaire:

> L'indépendance de n variables aléatoires $X_1, \dots, X_n$ entraîne l'indépendance de k quelconques d'entre elles (et donc en particulier l'indépendance deux à deux).

Démonstration

Supposons $X_1, \dots, X_n$ indépendantes. On veut démontrer l'indépendance de $X_1, \dots, X_k$.

Corollaire:

> L'indépendance de n variables aléatoires $X_1, \ldots, X_n$ entraîne l'indépendance de k quelconques d'entre elles (et donc en particulier l'indépendance deux à deux).

Démonstration

Supposons $X_1, \ldots, X_n$ indépendantes. On veut démontrer l'indépendance de $X_1, \ldots, X_k$.
On vient de voir que pour tous sous-ensembles $A_1 \subset X_1(\Omega), \ldots, A_n \subset X_n(\Omega)$ on a :

$$\mathbb{P}\left(\bigcap_{i=1}^{n}(X_i \in A_i)\right) = \prod_{i=1}^{n} \mathbb{P}(X_i \in A_i).$$

Corollaire:

> L'indépendance de n variables aléatoires $X_1, \dots, X_n$ entraîne l'indépendance de k quelconques d'entre elles (et donc en particulier l'indépendance deux à deux).

Démonstration

Supposons $X_1, \dots, X_n$ indépendantes. On veut démontrer l'indépendance de $X_1, \dots, X_k$.
On vient de voir que pour tous sous-ensembles $A_1 \subset X_1(\Omega), \dots, A_n \subset X_n(\Omega)$ on a :

$$\mathbb{P}\left(\bigcap_{i=1}^{n}(X_i \in A_i)\right) = \prod_{i=1}^{n} \mathbb{P}(X_i \in A_i).$$

Il suffit alors dans cette relation de prendre pour $A_1, \dots, A_k$ un singleton puis $A_i = X_i(\Omega)$ pour $i \geqslant k+1$ pour retrouver la définition de l'indépendance pour $(X_1, \dots, X_k)$.

Théorème 6: Lemme des coalitions

Soient $X_1, \cdots, X_n$ n variables aléatoires discrètes (mutuellement) indépendantes et soit $k \in [\![2\,;n-1]\!]$. Alors toute variable aléatoire fonction des variables $X_1, \cdots, X_k$ est indépendante de toute variable aléatoire fonction des variables $X_{k+1}, \ldots, X_n$.

Théorème 6: Lemme des coalitions

Soient $X_1, \cdots, X_n$ n variables aléatoires discrètes (mutuellement) indépendantes et soit $k \in [\![2\,;n-1]\!]$. Alors toute variable aléatoire fonction des variables $X_1, \cdots, X_k$ est indépendante de toute variable aléatoire fonction des variables $X_{k+1}, \ldots, X_n$.

Démonstration

On considère les deux vecteurs aléatoires : $Y = (X_1, \cdots, X_k)$ et $Z = (X_{k+1}, \cdots, X_n)$.
Montrons que Y et Z sont indépendantes.

Théorème 6: Lemme des coalitions

Soient $X_1, \cdots, X_n$ n variables aléatoires discrètes (mutuellement) indépendantes et soit $k \in [\![2\,;n-1]\!]$. Alors toute variable aléatoire fonction des variables $X_1, \cdots, X_k$ est indépendante de toute variable aléatoire fonction des variables $X_{k+1}, \ldots, X_n$.

Démonstration

On considère les deux vecteurs aléatoires : $Y = (X_1, \cdots, X_k) \quad \text{et} \quad Z = (X_{k+1}, \cdots, X_n)$.
Montrons que Y et Z sont indépendantes.
Soient $y = (x_1, \ldots, x_k) \in Y(\Omega)$ et $z = (x_{k+1}, \ldots, x_n) \in Z(\Omega)$. Alors :

$$(Y = y) = \bigcap_{i=1}^{k} (X_i = x_i) \quad \text{et} \quad (Z = z) = \bigcap_{i=k+1}^{n} (X_i = x_i)$$

Théorème 6: Lemme des coalitions

Soient $X_1, \cdots, X_n$ n variables aléatoires discrètes (mutuellement) indépendantes et soit $k \in [\![2\,;n-1]\!]$. Alors toute variable aléatoire fonction des variables $X_1, \cdots, X_k$ est indépendante de toute variable aléatoire fonction des variables $X_{k+1}, \ldots, X_n$.

Démonstration

On considère les deux vecteurs aléatoires : $Y = (X_1, \cdots, X_k)$ et $Z = (X_{k+1}, \cdots, X_n)$.
Montrons que Y et Z sont indépendantes.
Soient $y = (x_1, \ldots, x_k) \in Y(\Omega)$ et $z = (x_{k+1}, \ldots, x_n) \in Z(\Omega)$. Alors :

$$(Y = y) = \bigcap_{i=1}^{k} (X_i = x_i) \quad \text{et} \quad (Z = z) = \bigcap_{i=k+1}^{n} (X_i = x_i)$$

donc

$$\mathbb{P}\big((Y = y) \cap (Z = z)\big) = \mathbb{P}\left(\bigcap_{i=1}^{n} (X_i = x_i)\right) = \prod_{i=1}^{n} \mathbb{P}(X_i = x_i)$$

par indépendance des X_i.

Théorème 6: Lemme des coalitions

Soient $X_1, \cdots, X_n$ n variables aléatoires discrètes (mutuellement) indépendantes et soit $k \in [\![2\,;n-1]\!]$. Alors toute variable aléatoire fonction des variables $X_1, \cdots, X_k$ est indépendante de toute variable aléatoire fonction des variables $X_{k+1}, \ldots, X_n$.

Démonstration

On considère les deux vecteurs aléatoires : $Y = (X_1, \cdots, X_k)$ et $Z = (X_{k+1}, \cdots, X_n)$.
Montrons que Y et Z sont indépendantes.
Soient $y = (x_1, \ldots, x_k) \in Y(\Omega)$ et $z = (x_{k+1}, \ldots, x_n) \in Z(\Omega)$. Alors :

$$(Y = y) = \bigcap_{i=1}^{k} (X_i = x_i) \quad \text{et} \quad (Z = z) = \bigcap_{i=k+1}^{n} (X_i = x_i)$$

donc

$$\mathbb{P}\Big((Y = y) \cap (Z = z)\Big) = \mathbb{P}\left(\bigcap_{i=1}^{n} (X_i = x_i)\right) = \prod_{i=1}^{n} \mathbb{P}(X_i = x_i)$$

par indépendance des X_i. D'autre part, encore par indépendance des X_i :

$$\mathbb{P}(Y = y) = \mathbb{P}\left(\bigcap_{i=1}^{k} (X_i = x_i)\right) = \prod_{i=1}^{k} \mathbb{P}(X_i = x_i) \quad \text{et, de même,} \quad \mathbb{P}(Z = z) = \prod_{i=k+1}^{n} \mathbb{P}(X_i = x_i)$$

Théorème 6: Lemme des coalitions

Soient $X_1, \cdots, X_n$ n variables aléatoires discrètes (mutuellement) indépendantes et soit $k \in [\![2\,;n-1]\!]$. Alors toute variable aléatoire fonction des variables $X_1, \cdots, X_k$ est indépendante de toute variable aléatoire fonction des variables $X_{k+1}, \dots, X_n$.

Démonstration

On considère les deux vecteurs aléatoires : $Y = (X_1, \cdots, X_k)$ et $Z = (X_{k+1}, \cdots, X_n)$.
Montrons que Y et Z sont indépendantes.
Soient $y = (x_1, \dots, x_k) \in Y(\Omega)$ et $z = (x_{k+1}, \dots, x_n) \in Z(\Omega)$. Alors :

$$(Y = y) = \bigcap_{i=1}^{k} (X_i = x_i) \quad \text{et} \quad (Z = z) = \bigcap_{i=k+1}^{n} (X_i = x_i)$$

donc

$$\mathbb{P}\big((Y = y) \cap (Z = z)\big) = \mathbb{P}\left(\bigcap_{i=1}^{n} (X_i = x_i)\right) = \prod_{i=1}^{n} \mathbb{P}(X_i = x_i)$$

par indépendance des X_i. D'autre part, encore par indépendance des X_i :

$$\mathbb{P}(Y = y) = \mathbb{P}\left(\bigcap_{i=1}^{k} (X_i = x_i)\right) = \prod_{i=1}^{k} \mathbb{P}(X_i = x_i) \quad \text{et, de même,} \quad \mathbb{P}(Z = z) = \prod_{i=k+1}^{n} \mathbb{P}(X_i = x_i)$$

donc on a bien $\mathbb{P}(Y = y, Z = z) = \mathbb{P}(Y = y)\mathbb{P}(Z = z)$, Y et Z sont indépendantes.

Théorème 6: Lemme des coalitions

Soient $X_1, \cdots, X_n$ n variables aléatoires discrètes (mutuellement) indépendantes et soit $k \in [\![2\,;n-1]\!]$. Alors toute variable aléatoire fonction des variables $X_1, \cdots, X_k$ est indépendante de toute variable aléatoire fonction des variables $X_{k+1}, \ldots, X_n$.

Démonstration

On considère les deux vecteurs aléatoires : $Y = (X_1, \cdots, X_k)$ et $Z = (X_{k+1}, \cdots, X_n)$.
Montrons que Y et Z sont indépendantes.
Soient $y = (x_1, \ldots, x_k) \in Y(\Omega)$ et $z = (x_{k+1}, \ldots, x_n) \in Z(\Omega)$. Alors :

$$(Y = y) = \bigcap_{i=1}^{k} (X_i = x_i) \quad \text{et} \quad (Z = z) = \bigcap_{i=k+1}^{n} (X_i = x_i)$$

donc

$$\mathbb{P}\Big((Y = y) \cap (Z = z)\Big) = \mathbb{P}\left(\bigcap_{i=1}^{n} (X_i = x_i)\right) = \prod_{i=1}^{n} \mathbb{P}(X_i = x_i)$$

par indépendance des X_i. D'autre part, encore par indépendance des X_i :

$$\mathbb{P}(Y = y) = \mathbb{P}\left(\bigcap_{i=1}^{k} (X_i = x_i)\right) = \prod_{i=1}^{k} \mathbb{P}(X_i = x_i) \quad \text{et, de même,} \quad \mathbb{P}(Z = z) = \prod_{i=k+1}^{n} \mathbb{P}(X_i = x_i)$$

donc on a bien $\mathbb{P}(Y = y, Z = z) = \mathbb{P}(Y = y)\mathbb{P}(Z = z)$, Y et Z sont indépendantes.
D'après le théorème 5, $Y \perp\!\!\!\perp Z \Longrightarrow f(Y) \perp\!\!\!\perp g(Z)$, cqfd.

Définition 13 Extension

Soit $(X_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ une suite de variables aléatoires discrètes définies un espace probabilisé $(\Omega, \mathcal{A}, \mathcal{P})$, à valeurs dans un ensemble E.
Ces variables aléatoires sont dites **indépendantes** si, pour toute partie finie $I \subset \mathbb{N}^*$, la famille $(X_i)_{i\in I}$ est une famille finie de variables aléatoires indépendantes.

Définition 13 Extension

Soit $(X_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ une suite de variables aléatoires discrètes définies un espace probabilisé $(\Omega, \mathcal{A}, \mathcal{P})$, à valeurs dans un ensemble E.
Ces variables aléatoires sont dites **indépendantes** si, pour toute partie finie $I \subset \mathbb{N}^*$, la famille $(X_i)_{i\in I}$ est une famille finie de variables aléatoires indépendantes.

Si, de plus, les X_n suivent la même loi, on parlera de **suite de variables aléatoires indépendantes identiquement distribuées**, en abrégé : « i.i.d ».

Loi d'une fonction de variables aléatoires

Proposition 9

Soit X et Y deux variables aléatoires discrètes et g une fonction quelconque définie sur $X(\Omega) \times Y(\Omega)$. Alors $Z = g(X, Y)$ est une variable aléatoire discrète.

Loi d'une fonction de variables aléatoires

Proposition 9

Soit X et Y deux variables aléatoires discrètes et g une fonction quelconque définie sur $X(\Omega) \times Y(\Omega)$. Alors $Z = g(X, Y)$ est une variable aléatoire discrète.

Démonstration

On applique la proposition 2 et la proposition 5 .

Loi d'une fonction de variables aléatoires

Proposition 9

Soit X et Y deux variables aléatoires discrètes et g une fonction quelconque définie sur $X(\Omega) \times Y(\Omega)$. Alors $Z = g(X, Y)$ est une variable aléatoire discrète.

Démonstration

On applique la proposition 2 et la proposition 5 .

Un cas particulier important de loi d'un couple de variables aléatoires est le cas de la somme, lorsque ces variables sont discrètes à valeurs complexes.

Loi d'une fonction de variables aléatoires

Proposition 9

Soit X et Y deux variables aléatoires discrètes et g une fonction quelconque définie sur $X(\Omega) \times Y(\Omega)$. Alors $Z = g(X, Y)$ est une variable aléatoire discrète.

Démonstration

On applique la proposition 2 et la proposition 5 .

Un cas particulier important de loi d'un couple de variables aléatoires est le cas de la somme, lorsque ces variables sont discrètes à valeurs complexes.

Soient donc $(\Omega, \mathcal{A}, \mathcal{P})$, un espace probabilisé et (X, Y) un couple de variables aléatoires discrètes sur Ω, à valeurs dans $\mathbb{R}$. Notons $X(\Omega) = \{x_i,\ i \in I\}$ et $Y(\Omega) = \left\{y_j,\ j \in J\right\}$ où I, J sont deux parties de $\mathbb{N}$.

Loi d'une fonction de variables aléatoires

Proposition 9

Soit X et Y deux variables aléatoires discrètes et g une fonction quelconque définie sur $X(\Omega) \times Y(\Omega)$. Alors $Z = g(X, Y)$ est une variable aléatoire discrète.

Démonstration

On applique la proposition 2 et la proposition 5 .

Un cas particulier important de loi d'un couple de variables aléatoires est le cas de la somme, lorsque ces variables sont discrètes à valeurs complexes.

Soient donc $(\Omega, \mathcal{A}, \mathcal{P})$, un espace probabilisé et (X, Y) un couple de variables aléatoires discrètes sur Ω, à valeurs dans $\mathbb{R}$. Notons $X(\Omega) = \{x_i,\ i \in I\}$ et $Y(\Omega) = \left\{y_j,\ j \in J\right\}$ où I, J sont deux parties de $\mathbb{N}$.

Soit $Z = X + Y$. On sait déjà que Z est une variable aléatoire discrète. Pour tout $z \in Z(\Omega)$, l'évènement $(Z = z)$ est la réunion disjointe et au plus dénombrable des évènements $((X = x_i) \cap (Y = y_j))$ pour tous les couples $(i, j) \in I \times J$ tels que $x_i + y_j = z$.

Loi d'une fonction de variables aléatoires

Proposition 9

Soit X et Y deux variables aléatoires discrètes et g une fonction quelconque définie sur $X(\Omega) \times Y(\Omega)$. Alors $Z = g(X, Y)$ est une variable aléatoire discrète.

Démonstration

On applique la proposition 2 et la proposition 5 .

Un cas particulier important de loi d'un couple de variables aléatoires est le cas de la somme, lorsque ces variables sont discrètes à valeurs complexes.

Soient donc $(\Omega, \mathcal{A}, \mathcal{P})$, un espace probabilisé et (X, Y) un couple de variables aléatoires discrètes sur Ω, à valeurs dans $\mathbb{R}$. Notons $X(\Omega) = \{x_i,\ i \in I\}$ et $Y(\Omega) = \left\{y_j,\ j \in J\right\}$ où I, J sont deux parties de $\mathbb{N}$.

Soit $Z = X + Y$. On sait déjà que Z est une variable aléatoire discrète. Pour tout $z \in Z(\Omega)$, l'évènement $(Z = z)$ est la réunion disjointe et au plus dénombrable des évènements $((X = x_i) \cap (Y = y_j))$ pour tous les couples $(i, j) \in I \times J$ tels que $x_i + y_j = z$. On aura donc

$$\mathbb{P}(Z = z) = \sum_{(i,j) \text{ tq } x_i + y_j = z} \mathbb{P}((X = x_i) \cap (Y = y_j)).$$

Loi d'une fonction de variables aléatoires

Proposition 9

Soit X et Y deux variables aléatoires discrètes et g une fonction quelconque définie sur $X(\Omega) \times Y(\Omega)$. Alors $Z = g(X, Y)$ est une variable aléatoire discrète.

Démonstration

On applique la proposition 2 et la proposition 5 .

Un cas particulier important de loi d'un couple de variables aléatoires est le cas de la somme, lorsque ces variables sont discrètes à valeurs complexes.

Soient donc $(\Omega, \mathcal{A}, \mathcal{P})$, un espace probabilisé et (X, Y) un couple de variables aléatoires discrètes sur Ω, à valeurs dans $\mathbb{R}$. Notons $X(\Omega) = \{x_i,\ \ i \in I\}$ et $Y(\Omega) = \left\{y_j,\ \ j \in J\right\}$ où I, J sont deux parties de $\mathbb{N}$.

Soit $Z = X + Y$. On sait déjà que Z est une variable aléatoire discrète. Pour tout $z \in Z(\Omega)$, l'évènement $(Z = z)$ est la réunion disjointe et au plus dénombrable des évènements $((X = x_i) \cap (Y = y_j))$ pour tous les couples $(i, j) \in I \times J$ tels que $x_i + y_j = z$. On aura donc

$$\mathbb{P}(Z = z) = \sum_{(i,j) \text{ tq } x_i + y_j = z} \mathbb{P}((X = x_i) \cap (Y = y_j)) .$$

Dans le cas où les variables X et Y sont indépendantes on aura donc aussi

$$\mathbb{P}(Z = z) = \sum_{(i,j) \text{ tq } x_i + y_j = z} \mathbb{P}(X = x_i)\,\mathbb{P}(Y = y_j) .$$

Exemple

On réalise une suite d'expériences de type succès-échec, indépendantes, chacune avec la même probabilité de succès $p \in]0\,;1[$. On appelle X_1 la variable aléatoire : « rang du premier succès obtenu » et X_2 la variable aléatoire : « rang du second succès ». Montrer que les variables aléatoires X_1 et $X_2 - X_1$ sont indépendantes.

Démonstration

La loi de X_1 est la loi géométrique $\mathcal{G}(p)$.

Exemple

On réalise une suite d'expériences de type succès-échec, indépendantes, chacune avec la même probabilité de succès $p \in]0\,;1[$. On appelle X_1 la variable aléatoire : « rang du premier succès obtenu » et X_2 la variable aléatoire : « rang du second succès ». Montrer que les variables aléatoires X_1 et $X_2 - X_1$ sont indépendantes.

Démonstration

La loi de X_1 est la loi géométrique $\mathcal{G}(p)$. On va déterminer la loi du couple (X_1, X_2) :

$$\forall\, i \in \mathbb{N}^*,\ \forall\, j \geqslant i+1,\ \mathbb{P}((X_1 = i) \cap (X_2 = j)) = q^{i-1}p \times q^{j-i-1}p = q^{j-2}p^2\,.$$

Exemple

On réalise une suite d'expériences de type succès-échec, indépendantes, chacune avec la même probabilité de succès $p \in]0\,;1[$. On appelle X_1 la variable aléatoire : « rang du premier succès obtenu » et X_2 la variable aléatoire : « rang du second succès ». Montrer que les variables aléatoires X_1 et $X_2 - X_1$ sont indépendantes.

Démonstration

La loi de X_1 est la loi géométrique $\mathcal{G}(p)$. On va déterminer la loi du couple (X_1, X_2) :

$$\forall\, i \in \mathbb{N}^*,\ \forall\, j \geqslant i+1,\ \mathbb{P}((X_1 = i) \cap (X_2 = j)) = q^{i-1}p \times q^{j-i-1}p = q^{j-2}p^2\,.$$

La variable aléatoire $Y = X_2 - X_1$ est à valeurs dans $\mathbb{N}^*$ et on a

$$\forall\, k \in \mathbb{N}^*,\ \mathbb{P}(Y = k) =$$

Exemple

On réalise une suite d'expériences de type succès-échec, indépendantes, chacune avec la même probabilité de succès $p \in]0\,;1[$. On appelle X_1 la variable aléatoire : « rang du premier succès obtenu » et X_2 la variable aléatoire : « rang du second succès ». Montrer que les variables aléatoires X_1 et $X_2 - X_1$ sont indépendantes.

Démonstration

La loi de X_1 est la loi géométrique $\mathcal{G}(p)$. On va déterminer la loi du couple (X_1, X_2) :

$$\forall\, i \in \mathbb{N}^*,\ \forall\, j \geqslant i+1,\ \mathbb{P}((X_1 = i) \cap (X_2 = j)) = q^{i-1}p \times q^{j-i-1}p = q^{j-2}p^2\,.$$

La variable aléatoire $Y = X_2 - X_1$ est à valeurs dans $\mathbb{N}^*$ et on a

$$\forall\, k \in \mathbb{N}^*,\ \mathbb{P}(Y = k) = \sum_{\substack{j-i=k \\ i\geqslant 1, j\geqslant 2}} \mathbb{P}((X_1 = i) \cap (X_2 = j))$$

Exemple

On réalise une suite d'expériences de type succès-échec, indépendantes, chacune avec la même probabilité de succès $p \in]0\,;1[$. On appelle X_1 la variable aléatoire : « rang du premier succès obtenu » et X_2 la variable aléatoire : « rang du second succès ». Montrer que les variables aléatoires X_1 et $X_2 - X_1$ sont indépendantes.

Démonstration

La loi de X_1 est la loi géométrique $\mathcal{G}(p)$. On va déterminer la loi du couple (X_1, X_2) :

$$\forall\, i \in \mathbb{N}^*,\ \forall\, j \geqslant i+1,\ \mathbb{P}((X_1 = i) \cap (X_2 = j)) = q^{i-1}p \times q^{j-i-1}p = q^{j-2}p^2\,.$$

La variable aléatoire $Y = X_2 - X_1$ est à valeurs dans $\mathbb{N}^*$ et on a

$$\forall\, k \in \mathbb{N}^*,\ \mathbb{P}(Y = k) = \sum_{\substack{j-i=k \\ i\geqslant 1, j \geqslant 2}} \mathbb{P}((X_1 = i) \cap (X_2 = j)) = \sum_{i=1}^{+\infty} \mathbb{P}((X_i = i) \cap (X_2 = i+k))$$

Exemple

On réalise une suite d'expériences de type succès-échec, indépendantes, chacune avec la même probabilité de succès $p \in]0\,;1[$. On appelle X_1 la variable aléatoire : « rang du premier succès obtenu » et X_2 la variable aléatoire : « rang du second succès ». Montrer que les variables aléatoires X_1 et $X_2 - X_1$ sont indépendantes.

Démonstration

La loi de X_1 est la loi géométrique $\mathcal{G}(p)$. On va déterminer la loi du couple (X_1, X_2) :

$$\forall\, i \in \mathbb{N}^*,\ \forall\, j \geqslant i+1,\ \mathbb{P}((X_1 = i) \cap (X_2 = j)) = q^{i-1}p \times q^{j-i-1}p = q^{j-2}p^2\,.$$

La variable aléatoire $Y = X_2 - X_1$ est à valeurs dans $\mathbb{N}^*$ et on a

$$\forall\, k \in \mathbb{N}^*,\ \mathbb{P}(Y = k) = \sum_{\substack{j-i=k\\ i\geqslant 1, j\geqslant 2}} \mathbb{P}((X_1 = i) \cap (X_2 = j)) = \sum_{i=1}^{+\infty} \mathbb{P}((X_i = i) \cap (X_2 = i+k))$$

$$= \sum_{i=1}^{+\infty} q^{i+k-2}p^2$$

Exemple

On réalise une suite d'expériences de type succès-échec, indépendantes, chacune avec la même probabilité de succès $p \in]0\,;1[$. On appelle X_1 la variable aléatoire : « rang du premier succès obtenu » et X_2 la variable aléatoire : « rang du second succès ». Montrer que les variables aléatoires X_1 et $X_2 - X_1$ sont indépendantes.

Démonstration

La loi de X_1 est la loi géométrique $\mathcal{G}(p)$. On va déterminer la loi du couple (X_1, X_2) :

$$\forall\, i \in \mathbb{N}^*,\ \forall\, j \geqslant i+1,\ \mathbb{P}((X_1 = i) \cap (X_2 = j)) = q^{i-1}p \times q^{j-i-1}p = q^{j-2}p^2\,.$$

La variable aléatoire $Y = X_2 - X_1$ est à valeurs dans $\mathbb{N}^*$ et on a

$$\forall\, k \in \mathbb{N}^*,\ \mathbb{P}(Y = k) = \sum_{\substack{j-i=k\\ i\geqslant 1, j\geqslant 2}} \mathbb{P}((X_1 = i) \cap (X_2 = j)) = \sum_{i=1}^{+\infty} \mathbb{P}((X_i = i) \cap (X_2 = i+k))$$

$$= \sum_{i=1}^{+\infty} q^{i+k-2}p^2 = \frac{p^2 q^{k-1}}{1-q} = pq^{k-1}\,.$$

Ainsi $X_2 - X_1$ suit aussi une loi géométrique de paramètre p (on pouvait s'en douter...).

Exemple

On réalise une suite d'expériences de type succès-échec, indépendantes, chacune avec la même probabilité de succès $p \in]0\,;1[$. On appelle X_1 la variable aléatoire : « rang du premier succès obtenu » et X_2 la variable aléatoire : « rang du second succès ». Montrer que les variables aléatoires X_1 et $X_2 - X_1$ sont indépendantes.

Démonstration

La loi de X_1 est la loi géométrique $\mathcal{G}(p)$. On va déterminer la loi du couple (X_1, X_2) :

$$\forall\, i \in \mathbb{N}^*,\ \forall\, j \geqslant i+1,\ \mathbb{P}((X_1 = i) \cap (X_2 = j)) = q^{i-1}p \times q^{j-i-1}p = q^{j-2}p^2\,.$$

La variable aléatoire $Y = X_2 - X_1$ est à valeurs dans $\mathbb{N}^*$ et on a

$$\forall\, k \in \mathbb{N}^*,\ \mathbb{P}(Y = k) = \sum_{\substack{j-i=k \\ i\geqslant 1, j\geqslant 2}} \mathbb{P}((X_1 = i) \cap (X_2 = j)) = \sum_{i=1}^{+\infty} \mathbb{P}((X_i = i) \cap (X_2 = i+k))$$

$$= \sum_{i=1}^{+\infty} q^{i+k-2}p^2 = \frac{p^2 q^{k-1}}{1-q} = pq^{k-1}\,.$$

Ainsi $X_2 - X_1$ suit aussi une loi géométrique de paramètre p (on pouvait s'en douter...).

Il est alors facile de vérifier que Y et X_1 sont indépendantes :

$$\mathbb{P}((X_1 = x) \cap (Y = y)) = \mathbb{P}((X_1 = x) \cap (X_2 - X_1 = y)) = \mathbb{P}((X_1 = x) \cap (X_2 = x+y)) = q^{x+y-2}p^2$$

Exemple

On réalise une suite d'expériences de type succès-échec, indépendantes, chacune avec la même probabilité de succès $p \in]0\,;1[$. On appelle X_1 la variable aléatoire : « rang du premier succès obtenu » et X_2 la variable aléatoire : « rang du second succès ». Montrer que les variables aléatoires X_1 et $X_2 - X_1$ sont indépendantes.

Démonstration

La loi de X_1 est la loi géométrique $\mathcal{G}(p)$. On va déterminer la loi du couple (X_1, X_2) :

$$\forall\, i \in \mathbb{N}^*,\ \forall\, j \geqslant i+1,\ \mathbb{P}((X_1 = i) \cap (X_2 = j)) = q^{i-1}p \times q^{j-i-1}p = q^{j-2}p^2\,.$$

La variable aléatoire $Y = X_2 - X_1$ est à valeurs dans $\mathbb{N}^*$ et on a

$$\forall\, k \in \mathbb{N}^*,\ \mathbb{P}(Y = k) = \sum_{\substack{j-i=k\\ i\geqslant 1, j\geqslant 2}} \mathbb{P}((X_1 = i) \cap (X_2 = j)) = \sum_{i=1}^{+\infty} \mathbb{P}((X_i = i) \cap (X_2 = i+k))$$

$$= \sum_{i=1}^{+\infty} q^{i+k-2}p^2 = \frac{p^2 q^{k-1}}{1-q} = pq^{k-1}\,.$$

Ainsi $X_2 - X_1$ suit aussi une loi géométrique de paramètre p (on pouvait s'en douter...).

Il est alors facile de vérifier que Y et X_1 sont indépendantes :

$$\mathbb{P}((X_1 = x) \cap (Y = y)) = \mathbb{P}((X_1 = x) \cap (X_2 - X_1 = y)) = \mathbb{P}((X_1 = x) \cap (X_2 = x+y)) = q^{x+y-2}p^2$$

et : $\mathbb{P}(X_1 = x)\mathbb{P}(Y = y) = q^{x-1}p \times q^{y-1}p$, donc on a bien $\mathbb{P}((X_1 = x) \cap (Y = y)) = \mathbb{P}(X_1 = x)\mathbb{P}(Y = y)$.

Dans ce qui suit, on étudie les sommes de variables aléatoires indépendantes suivant les lois usuelles.

Théorème 7

Si X et Y sont deux variables aléatoires **indépendantes** suivant des lois binomiales de paramètres respectifs (n, p) et (m, p) alors $X + Y$ suit une loi binomiale de paramètre $(n + m, p)$.

Dans ce qui suit, on étudie les sommes de variables aléatoires indépendantes suivant les lois usuelles.

Théorème 7

Si X et Y sont deux variables aléatoires **indépendantes** suivant des lois binomiales de paramètres respectifs (n, p) et (m, p) alors $X + Y$ suit une loi binomiale de paramètre $(n + m, p)$.

Démonstration

Puisque $X(\Omega) = [\![0\,;n]\!]$ et $Y(\Omega) = [\![0\,;m]\!]$, on a $(X + Y)(\Omega) = [\![0\,;n + m]\!]$.

Dans ce qui suit, on étudie les sommes de variables aléatoires indépendantes suivant les lois usuelles.

Théorème 7

Si X et Y sont deux variables aléatoires **indépendantes** suivant des lois binomiales de paramètres respectifs (n, p) et (m, p) alors $X + Y$ suit une loi binomiale de paramètre $(n + m, p)$.

Démonstration

Puisque $X(\Omega) = [\![0\,;n]\!]$ et $Y(\Omega) = [\![0\,;m]\!]$, on a $(X+Y)(\Omega) = [\![0\,;n+m]\!]$. Et pour tout $k \in [\![0\,;n+m]\!]$:

$$\mathbb{P}(X+Y=k) = \sum_{i+j=k} \mathbb{P}((X=i) \cap (Y=j)) =$$

Dans ce qui suit, on étudie les sommes de variables aléatoires indépendantes suivant les lois usuelles.

Théorème 7

Si X et Y sont deux variables aléatoires **indépendantes** suivant des lois binomiales de paramètres respectifs (n, p) et (m, p) alors $X+Y$ suit une loi binomiale de paramètre $(n+m, p)$.

Démonstration

Puisque $X(\Omega) = [\![0\,;n]\!]$ et $Y(\Omega) = [\![0\,;m]\!]$, on a $(X+Y)(\Omega) = [\![0\,;n+m]\!]$. Et pour tout $k \in [\![0\,;n+m]\!]$:

$$\mathbb{P}(X+Y=k) = \sum_{i+j=k} \mathbb{P}((X=i)\cap(Y=j)) = \sum_{i+j=k} \mathbb{P}(X=i)\mathbb{P}(Y=j) =$$

Dans ce qui suit, on étudie les sommes de variables aléatoires indépendantes suivant les lois usuelles.

Théorème 7

Si X et Y sont deux variables aléatoires **indépendantes** suivant des lois binomiales de paramètres respectifs (n, p) et (m, p) alors $X + Y$ suit une loi binomiale de paramètre $(n + m, p)$.

Démonstration

Puisque $X(\Omega) = [\![0\,;n]\!]$ et $Y(\Omega) = [\![0\,;m]\!]$, on a $(X+Y)(\Omega) = [\![0\,;n+m]\!]$. Et pour tout $k \in [\![0\,;n+m]\!]$:

$$\mathbb{P}(X+Y=k) = \sum_{i+j=k} \mathbb{P}((X=i)\cap(Y=j)) = \sum_{i+j=k} \mathbb{P}(X=i)\mathbb{P}(Y=j) = \sum_{i+j=k} \binom{n}{i} p^i q^{n-i} \times \binom{m}{j} p^j q^{m-j}$$

Dans ce qui suit, on étudie les sommes de variables aléatoires indépendantes suivant les lois usuelles.

Théorème 7

Si X et Y sont deux variables aléatoires **indépendantes** suivant des lois binomiales de paramètres respectifs (n, p) et (m, p) alors $X+Y$ suit une loi binomiale de paramètre $(n+m, p)$.

Démonstration

Puisque $X(\Omega) = [\![0\,;n]\!]$ et $Y(\Omega) = [\![0\,;m]\!]$, on a $(X+Y)(\Omega) = [\![0\,;n+m]\!]$. Et pour tout $k \in [\![0\,;n+m]\!]$:

$$\begin{aligned}\mathbb{P}(X+Y=k) &= \sum_{i+j=k} \mathbb{P}((X=i)\cap(Y=j)) = \sum_{i+j=k} \mathbb{P}(X=i)\mathbb{P}(Y=j) = \sum_{i+j=k} \binom{n}{i} p^i q^{n-i} \times \binom{m}{j} p^j q^{m-j} \\ &= p^k q^{n+m-k} \sum_{i+j=k} \binom{n}{i}\binom{m}{j}\end{aligned}$$

Dans ce qui suit, on étudie les sommes de variables aléatoires indépendantes suivant les lois usuelles.

Théorème 7

Si X et Y sont deux variables aléatoires **indépendantes** suivant des lois binomiales de paramètres respectifs (n, p) et (m, p) alors $X+Y$ suit une loi binomiale de paramètre $(n+m, p)$.

Démonstration

Puisque $X(\Omega) = [\![0\,;n]\!]$ et $Y(\Omega) = [\![0\,;m]\!]$, on a $(X+Y)(\Omega) = [\![0\,;n+m]\!]$. Et pour tout $k \in [\![0\,;n+m]\!]$:

$$\mathbb{P}(X+Y=k) = \sum_{i+j=k} \mathbb{P}((X=i)\cap(Y=j)) = \sum_{i+j=k} \mathbb{P}(X=i)\mathbb{P}(Y=j) = \sum_{i+j=k} \binom{n}{i} p^i q^{n-i} \times \binom{m}{j} p^j q^{m-j}$$

$$= p^k q^{n+m-k} \sum_{i+j=k} \binom{n}{i}\binom{m}{j} = p^k q^{n+m-k} \binom{n+m}{k}$$

Dans ce qui suit, on étudie les sommes de variables aléatoires indépendantes suivant les lois usuelles.

Théorème 7

Si X et Y sont deux variables aléatoires **indépendantes** suivant des lois binomiales de paramètres respectifs (n, p) et (m, p) alors $X + Y$ suit une loi binomiale de paramètre $(n + m, p)$.

Démonstration

Puisque $X(\Omega) = [\![0\,;n]\!]$ et $Y(\Omega) = [\![0\,;m]\!]$, on a $(X+Y)(\Omega) = [\![0\,;n+m]\!]$. Et pour tout $k \in [\![0\,;n+m]\!]$:

$$\mathbb{P}(X+Y=k) = \sum_{i+j=k} \mathbb{P}((X=i)\cap(Y=j)) = \sum_{i+j=k} \mathbb{P}(X=i)\mathbb{P}(Y=j) = \sum_{i+j=k} \binom{n}{i} p^i q^{n-i} \times \binom{m}{j} p^j q^{m-j}$$

$$= p^k q^{n+m-k} \sum_{i+j=k} \binom{n}{i}\binom{m}{j} = p^k q^{n+m-k} \binom{n+m}{k}$$

en utilisant la formule de Vandermonde (rappels du chapitre précédent).
Cela démontre que $X + Y$ suit la loi $\mathcal{B}(n+m, p)$.

Dans ce qui suit, on étudie les sommes de variables aléatoires indépendantes suivant les lois usuelles.

Théorème 7

Si X et Y sont deux variables aléatoires **indépendantes** suivant des lois binomiales de paramètres respectifs (n, p) et (m, p) alors $X+Y$ suit une loi binomiale de paramètre $(n+m, p)$.

Démonstration

Puisque $X(\Omega) = [\![0\,;n]\!]$ et $Y(\Omega) = [\![0\,;m]\!]$, on a $(X+Y)(\Omega) = [\![0\,;n+m]\!]$. Et pour tout $k \in [\![0\,;n+m]\!]$:

$$\begin{aligned}\mathbb{P}(X+Y=k) &= \sum_{i+j=k} \mathbb{P}((X=i)\cap(Y=j)) = \sum_{i+j=k} \mathbb{P}(X=i)\mathbb{P}(Y=j) = \sum_{i+j=k} \binom{n}{i} p^i q^{n-i} \times \binom{m}{j} p^j q^{m-j} \\ &= p^k q^{n+m-k} \sum_{i+j=k} \binom{n}{i}\binom{m}{j} = p^k q^{n+m-k} \binom{n+m}{k}\end{aligned}$$

en utilisant la formule de Vandermonde (rappels du chapitre précédent).
Cela démontre que $X+Y$ suit la loi $\mathcal{B}(n+m, p)$.

Remarque : Ce résultat est conforme à l'intuition : tirer n boules avec remise dans une urne puis en tirer de nouveau m revient à en tirer $n+m$...

Corollaire:

Si $X_1, \cdots, X_k$ sont k variables aléatoires **mutuellement indépendantes** suivant des lois binomiales de paramètres respectifs $(n_1, p), \cdots, (n_k, p)$ alors la variable aléatoire $X_1 + \cdots + X_k$ suit la loi binomiale de paramètre $\left(\sum_{i=1}^{k} n_i, p\right)$.

Corollaire:

> Si $X_1, \cdots, X_k$ sont k variables aléatoires **mutuellement indépendantes** suivant des lois binomiales de paramètres respectifs $(n_1, p), \cdots, (n_k, p)$ alors la variable aléatoire $X_1 + \cdots + X_k$ suit la loi binomiale de paramètre $\left(\sum\limits_{i=1}^{k} n_i, p\right)$.

Démonstration

banale récurrence sur k en remarquant que, si $X_1, \ldots, X_k$ sont mutuellement indépendantes, alors X_k et $X_1 + \cdots X_{k-1}$ sont indépendantes en vertu du lemme des coalitions (théorème 6).

Corollaire:

Si $X_1, \cdots, X_k$ sont k variables aléatoires **mutuellement indépendantes** suivant des lois binomiales de paramètres respectifs $(n_1, p), \cdots, (n_k, p)$ alors la variable aléatoire $X_1 + \cdots + X_k$ suit la loi binomiale de paramètre $\left(\sum_{i=1}^{k} n_i, p\right)$.

Démonstration

banale récurrence sur k en remarquant que, si $X_1, \ldots, X_k$ sont mutuellement indépendantes, alors X_k et $X_1 + \cdots X_{k-1}$ sont indépendantes en vertu du lemme des coalitions (théorème 6).

Corollaire:

Si $X_1, \cdots, X_n$ sont n variables aléatoires **mutuellement indépendantes** suivant la loi de Bernoulli de paramètre p, la variable aléatoire $X = X_1 + X_2 + \cdots + X_n$ suit la loi binomiale $\mathcal{B}(n, p)$.

Corollaire:

> Si $X_1, \cdots, X_k$ sont k variables aléatoires **mutuellement indépendantes** suivant des lois binomiales de paramètres respectifs $(n_1, p), \cdots, (n_k, p)$ alors la variable aléatoire $X_1 + \cdots + X_k$ suit la loi binomiale de paramètre $\left(\sum_{i=1}^{k} n_i, p\right)$.

Démonstration

banale récurrence sur k en remarquant que, si $X_1, \ldots, X_k$ sont mutuellement indépendantes, alors X_k et $X_1 + \cdots X_{k-1}$ sont indépendantes en vertu du lemme des coalitions (théorème 6).

Corollaire:

> Si $X_1, \cdots, X_n$ sont n variables aléatoires **mutuellement indépendantes** suivant la loi de Bernoulli de paramètre p, la variable aléatoire $X = X_1 + X_2 + \cdots + X_n$ suit la loi binomiale $\mathcal{B}(n, p)$.

Démonstration

On applique le corollaire précédent puisque la loi de Bernoulli de paramètre p n'est rien d'autre que la loi $\mathcal{B}(1, p)$.

Corollaire:

Si $X_1, \cdots, X_k$ sont k variables aléatoires **mutuellement indépendantes** suivant des lois binomiales de paramètres respectifs $(n_1, p), \cdots, (n_k, p)$ alors la variable aléatoire $X_1 + \cdots + X_k$ suit la loi binomiale de paramètre $\left(\sum_{i=1}^{k} n_i, p\right)$.

Démonstration

banale récurrence sur k en remarquant que, si $X_1, \ldots, X_k$ sont mutuellement indépendantes, alors X_k et $X_1 + \cdots X_{k-1}$ sont indépendantes en vertu du lemme des coalitions (théorème 6).

Corollaire:

Si $X_1, \cdots, X_n$ sont n variables aléatoires **mutuellement indépendantes** suivant la loi de Bernoulli de paramètre p, la variable aléatoire $X = X_1 + X_2 + \cdots + X_n$ suit la loi binomiale $\mathcal{B}(n, p)$.

Démonstration

On applique le corollaire précédent puisque la loi de Bernoulli de paramètre p n'est rien d'autre que la loi $\mathcal{B}(1, p)$.

Remarque : on peut aussi dire que, puisque chaque X_i vaut 0 ou 1 selon échec/succès à chaque épreuve, la somme $X_1 + \cdots + X_n$ représente tout simplement le nombre de succès dans n épreuves de Bernoulli indépendantes.

Théorème 8

Si X et Y sont deux variables aléatoires **indépendantes** suivant des lois de Poisson de paramètres respectifs λ et μ alors $X + Y$ suit la loi de Poisson de paramètre $\lambda + \mu$.

Théorème 8

Si X et Y sont deux variables aléatoires **indépendantes** suivant des lois de Poisson de paramètres respectifs λ et μ alors $X + Y$ suit la loi de Poisson de paramètre $\lambda + \mu$.

Démonstration

Soit $Z = X + Y$. On a tout d'abord $Z(\Omega) = \mathbb{N}$ et pour tout $k \in \mathbb{N}$:

Théorème 8

Si X et Y sont deux variables aléatoires **indépendantes** suivant des lois de Poisson de paramètres respectifs λ et μ alors $X+Y$ suit la loi de Poisson de paramètre $\lambda+\mu$.

Démonstration

Soit $Z = X + Y$. On a tout d'abord $Z(\Omega) = \mathbb{N}$ et pour tout $k \in \mathbb{N}$:

$$\mathbb{P}(Z = k) = \sum_{(i,j)\in\mathbb{N}^2/i+j=k} \mathbb{P}((X = i) \cap (Y = j))$$

Théorème 8

Si X et Y sont deux variables aléatoires **indépendantes** suivant des lois de Poisson de paramètres respectifs λ et μ alors $X+Y$ suit la loi de Poisson de paramètre $\lambda+\mu$.

Démonstration

Soit $Z = X + Y$. On a tout d'abord $Z(\Omega) = \mathbb{N}$ et pour tout $k \in \mathbb{N}$:

$$\mathbb{P}(Z=k) = \sum_{(i,j)\in\mathbb{N}^2/i+j=k} \mathbb{P}((X=i)\cap(Y=j)) = \sum_{i=0}^{k} \mathbb{P}((X=i)\cap(Y=k-i))$$

Théorème 8

Si X et Y sont deux variables aléatoires **indépendantes** suivant des lois de Poisson de paramètres respectifs λ et μ alors $X+Y$ suit la loi de Poisson de paramètre $\lambda+\mu$.

Démonstration

Soit $Z = X + Y$. On a tout d'abord $Z(\Omega) = \mathbb{N}$ et pour tout $k \in \mathbb{N}$:

$$\begin{aligned}\mathbb{P}(Z=k) &= \sum_{(i,j)\in\mathbb{N}^2/i+j=k} \mathbb{P}((X=i)\cap(Y=j)) = \sum_{i=0}^{k} \mathbb{P}((X=i)\cap(Y=k-i) \\ &= \sum_{i=0}^{k} \mathbb{P}(X=i)\mathbb{P}(Y=k-i) \qquad \text{car } X \text{ et } Y \text{ sont indépendantes}\end{aligned}$$

Théorème 8

Si X et Y sont deux variables aléatoires **indépendantes** suivant des lois de Poisson de paramètres respectifs λ et μ alors $X+Y$ suit la loi de Poisson de paramètre $\lambda+\mu$.

Démonstration

Soit $Z = X + Y$. On a tout d'abord $Z(\Omega) = \mathbb{N}$ et pour tout $k \in \mathbb{N}$:

$$\begin{aligned}
\mathbb{P}(Z=k) &= \sum_{(i,j)\in\mathbb{N}^2/i+j=k} \mathbb{P}((X=i)\cap(Y=j)) = \sum_{i=0}^{k} \mathbb{P}((X=i)\cap(Y=k-i) \\
&= \sum_{i=0}^{k} \mathbb{P}(X=i)\mathbb{P}(Y=k-i) \qquad \text{car } X \text{ et } Y \text{ sont indépendantes} \\
&= \sum_{i=0}^{k} \frac{\mathrm{e}^{-\lambda}\lambda^i}{i!}\frac{\mathrm{e}^{-\mu}\mu^{k-i}}{(k-i)!} = \mathrm{e}^{-(\lambda+\mu)} \sum_{i=0}^{k} \frac{\lambda^i \mu^{k-i}}{i!(k-i)!}
\end{aligned}$$

Théorème 8

Si X et Y sont deux variables aléatoires **indépendantes** suivant des lois de Poisson de paramètres respectifs λ et μ alors $X+Y$ suit la loi de Poisson de paramètre $\lambda+\mu$.

Démonstration

Soit $Z=X+Y$. On a tout d'abord $Z(\Omega)=\mathbb{N}$ et pour tout $k\in\mathbb{N}$:

$$\begin{aligned}
\mathbb{P}(Z=k) &= \sum_{(i,j)\in\mathbb{N}^2/i+j=k} \mathbb{P}((X=i)\cap(Y=j)) = \sum_{i=0}^{k} \mathbb{P}((X=i)\cap(Y=k-i) \\
&= \sum_{i=0}^{k} \mathbb{P}(X=i)\mathbb{P}(Y=k-i) \qquad \text{car } X \text{ et } Y \text{ sont indépendantes} \\
&= \sum_{i=0}^{k} \frac{\mathrm{e}^{-\lambda}\lambda^i}{i!}\frac{\mathrm{e}^{-\mu}\mu^{k-i}}{(k-i)!} = \mathrm{e}^{-(\lambda+\mu)} \sum_{i=0}^{k} \frac{\lambda^i\mu^{k-i}}{i!(k-i)!} \\
&= \frac{\mathrm{e}^{-(\lambda+\mu)}}{k!} \sum_{i=0}^{k} \frac{k!}{i!(k-i)!}\lambda^i\mu^{k-i}
\end{aligned}$$

Théorème 8

Si X et Y sont deux variables aléatoires **indépendantes** suivant des lois de Poisson de paramètres respectifs λ et μ alors $X+Y$ suit la loi de Poisson de paramètre $\lambda+\mu$.

Démonstration

Soit $Z = X+Y$. On a tout d'abord $Z(\Omega) = \mathbb{N}$ et pour tout $k \in \mathbb{N}$:

$$\begin{aligned}
\mathbb{P}(Z=k) &= \sum_{(i,j)\in\mathbb{N}^2/i+j=k} \mathbb{P}((X=i)\cap(Y=j)) = \sum_{i=0}^{k} \mathbb{P}((X=i)\cap(Y=k-i) \\
&= \sum_{i=0}^{k} \mathbb{P}(X=i)\mathbb{P}(Y=k-i) \qquad \text{car } X \text{ et } Y \text{ sont indépendantes} \\
&= \sum_{i=0}^{k} \frac{\mathrm{e}^{-\lambda}\lambda^i}{i!}\frac{\mathrm{e}^{-\mu}\mu^{k-i}}{(k-i)!} = \mathrm{e}^{-(\lambda+\mu)} \sum_{i=0}^{k} \frac{\lambda^i\mu^{k-i}}{i!(k-i)!} \\
&= \frac{\mathrm{e}^{-(\lambda+\mu)}}{k!} \sum_{i=0}^{k} \frac{k!}{i!(k-i)!}\lambda^i\mu^{k-i} = \frac{\mathrm{e}^{-(\lambda+\mu)}}{k!} \sum_{i=0}^{k} \binom{k}{i}\lambda^i\mu^{k-i}
\end{aligned}$$

Théorème 8

Si X et Y sont deux variables aléatoires **indépendantes** suivant des lois de Poisson de paramètres respectifs λ et μ alors $X+Y$ suit la loi de Poisson de paramètre $\lambda+\mu$.

Démonstration

Soit $Z = X+Y$. On a tout d'abord $Z(\Omega) = \mathbb{N}$ et pour tout $k \in \mathbb{N}$:

$$\begin{aligned}
\mathbb{P}(Z=k) &= \sum_{(i,j)\in\mathbb{N}^2/i+j=k} \mathbb{P}((X=i)\cap(Y=j)) = \sum_{i=0}^{k} \mathbb{P}((X=i)\cap(Y=k-i) \\
&= \sum_{i=0}^{k} \mathbb{P}(X=i)\mathbb{P}(Y=k-i) \qquad \text{car } X \text{ et } Y \text{ sont indépendantes} \\
&= \sum_{i=0}^{k} \frac{e^{-\lambda}\lambda^i}{i!}\frac{e^{-\mu}\mu^{k-i}}{(k-i)!} = e^{-(\lambda+\mu)} \sum_{i=0}^{k} \frac{\lambda^i\mu^{k-i}}{i!(k-i)!} \\
&= \frac{e^{-(\lambda+\mu)}}{k!}\sum_{i=0}^{k}\frac{k!}{i!(k-i)!}\lambda^i\mu^{k-i} = \frac{e^{-(\lambda+\mu)}}{k!}\sum_{i=0}^{k}\binom{k}{i}\lambda^i\mu^{k-i} = \frac{e^{-(\lambda+\mu)}(\lambda+\mu)^k}{k!}.
\end{aligned}$$

Théorème 8

Si X et Y sont deux variables aléatoires **indépendantes** suivant des lois de Poisson de paramètres respectifs λ et μ alors $X+Y$ suit la loi de Poisson de paramètre $\lambda+\mu$.

Démonstration

Soit $Z = X+Y$. On a tout d'abord $Z(\Omega) = \mathbb{N}$ et pour tout $k \in \mathbb{N}$:

$$\begin{aligned}
\mathbb{P}(Z=k) &= \sum_{(i,j)\in\mathbb{N}^2/i+j=k} \mathbb{P}((X=i)\cap(Y=j)) = \sum_{i=0}^{k} \mathbb{P}((X=i)\cap(Y=k-i) \\
&= \sum_{i=0}^{k} \mathbb{P}(X=i)\mathbb{P}(Y=k-i) \qquad \text{car } X \text{ et } Y \text{ sont indépendantes} \\
&= \sum_{i=0}^{k} \frac{\mathrm{e}^{-\lambda}\lambda^i}{i!}\frac{\mathrm{e}^{-\mu}\mu^{k-i}}{(k-i)!} = \mathrm{e}^{-(\lambda+\mu)} \sum_{i=0}^{k} \frac{\lambda^i\mu^{k-i}}{i!(k-i)!} \\
&= \frac{\mathrm{e}^{-(\lambda+\mu)}}{k!} \sum_{i=0}^{k} \frac{k!}{i!(k-i)!}\lambda^i\mu^{k-i} = \frac{\mathrm{e}^{-(\lambda+\mu)}}{k!} \sum_{i=0}^{k} \binom{k}{i}\lambda^i\mu^{k-i} = \frac{\mathrm{e}^{-(\lambda+\mu)}(\lambda+\mu)^k}{k!}.
\end{aligned}$$

Corollaire:

> Si $X_1, \cdots, X_n$ sont n variables aléatoires **mutuellement indépendantes** suivant des lois de Poisson de paramètres respectifs $\lambda_1, \dots, \lambda_n$, alors la variable aléatoire $X_1 + \cdots + X_n$ suit la loi de Poisson de paramètre $\sum\limits_{i=1}^{n} \lambda_i$.

MOMENTS D'UNE VARIABLE ALÉATOIRE DISCRÈTE

Les variables aléatoires considérées dans ce paragraphe sont à valeurs réelles ou complexes.

Espérance

Définition 14

Soit $(\Omega, \mathcal{A}, P)$ un espace probabilisé et X une variable aléatoire discrète à valeurs dans $\mathbb{C}$.

- si $X(\Omega)$ est fini, $X(\Omega) = \{x_1, \dots, x_n\}$, alors **l'espérance** de X est

$$\mathbb{E}(X) = \sum_{i=1}^{n} x_i \mathbb{P}(X = x_i).$$

Espérance

Définition 14

Soit $(\Omega, \mathcal{A}, P)$ un espace probabilisé et X une variable aléatoire discrète à valeurs dans $\mathbb{C}$.

- si $X(\Omega)$ est fini, $X(\Omega) = \{x_1, \ldots, x_n\}$, alors **l'espérance** de X est

$$\mathbb{E}(X) = \sum_{i=1}^{n} x_i \mathbb{P}(X = x_i).$$

- si $X(\Omega)$ est infini , $X(\Omega) = \{x_i,\ \ i \in I\}$ avec I dénombrable, on dira que X **admet une espérance** ou **est d'espérance finie** si la famille $\big(x\mathbb{P}(X = x)\big)_{x \in X(\Omega)}$ est sommable. Dans ce cas **l'espérance** de X est :

$$\mathbb{E}(X) = \sum_{x \in X(\Omega)} x\mathbb{P}(X = x) = \sum_{i \in I} x_i \mathbb{P}(X = x_i)$$

(par convention $x\mathbb{P}(X = x) = 0$ lorsque $x = +\infty$ et $\mathbb{P}(X = x) = 0$).

Espérance

Définition 14

Soit $(\Omega, \mathcal{A}, P)$ un espace probabilisé et X une variable aléatoire discrète à valeurs dans $\mathbb{C}$.

- si $X(\Omega)$ est fini, $X(\Omega) = \{x_1, \dots, x_n\}$, alors **l'espérance** de X est

$$\mathbb{E}(X) = \sum_{i=1}^{n} x_i \mathbb{P}(X = x_i).$$

- si $X(\Omega)$ est infini , $X(\Omega) = \{x_i,\ \ i \in I\}$ avec I dénombrable, on dira que X **admet une espérance** ou **est d'espérance finie** si la famille $\Big(x\mathbb{P}(X = x)\Big)_{x \in X(\Omega)}$ est sommable. Dans ce cas **l'espérance** de X est :

$$\mathbb{E}(X) = \sum_{x \in X(\Omega)} x\mathbb{P}(X = x) = \sum_{i \in I} x_i \mathbb{P}(X = x_i)$$

(par convention $x\mathbb{P}(X = x) = 0$ lorsque $x = +\infty$ et $\mathbb{P}(X = x) = 0$).

Remarques

- Une variable aléatoire discrète finie a toujours une espérance ce qui n'est pas le cas pour une variable aléatoire discrète infinie.

- Lorsque $X(\Omega) = (x_n)_{n\in\mathbb{N}}$, dire que X est d'espérance finie équivaut à dire que la série de terme général $x_n\mathbb{P}(X = x_n)$ est **absolument** convergente et alors

$$\mathbb{E}(X) = \sum_{n=0}^{+\infty} x_n\mathbb{P}(X = x_n).$$

- Lorsque $X(\Omega) = (x_n)_{n\in\mathbb{N}}$, dire que X est d'espérance finie équivaut à dire que la série de terme général $x_n\mathbb{P}(X = x_n)$ est **absolument** convergente et alors

$$\mathbb{E}(X) = \sum_{n=0}^{+\infty} x_n\mathbb{P}(X = x_n).$$

- L'absolue convergence est nécessaire car l'ordre dans lequel les termes sont additionnés ne doit pas intervenir (en effet, lors d'une expérience aléatoire, les résultats peuvent apparaître dans n'importe quel ordre), cette condition est liée à l'absolue convergence (voir chapitre précédent).

- Lorsque $X(\Omega) = (x_n)_{n\in\mathbb{N}}$, dire que X est d'espérance finie équivaut à dire que la série de terme général $x_n\mathbb{P}(X = x_n)$ est **absolument** convergente et alors

$$\mathbb{E}(X) = \sum_{n=0}^{+\infty} x_n\mathbb{P}(X = x_n).$$

- L'absolue convergence est nécessaire car l'ordre dans lequel les termes sont additionnés ne doit pas intervenir (en effet, lors d'une expérience aléatoire, les résultats peuvent apparaître dans n'importe quel ordre), cette condition est liée à l'absolue convergence (voir chapitre précédent).

Exemple

Soit X une variable aléatoire prenant les valeurs $n \in \mathbb{N}^*$ avec les probabilités :

$$\mathbb{P}(X = n) = \frac{1}{n(n+1)}\cdot$$

- Lorsque $X(\Omega) = (x_n)_{n\in\mathbb{N}}$, dire que X est d'espérance finie équivaut à dire que la série de terme général $x_n\mathbb{P}(X = x_n)$ est **absolument** convergente et alors

$$\mathbb{E}(X) = \sum_{n=0}^{+\infty} x_n\mathbb{P}(X = x_n).$$

- L'absolue convergence est nécessaire car l'ordre dans lequel les termes sont additionnés ne doit pas intervenir (en effet, lors d'une expérience aléatoire, les résultats peuvent apparaître dans n'importe quel ordre), cette condition est liée à l'absolue convergence (voir chapitre précédent).

Exemple

Soit X une variable aléatoire prenant les valeurs $n \in \mathbb{N}^*$ avec les probabilités :

$$\mathbb{P}(X = n) = \frac{1}{n(n+1)}\cdot$$

Cette définition a bien un sens puisque $\sum\limits_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n(n+1)} = 1$.

- Lorsque $X(\Omega) = (x_n)_{n\in\mathbb{N}}$, dire que X est d'espérance finie équivaut à dire que la série de terme général $x_n\mathbb{P}(X = x_n)$ est **absolument** convergente et alors

$$\mathbb{E}(X) = \sum_{n=0}^{+\infty} x_n\mathbb{P}(X = x_n).$$

- L'absolue convergence est nécessaire car l'ordre dans lequel les termes sont additionnés ne doit pas intervenir (en effet, lors d'une expérience aléatoire, les résultats peuvent apparaître dans n'importe quel ordre), cette condition est liée à l'absolue convergence (voir chapitre précédent).

Exemple

Soit X une variable aléatoire prenant les valeurs $n \in \mathbb{N}^*$ avec les probabilités :

$$\mathbb{P}(X = n) = \frac{1}{n(n+1)}\cdot$$

Cette définition a bien un sens puisque $\sum\limits_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n(n+1)} = 1$.

Cette variable aléatoire n'a pas d'espérance finie.

- Lorsque $X(\Omega) = (x_n)_{n\in\mathbb{N}}$, dire que X est d'espérance finie équivaut à dire que la série de terme général $x_n\mathbb{P}(X = x_n)$ est **absolument** convergente et alors

$$\mathbb{E}(X) = \sum_{n=0}^{+\infty} x_n\mathbb{P}(X = x_n).$$

- L'absolue convergence est nécessaire car l'ordre dans lequel les termes sont additionnés ne doit pas intervenir (en effet, lors d'une expérience aléatoire, les résultats peuvent apparaître dans n'importe quel ordre), cette condition est liée à l'absolue convergence (voir chapitre précédent).

Exemple

Soit X une variable aléatoire prenant les valeurs $n \in \mathbb{N}^*$ avec les probabilités :

$$\mathbb{P}(X = n) = \frac{1}{n(n+1)}\cdot$$

Cette définition a bien un sens puisque $\sum\limits_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n(n+1)} = 1$.

Cette variable aléatoire n'a pas d'espérance finie.

Remarque : Pour toute la suite, on se limitera au cas où l'ensemble $X(\Omega)$ est infini (le cas fini étant plus facile et ayant été étudié en 1ère année). On pourra donc écrire $X(\Omega) = \{x_n,\ n \in \mathbb{N}\}$.

Le théorème qui suit facilite dans certains cas le calcul de l'espérance.

Théorème 9

Soit X une variable aléatoire **à valeurs dans $\mathbb{N}$** (ou dans $\mathbb{N} \cup \{+\infty\}$).
X admet une espérance finie si et seulement si la série de terme général $\mathbb{P}(X \geqslant k)$ converge et alors :

$$\mathbb{E}(X) = \sum_{k=1}^{+\infty} \mathbb{P}(X \geqslant k) = \sum_{k=0}^{+\infty} \mathbb{P}(X > k).$$

Le théorème qui suit facilite dans certains cas le calcul de l'espérance.

Théorème 9

Soit X une variable aléatoire **à valeurs dans $\mathbb{N}$** (ou dans $\mathbb{N} \cup \{+\infty\}$).
X admet une espérance finie si et seulement si la série de terme général $\mathbb{P}(X \geqslant k)$ converge et alors :

$$\mathbb{E}(X) = \sum_{k=1}^{+\infty} \mathbb{P}(X \geqslant k) = \sum_{k=0}^{+\infty} \mathbb{P}(X > k).$$

Démonstration

La démonstration repose sur le calcul ci-dessous (c'est une transformation d'Abel), pour tout $N \in \mathbb{N}^*$:

$$\sum_{k=1}^{N} k\mathbb{P}(X = k) = \sum_{k=1}^{N} k\Big[\mathbb{P}(X \geqslant k) - \mathbb{P}(X \geqslant k+1)\Big]$$

Le théorème qui suit facilite dans certains cas le calcul de l'espérance.

Théorème 9

Soit X une variable aléatoire **à valeurs dans $\mathbb{N}$** (ou dans $\mathbb{N} \cup \{+\infty\}$).
X admet une espérance finie si et seulement si la série de terme général $\mathbb{P}(X \geqslant k)$ converge et alors :

$$\mathbb{E}(X) = \sum_{k=1}^{+\infty} \mathbb{P}(X \geqslant k) = \sum_{k=0}^{+\infty} \mathbb{P}(X > k).$$

Démonstration

La démonstration repose sur le calcul ci-dessous (c'est une transformation d'Abel), pour tout $N \in \mathbb{N}^*$:

$$\sum_{k=1}^{N} k\mathbb{P}(X = k) = \sum_{k=1}^{N} k\Big[\mathbb{P}(X \geqslant k) - \mathbb{P}(X \geqslant k+1)\Big] = \sum_{k=1}^{N} k\mathbb{P}(X \geqslant k) - \sum_{\substack{\cancel{k=1} \\ k=0}}^{N} k\mathbb{P}(X \geqslant k+1)$$

Le théorème qui suit facilite dans certains cas le calcul de l'espérance.

Théorème 9

Soit X une variable aléatoire **à valeurs dans $\mathbb{N}$** (ou dans $\mathbb{N} \cup \{+\infty\}$).
X admet une espérance finie si et seulement si la série de terme général $\mathbb{P}(X \geqslant k)$ converge et alors :

$$\mathbb{E}(X) = \sum_{k=1}^{+\infty} \mathbb{P}(X \geqslant k) = \sum_{k=0}^{+\infty} \mathbb{P}(X > k).$$

Démonstration

La démonstration repose sur le calcul ci-dessous (c'est une transformation d'Abel), pour tout $N \in \mathbb{N}^*$:

$$\sum_{k=1}^{N} k\mathbb{P}(X = k) = \sum_{k=1}^{N} k\Big[\mathbb{P}(X \geqslant k) - \mathbb{P}(X \geqslant k+1)\Big] = \sum_{k=1}^{N} k\mathbb{P}(X \geqslant k) - \sum_{\substack{\cancel{k=1}\\ k=0}}^{N} k\mathbb{P}(X \geqslant k+1)$$

$$= \sum_{k=1}^{N} k\mathbb{P}(X \geqslant k) - \sum_{k=1}^{N+1} (k-1)\mathbb{P}(X \geqslant k)$$

Le théorème qui suit facilite dans certains cas le calcul de l'espérance.

Théorème 9

Soit X une variable aléatoire **à valeurs dans $\mathbb{N}$** (ou dans $\mathbb{N} \cup \{+\infty\}$).
X admet une espérance finie si et seulement si la série de terme général $\mathbb{P}(X \geqslant k)$ converge et alors :

$$\mathbb{E}(X) = \sum_{k=1}^{+\infty} \mathbb{P}(X \geqslant k) = \sum_{k=0}^{+\infty} \mathbb{P}(X > k).$$

Démonstration

La démonstration repose sur le calcul ci-dessous (c'est une transformation d'Abel), pour tout $N \in \mathbb{N}^*$:

$$\sum_{k=1}^{N} k\mathbb{P}(X = k) = \sum_{k=1}^{N} k\Big[\mathbb{P}(X \geqslant k) - \mathbb{P}(X \geqslant k+1)\Big] = \sum_{k=1}^{N} k\mathbb{P}(X \geqslant k) - \sum_{\substack{\cancel{k=1} \\ k=0}}^{N} k\mathbb{P}(X \geqslant k+1)$$

$$= \sum_{k=1}^{N} k\mathbb{P}(X \geqslant k) - \sum_{k=1}^{N+1} (k-1)\mathbb{P}(X \geqslant k) = \sum_{k=1}^{N+1} \mathbb{P}(X \geqslant k) - (N+1)\mathbb{P}(X \geqslant N+1).$$

Le théorème qui suit facilite dans certains cas le calcul de l'espérance.

Théorème 9

Soit X une variable aléatoire **à valeurs dans $\mathbb{N}$** (ou dans $\mathbb{N} \cup \{+\infty\}$).
X admet une espérance finie si et seulement si la série de terme général $\mathbb{P}(X \geqslant k)$ converge et alors :

$$\mathbb{E}(X) = \sum_{k=1}^{+\infty} \mathbb{P}(X \geqslant k) = \sum_{k=0}^{+\infty} \mathbb{P}(X > k).$$

Démonstration

La démonstration repose sur le calcul ci-dessous (c'est une transformation d'Abel), pour tout $N \in \mathbb{N}^*$:

$$\sum_{k=1}^{N} k\mathbb{P}(X = k) = \sum_{k=1}^{N} k\Big[\mathbb{P}(X \geqslant k) - \mathbb{P}(X \geqslant k+1)\Big] = \sum_{k=1}^{N} k\mathbb{P}(X \geqslant k) - \sum_{\substack{\cancel{k=1}\\ k=0}}^{N} k\mathbb{P}(X \geqslant k+1)$$

$$= \sum_{k=1}^{N} k\mathbb{P}(X \geqslant k) - \sum_{k=1}^{N+1} (k-1)\mathbb{P}(X \geqslant k) = \sum_{k=1}^{N+1} \mathbb{P}(X \geqslant k) - (N+1)\mathbb{P}(X \geqslant N+1).$$

- Supposons que la série de terme général $\mathbb{P}(X \geqslant k)$ converge. D'après le calcul ci-dessus, on a :

Le théorème qui suit facilite dans certains cas le calcul de l'espérance.

Théorème 9

Soit X une variable aléatoire **à valeurs dans $\mathbb{N}$** (ou dans $\mathbb{N} \cup \{+\infty\}$).
X admet une espérance finie si et seulement si la série de terme général $\mathbb{P}(X \geqslant k)$ converge et alors :

$$\mathbb{E}(X) = \sum_{k=1}^{+\infty} \mathbb{P}(X \geqslant k) = \sum_{k=0}^{+\infty} \mathbb{P}(X > k).$$

Démonstration

La démonstration repose sur le calcul ci-dessous (c'est une transformation d'Abel), pour tout $N \in \mathbb{N}^*$:

$$\sum_{k=1}^{N} k\mathbb{P}(X = k) = \sum_{k=1}^{N} k\Big[\mathbb{P}(X \geqslant k) - \mathbb{P}(X \geqslant k+1)\Big] = \sum_{k=1}^{N} k\mathbb{P}(X \geqslant k) - \sum_{\substack{\cancel{k=1}\\ k=0}}^{N} k\mathbb{P}(X \geqslant k+1)$$

$$= \sum_{k=1}^{N} k\mathbb{P}(X \geqslant k) - \sum_{k=1}^{N+1} (k-1)\mathbb{P}(X \geqslant k) = \sum_{k=1}^{N+1} \mathbb{P}(X \geqslant k) - (N+1)\mathbb{P}(X \geqslant N+1).$$

- Supposons que la série de terme général $\mathbb{P}(X \geqslant k)$ converge. D'après le calcul ci-dessus, on a :

$$\forall\, N \in \mathbb{N}^*,\ \sum_{k=1}^{N} k\mathbb{P}(X = k) \leqslant \sum_{k=1}^{N+1} \mathbb{P}(X \geqslant k) \leqslant \sum_{k=1}^{+\infty} \mathbb{P}(X \geqslant k)$$

Le théorème qui suit facilite dans certains cas le calcul de l'espérance.

Théorème 9

Soit X une variable aléatoire **à valeurs dans $\mathbb{N}$** (ou dans $\mathbb{N} \cup \{+\infty\}$).
X admet une espérance finie si et seulement si la série de terme général $\mathbb{P}(X \geqslant k)$ converge et alors :

$$\mathbb{E}(X) = \sum_{k=1}^{+\infty} \mathbb{P}(X \geqslant k) = \sum_{k=0}^{+\infty} \mathbb{P}(X > k).$$

Démonstration

La démonstration repose sur le calcul ci-dessous (c'est une transformation d'Abel), pour tout $N \in \mathbb{N}^*$:

$$\sum_{k=1}^{N} k\mathbb{P}(X = k) = \sum_{k=1}^{N} k\Big[\mathbb{P}(X \geqslant k) - \mathbb{P}(X \geqslant k+1)\Big] = \sum_{k=1}^{N} k\mathbb{P}(X \geqslant k) - \sum_{\substack{\cancel{k=1}\\ k=0}}^{N} k\mathbb{P}(X \geqslant k+1)$$

$$= \sum_{k=1}^{N} k\mathbb{P}(X \geqslant k) - \sum_{k=1}^{N+1} (k-1)\mathbb{P}(X \geqslant k) = \sum_{k=1}^{N+1} \mathbb{P}(X \geqslant k) - (N+1)\mathbb{P}(X \geqslant N+1).$$

- Supposons que la série de terme général $\mathbb{P}(X \geqslant k)$ converge. D'après le calcul ci-dessus, on a :

$$\forall\, N \in \mathbb{N}^*,\ \sum_{k=1}^{N} k\mathbb{P}(X = k) \leqslant \sum_{k=1}^{N+1} \mathbb{P}(X \geqslant k) \leqslant \sum_{k=1}^{+\infty} \mathbb{P}(X \geqslant k)$$

donc la série à termes positifs $\sum k\mathbb{P}(X = k)$ converge, et $\mathbb{E}(X)$ existe.

Démonstration (suite)

- Supposons que $\mathbb{E}(X)$ existe. Alors pour tout entier N :

$$(N+1)\mathbb{P}(X \geqslant N+1) = (N+1)\sum_{k=N+1}^{+\infty} \mathbb{P}(X=k) \leqslant \sum_{k=N+1}^{+\infty} kP(X=k)$$

Démonstration (suite)

- Supposons que $\mathbb{E}(X)$ existe. Alors pour tout entier N :

$$(N+1)\mathbb{P}(X \geqslant N+1) = (N+1)\sum_{k=N+1}^{+\infty} \mathbb{P}(X=k) \leqslant \sum_{k=N+1}^{+\infty} kP(X=k)$$

donc $\lim_{N\to+\infty}(N+1)\mathbb{P}(X \geqslant N+1) = 0$.

Démonstration (suite)

- Supposons que $\mathbb{E}(X)$ existe. Alors pour tout entier N :

$$(N+1)\mathbb{P}(X \geqslant N+1) = (N+1)\sum_{k=N+1}^{+\infty} \mathbb{P}(X=k) \leqslant \sum_{k=N+1}^{+\infty} kP(X=k)$$

donc $\lim_{N\to+\infty}(N+1)\mathbb{P}(X \geqslant N+1) = 0$.

D'après le calcul préliminaire, on en déduit :

$$\lim_{N\to+\infty}\left(\sum_{k=1}^{N+1} \mathbb{P}(X \geqslant k)\right) = \lim_{N\to+\infty}\left(\sum_{k=1}^{N} k\mathbb{P}(X=k)\right) = \mathbb{E}(X),$$

Démonstration (suite)

- Supposons que $\mathbb{E}(X)$ existe. Alors pour tout entier N :

$$(N+1)\mathbb{P}(X \geqslant N+1) = (N+1)\sum_{k=N+1}^{+\infty} \mathbb{P}(X=k) \leqslant \sum_{k=N+1}^{+\infty} kP(X=k)$$

donc $\lim\limits_{N\to+\infty}(N+1)\mathbb{P}(X \geqslant N+1) = 0$.

D'après le calcul préliminaire, on en déduit :

$$\lim_{N\to+\infty}\left(\sum_{k=1}^{N+1} \mathbb{P}(X \geqslant k)\right) = \lim_{N\to+\infty}\left(\sum_{k=1}^{N} k\mathbb{P}(X=k)\right) = \mathbb{E}(X),$$

ce qui prouve que la série $\sum \mathbb{P}(X \geqslant k)$ converge et donne l'égalité annoncée.

Démonstration (suite)

- Supposons que $\mathbb{E}(X)$ existe. Alors pour tout entier N :

$$(N+1)\mathbb{P}(X \geqslant N+1) = (N+1)\sum_{k=N+1}^{+\infty} \mathbb{P}(X=k) \leqslant \sum_{k=N+1}^{+\infty} kP(X=k)$$

donc $\lim\limits_{N\to+\infty}(N+1)\mathbb{P}(X \geqslant N+1) = 0$.

D'après le calcul préliminaire, on en déduit :

$$\lim_{N\to+\infty}\left(\sum_{k=1}^{N+1}\mathbb{P}(X \geqslant k)\right) = \lim_{N\to+\infty}\left(\sum_{k=1}^{N} k\mathbb{P}(X=k)\right) = \mathbb{E}(X),$$

ce qui prouve que la série $\sum \mathbb{P}(X \geqslant k)$ converge et donne l'égalité annoncée.

- Enfin, la relation $\displaystyle\sum_{k=1}^{+\infty}\mathbb{P}(X \geqslant k) = \sum_{k=0}^{+\infty}\mathbb{P}(X > k)$ est immédiate à l'aide d'un changement d'indice, et puisque, X ne prenant que des valeurs entières, on a $(X > k) = (X \geqslant k+1)$.

Le théorème qui suit est un des plus importants :

Théorème 10: de transfert

Soit X une variable aléatoire discrète sur un espace probabilisé $(\Omega, \mathcal{A}, P)$, à valeurs dans un ensemble E. Notons $X(\Omega) = \{x_i, \quad i \in I\}$ (I au plus dénombrable).

Soit f une application de $X(\Omega)$ dans $\mathbb{C}$. La variable aléatoire $f(X)$ admet une espérance si et seulement si la famille $\big(f(x)\mathbb{P}(X = x)\big)_{x \in X(\Omega)}$ est sommable, et dans ce cas :

$$\mathbb{E}(f(X)) = \sum_{x \in X(\Omega)} f(x)\mathbb{P}(X = x) = \sum_{i \in I} f(x_i)\mathbb{P}(X = x_i)\,.$$

Le théorème qui suit est un des plus importants :

Théorème 10: de transfert

Soit X une variable aléatoire discrète sur un espace probabilisé $(\Omega, \mathcal{A}, P)$, à valeurs dans un ensemble E. Notons $X(\Omega) = \{x_i, \quad i \in I\}$ (I au plus dénombrable).

Soit f une application de $X(\Omega)$ dans $\mathbb{C}$. La variable aléatoire $f(X)$ admet une espérance si et seulement si la famille $\big(f(x)\mathbb{P}(X = x)\big)_{x \in X(\Omega)}$ est sommable, et dans ce cas :

$$\mathbb{E}(f(X)) = \sum_{x \in X(\Omega)} f(x)\mathbb{P}(X = x) = \sum_{i \in I} f(x_i)\mathbb{P}(X = x_i).$$

L'intérêt de ce théorème est de pouvoir calculer l'espérance de $f(X)$ sans avoir besoin de calculer sa loi, seulement en connaissant la loi de X.

Démonstration

Notons $f(X)(\Omega) = \{f(x_i),\ i \in I\} = \left\{y_j,\ j \in J\right\}$.

Démonstration

Notons $f(X)(\Omega) = \{f(x_i),\ i \in I\} = \left\{y_j,\ j \in J\right\}$.
Supposons que $f(X)$ admet une espérance finie. Alors :

$$\mathbb{E}(f(X)) = \sum_{j \in J} y_j \mathbb{P}(f(X) = y_j), \text{ la famille } \left(y_j \mathbb{P}(f(X) = y_j)\right)_{j \in J} \text{ étant sommable.}$$

Démonstration

Notons $f(X)(\Omega) = \{f(x_i),\ i \in I\} = \left\{y_j,\ j \in J\right\}$.
Supposons que $f(X)$ admet une espérance finie. Alors :

$$\mathbb{E}(f(X)) = \sum_{j \in J} y_j \mathbb{P}(f(X) = y_j), \text{ la famille } \left(y_j \mathbb{P}(f(X) = y_j)\right)_{j \in J} \text{ étant sommable.}$$

Soit $I_j = \left\{i \in I \text{ tq } f(x_i) = y_j\right\}$. La famille $(I_j)_{j \in J}$ est une partition de I et on a : $(f(X) = y_j) = \bigcup_{i \in I_j} (X = x_i)$,

cette réunion étant disjointe. Donc $\mathbb{P}(f(X) = y_j) = \sum_{i \in I_j} \mathbb{P}(X = x_i)$.

Démonstration

Notons $f(X)(\Omega) = \{f(x_i),\ i \in I\} = \left\{y_j,\ j \in J\right\}$.
Supposons que $f(X)$ admet une espérance finie. Alors :

$$\mathbb{E}(f(X)) = \sum_{j \in J} y_j \mathbb{P}(f(X) = y_j),\ \text{la famille } \left(y_j \mathbb{P}(f(X) = y_j)\right)_{j \in J} \text{ étant sommable.}$$

Soit $I_j = \left\{i \in I \text{ tq } f(x_i) = y_j\right\}$. La famille $(I_j)_{j \in J}$ est une partition de I et on a : $(f(X) = y_j) = \displaystyle\bigcup_{i \in I_j} (X = x_i)$,

cette réunion étant disjointe. Donc $\mathbb{P}(f(X) = y_j) = \displaystyle\sum_{i \in I_j} \mathbb{P}(X = x_i)$.

En remplaçant dans la formule précédente :

$$\mathbb{E}(f(X)) = \sum_{j \in J} y_j \left(\sum_{i \in I_j} \mathbb{P}(X = x_i)\right) = \sum_{j \in J} \left(\sum_{i \in I_j} f(x_i) \mathbb{P}(X = x_i)\right).$$

Démonstration

Notons $f(X)(\Omega) = \{f(x_i),\ i \in I\} = \left\{y_j,\ j \in J\right\}$.
Supposons que $f(X)$ admet une espérance finie. Alors :

$$\mathbb{E}(f(X)) = \sum_{j \in J} y_j \mathbb{P}(f(X) = y_j),\ \text{la famille } \left(y_j \mathbb{P}(f(X) = y_j)\right)_{j \in J} \text{ étant sommable.}$$

Soit $I_j = \left\{i \in I \text{ tq } f(x_i) = y_j\right\}$. La famille $(I_j)_{j \in J}$ est une partition de I et on a : $(f(X) = y_j) = \bigcup_{i \in I_j} (X = x_i)$, cette réunion étant disjointe. Donc $\mathbb{P}(f(X) = y_j) = \sum_{i \in I_j} \mathbb{P}(X = x_i)$.

En remplaçant dans la formule précédente :

$$\mathbb{E}(f(X)) = \sum_{j \in J} y_j \left(\sum_{i \in I_j} \mathbb{P}(X = x_i) \right) = \sum_{j \in J} \left(\sum_{i \in I_j} f(x_i) \mathbb{P}(X = x_i) \right).$$

Par le théorème de sommation par paquets (possible car la famille de départ est sommable), puisque $\bigsqcup_{j \in J} I_j = I$ on obtient :

$$\mathbb{E}(f(X)) = \sum_{i \in I} f(x_i) \mathbb{P}(X = x_i).$$

Démonstration

Notons $f(X)(\Omega) = \{f(x_i),\ i \in I\} = \left\{y_j,\ j \in J\right\}$.
Supposons que $f(X)$ admet une espérance finie. Alors :

$$\mathbb{E}(f(X)) = \sum_{j\in J} y_j \mathbb{P}(f(X) = y_j), \text{ la famille } \left(y_j\mathbb{P}(f(X) = y_j)\right)_{j\in J} \text{ étant sommable.}$$

Soit $I_j = \left\{i \in I \text{ tq } f(x_i) = y_j\right\}$. La famille $(I_j)_{j\in J}$ est une partition de I et on a : $(f(X) = y_j) = \bigcup_{i\in I_j}(X = x_i)$, cette réunion étant disjointe. Donc $\mathbb{P}(f(X) = y_j) = \sum_{i\in I_j} \mathbb{P}(X = x_i)$.

En remplaçant dans la formule précédente :

$$\mathbb{E}(f(X)) = \sum_{j\in J} y_j \left(\sum_{i\in I_j} \mathbb{P}(X = x_i)\right) = \sum_{j\in J} \left(\sum_{i\in I_j} f(x_i)\mathbb{P}(X = x_i)\right) .$$

Par le théorème de sommation par paquets (possible car la famille de départ est sommable), puisque $\bigsqcup_{j\in J} I_j = I$ on obtient :

$$\mathbb{E}(f(X)) = \sum_{i\in I} f(x_i)\mathbb{P}(X = x_i).$$

L'implication réciproque se traite de la même façon (dans le théorème d'associativité généralisé, il y a une équivalence).

Cas particulier important :

Ce théorème s'applique aussi aux couples (et plus généralement aux n-uplets) de variables aléatoires.

Cas particulier important :

Ce théorème s'applique aussi aux couples (et plus généralement aux n-uplets) de variables aléatoires.

Soit $(\Omega, \mathcal{A}, \mathcal{P})$, un espace probabilisé et (X, Y) un couple de variables aléatoires discrètes sur Ω. Notons $X(\Omega) = \{x_i,\ i \in I\}$ et $Y(\Omega) = \left\{y_j,\ j \in J\right\}$ où I, J sont deux parties de $\mathbb{N}$.

Cas particulier important :

Ce théorème s'applique aussi aux couples (et plus généralement aux n-uplets) de variables aléatoires.

Soit $(\Omega, \mathcal{A}, \mathcal{P})$, un espace probabilisé et (X, Y) un couple de variables aléatoires discrètes sur Ω. Notons $X(\Omega) = \{x_i,\ i \in I\}$ et $Y(\Omega) = \left\{y_j,\ j \in J\right\}$ où I, J sont deux parties de $\mathbb{N}$.

Soit f une application de $X(\Omega) \times Y(\Omega)$ dans $\mathbb{C}$, et Z la variable aléatoire $Z = f(X, Y)$. Alors Z est d'espérance finie si et seulement si la famille des $\Big(f(x_i, y_j)\mathbb{P}\big((X = x_i) \cap (Y = y_j)\big)\Big)_{(i,j)\in I\times J}$ est sommable,

Cas particulier important :

Ce théorème s'applique aussi aux couples (et plus généralement aux n-uplets) de variables aléatoires.

Soit $(\Omega, \mathcal{A}, \mathcal{P})$, un espace probabilisé et (X, Y) un couple de variables aléatoires discrètes sur Ω. Notons $X(\Omega) = \{x_i,\ i \in I\}$ et $Y(\Omega) = \left\{y_j,\ j \in J\right\}$ où I, J sont deux parties de $\mathbb{N}$.

Soit f une application de $X(\Omega) \times Y(\Omega)$ dans $\mathbb{C}$, et Z la variable aléatoire $Z = f(X, Y)$. Alors Z est d'espérance finie si et seulement si la famille des $\Big(f(x_i, y_j)\mathbb{P}\big((X = x_i) \cap (Y = y_j)\big)\Big)_{(i,j)\in I\times J}$ est sommable, et alors :

$$\mathbb{E}(Z) = \sum_{(i,j)\in I\times J} f(x_i, y_j)\mathbb{P}\big((X = x_i) \cap (Y = y_j)\big).$$

Cas particulier important :

Ce théorème s'applique aussi aux couples (et plus généralement aux n-uplets) de variables aléatoires.

Soit $(\Omega, \mathcal{A}, \mathcal{P})$, un espace probabilisé et (X, Y) un couple de variables aléatoires discrètes sur Ω. Notons $X(\Omega) = \{x_i,\ i \in I\}$ et $Y(\Omega) = \left\{y_j,\ j \in J\right\}$ où I, J sont deux parties de $\mathbb{N}$.

Soit f une application de $X(\Omega) \times Y(\Omega)$ dans $\mathbb{C}$, et Z la variable aléatoire $Z = f(X, Y)$. Alors Z est d'espérance finie si et seulement si la famille des $\left(f(x_i, y_j)\mathbb{P}\big((X = x_i) \cap (Y = y_j)\big)\right)_{(i,j)\in I\times J}$ est sommable, et alors :

$$\mathbb{E}(Z) = \sum_{(i,j)\in I\times J} f(x_i, y_j)\mathbb{P}\big((X = x_i) \cap (Y = y_j)\big).$$

En particulier, sous réserve qu'elle existe, on aura, avec les mêmes notations :

$$\mathbb{E}(XY) = \sum_{(i,j)\in I\times J} x_i y_j \mathbb{P}\big((X = x_i) \cap (Y = y_j)\big).$$

Cas particulier important :

Ce théorème s'applique aussi aux couples (et plus généralement aux n-uplets) de variables aléatoires.

Soit $(\Omega, \mathcal{A}, \mathcal{P})$, un espace probabilisé et (X, Y) un couple de variables aléatoires discrètes sur Ω. Notons $X(\Omega) = \{x_i,\ i \in I\}$ et $Y(\Omega) = \left\{y_j,\ j \in J\right\}$ où I, J sont deux parties de $\mathbb{N}$.

Soit f une application de $X(\Omega) \times Y(\Omega)$ dans $\mathbb{C}$, et Z la variable aléatoire $Z = f(X, Y)$. Alors Z est d'espérance finie si et seulement si la famille des $\Big(f(x_i, y_j)\mathbb{P}\big((X = x_i) \cap (Y = y_j)\big)\Big)_{(i,j)\in I\times J}$ est sommable, et alors :

$$\mathbb{E}(Z) = \sum_{(i,j)\in I\times J} f(x_i, y_j)\mathbb{P}\big((X = x_i) \cap (Y = y_j)\big).$$

En particulier, sous réserve qu'elle existe, on aura, avec les mêmes notations :

$$\mathbb{E}(XY) = \sum_{(i,j)\in I\times J} x_i y_j \mathbb{P}\big((X = x_i) \cap (Y = y_j)\big).$$

Théorème 11: Linéarité de l'espérance

Soient X et Y deux variables aléatoires discrètes sur un espace probabilisé $(\Omega, \mathcal{A}, P)$, à valeurs dans $\mathbb{C}$, et soit $\lambda \in \mathbb{C}$.

Si les espérances de X et de Y existent, alors l'espérance de $\lambda X + Y$ existe et

$$\mathbb{E}(\lambda X + Y) = \lambda\mathbb{E}(X) + \mathbb{E}(Y).$$

Démonstration

Notons $X(\Omega) = \{x_i,\ i \in I\}$ et $Y(\Omega) = \left\{y_j,\ j \in J\right\}$ où I, J sont deux parties de $\mathbb{N}$.

Démonstration

Notons $X(\Omega) = \{x_i,\ i \in I\}$ et $Y(\Omega) = \left\{y_j,\ j \in J\right\}$ où I, J sont deux parties de $\mathbb{N}$.
Les évènements $(Y = y_j)$ pour $j \in J$ formant un système complet, on a :

$$\forall\, i \in I,\ \mathbb{P}(X = x_i) = \sum_{j \in J} \mathbb{P}\Big((X = x_i) \cap (Y = y_j)\Big)$$

Démonstration

Notons $X(\Omega) = \{x_i,\ i \in I\}$ et $Y(\Omega) = \left\{y_j,\ j \in J\right\}$ où I, J sont deux parties de $\mathbb{N}$.
Les évènements $(Y = y_j)$ pour $j \in J$ formant un système complet, on a :

$$\forall\, i \in I,\ \mathbb{P}(X = x_i) = \sum_{j \in J} \mathbb{P}\Big((X = x_i) \cap (Y = y_j)\Big)$$

puis en utilisant le théorème de Fubini (la famille définissant $\mathbb{E}(X)$ étant sommable) :

$$\mathbb{E}(X) = \sum_{i \in I} x_i \mathbb{P}(X = x_i) = \sum_{(i,j) \in I \times J} x_i \mathbb{P}\Big((X = x_i) \cap (Y = y_j)\Big).$$

Démonstration

Notons $X(\Omega) = \{x_i,\ i \in I\}$ et $Y(\Omega) = \left\{y_j,\ j \in J\right\}$ où I, J sont deux parties de $\mathbb{N}$.
Les évènements $(Y = y_j)$ pour $j \in J$ formant un système complet, on a :

$$\forall\, i \in I,\ \mathbb{P}(X = x_i) = \sum_{j \in J} \mathbb{P}\Big((X = x_i) \cap (Y = y_j)\Big)$$

puis en utilisant le théorème de Fubini (la famille définissant $\mathbb{E}(X)$ étant sommable) :

$$\mathbb{E}(X) = \sum_{i \in I} x_i \mathbb{P}(X = x_i) = \sum_{(i,j) \in I \times J} x_i \mathbb{P}\Big((X = x_i) \cap (Y = y_j)\Big).$$

De même :

$$\mathbb{E}(Y) = \sum_{(i,j) \in I \times J} y_j \mathbb{P}\Big((X = x)_i \cap (Y = y_j)\Big),$$

Démonstration

Notons $X(\Omega) = \{x_i,\ i \in I\}$ et $Y(\Omega) = \left\{y_j,\ j \in J\right\}$ où I, J sont deux parties de $\mathbb{N}$.
Les évènements $(Y = y_j)$ pour $j \in J$ formant un système complet, on a :

$$\forall\, i \in I,\ \mathbb{P}(X = x_i) = \sum_{j \in J} \mathbb{P}\Big((X = x_i) \cap (Y = y_j)\Big)$$

puis en utilisant le théorème de Fubini (la famille définissant $\mathbb{E}(X)$ étant sommable) :

$$\mathbb{E}(X) = \sum_{i \in I} x_i \mathbb{P}(X = x_i) = \sum_{(i,j) \in I \times J} x_i \mathbb{P}\Big((X = x_i) \cap (Y = y_j)\Big).$$

De même :

$$\mathbb{E}(Y) = \sum_{(i,j) \in I \times J} y_j \mathbb{P}\Big((X = x)_i \cap (Y = y_j)\Big),$$

donc, par addition de deux familles sommables :

$$\lambda \mathbb{E}(X) + \mathbb{E}(Y) = \sum_{(i,j) \in I \times J} (\lambda x_i + y_j) \mathbb{P}\Big((X = x_i) \cap (Y = y_j)\Big).$$

Démonstration

Notons $X(\Omega) = \{x_i,\ i \in I\}$ et $Y(\Omega) = \left\{y_j,\ j \in J\right\}$ où I, J sont deux parties de $\mathbb{N}$.
Les évènements $(Y = y_j)$ pour $j \in J$ formant un système complet, on a :

$$\forall\, i \in I,\ \mathbb{P}(X = x_i) = \sum_{j \in J} \mathbb{P}\Big((X = x_i) \cap (Y = y_j)\Big)$$

puis en utilisant le théorème de Fubini (la famille définissant $\mathbb{E}(X)$ étant sommable) :

$$\mathbb{E}(X) = \sum_{i \in I} x_i \mathbb{P}(X = x_i) = \sum_{(i,j) \in I \times J} x_i \mathbb{P}\Big((X = x_i) \cap (Y = y_j)\Big).$$

De même :

$$\mathbb{E}(Y) = \sum_{(i,j) \in I \times J} y_j \mathbb{P}\Big((X = x)_i \cap (Y = y_j)\Big),$$

donc, par addition de deux familles sommables :

$$\lambda \mathbb{E}(X) + \mathbb{E}(Y) = \sum_{(i,j) \in I \times J} (\lambda x_i + y_j) \mathbb{P}\Big((X = x_i) \cap (Y = y_j)\Big).$$

En considérant alors l'application f définie sur $X(\Omega) \times Y(\Omega)$ par $f \colon (x, y) \mapsto \lambda x + y$, le théorème de transfert donne directement que $\lambda X + Y$ possède une espérance et que

$$\mathbb{E}(\lambda X + Y) = \sum_{(i,j) \in I \times J} (\lambda x_i + y_j) \mathbb{P}\Big((X = x_i) \cap (Y = y_j)\Big) = \lambda \mathbb{E}(X) + \mathbb{E}(Y).$$

Définition 15

Soit X une variable aléatoire discrète dont l'espérance existe. Puisque $\mathbb{E}(1) = 1$ il résulte du théorème précédent que la variable aléatoire $X - \mathbb{E}(X)$ est d'espérance nulle. On l'appelle **variable aléatoire centrée associée à X.**

Définition 15

Soit X une variable aléatoire discrète dont l'espérance existe. Puisque $\mathbb{E}(1) = 1$ il résulte du théorème précédent que la variable aléatoire $X - \mathbb{E}(X)$ est d'espérance nulle. On l'appelle **variable aléatoire centrée associée à X.**

Proposition 10: Positivité de l'espérance

Soit X une variable aléatoire réelle discrète sur un espace probabilisé $(\Omega, \mathcal{A}, P)$. Si $X \geqslant 0$ (c'est-à-dire si $X(\omega) \geqslant 0$ pour tout $\omega \in \Omega$) et si son espérance existe, alors $\mathbb{E}(X) \geqslant 0$.

De plus, si $X \geqslant 0$ et si $\mathbb{E}(X) = 0$, alors $\mathbb{P}(X = 0) = 1$ (on dit que X est **quasi certainement** nulle ou **presque sûrement** nulle).

Définition 15

Soit X une variable aléatoire discrète dont l'espérance existe. Puisque $\mathbb{E}(1) = 1$ il résulte du théorème précédent que la variable aléatoire $X - \mathbb{E}(X)$ est d'espérance nulle. On l'appelle **variable aléatoire centrée associée à X.**

Proposition 10: Positivité de l'espérance

Soit X une variable aléatoire réelle discrète sur un espace probabilisé $(\Omega, \mathcal{A}, P)$. Si $X \geqslant 0$ (c'est-à-dire si $X(\omega) \geqslant 0$ pour tout $\omega \in \Omega$) et si son espérance existe, alors $\mathbb{E}(X) \geqslant 0$.

De plus, si $X \geqslant 0$ et si $\mathbb{E}(X) = 0$, alors $\mathbb{P}(X = 0) = 1$ (on dit que X est **quasi certainement** nulle ou **presque sûrement** nulle).

Démonstration

C'est quasi immédiat :

- En notant $X(\Omega) = \{x_n,\ n \in \mathbb{N}\}$:

$$\mathbb{E}(X) = \sum_{n=0}^{+\infty} x_n \mathbb{P}(X = x_n).$$

Définition 15

Soit X une variable aléatoire discrète dont l'espérance existe. Puisque $\mathbb{E}(1) = 1$ il résulte du théorème précédent que la variable aléatoire $X - \mathbb{E}(X)$ est d'espérance nulle. On l'appelle **variable aléatoire centrée associée à X.**

Proposition 10: Positivité de l'espérance

Soit X une variable aléatoire réelle discrète sur un espace probabilisé $(\Omega, \mathcal{A}, P)$. Si $X \geqslant 0$ (c'est-à-dire si $X(\omega) \geqslant 0$ pour tout $\omega \in \Omega$) et si son espérance existe, alors $\mathbb{E}(X) \geqslant 0$.

De plus, si $X \geqslant 0$ et si $\mathbb{E}(X) = 0$, alors $\mathbb{P}(X = 0) = 1$ (on dit que X est **quasi certainement** nulle ou **presque sûrement** nulle).

Démonstration

C'est quasi immédiat :

- En notant $X(\Omega) = \{x_n,\ n \in \mathbb{N}\}$:

$$\mathbb{E}(X) = \sum_{n=0}^{+\infty} x_n \mathbb{P}(X = x_n).$$

  donc si $X \geqslant 0$ alors les x_n sont $\geqslant 0$ d'où $\mathbb{E}(X) \geqslant 0$.

Définition 15

Soit X une variable aléatoire discrète dont l'espérance existe. Puisque $\mathbb{E}(1) = 1$ il résulte du théorème précédent que la variable aléatoire $X - \mathbb{E}(X)$ est d'espérance nulle. On l'appelle **variable aléatoire centrée associée à X.**

Proposition 10: Positivité de l'espérance

Soit X une variable aléatoire réelle discrète sur un espace probabilisé $(\Omega, \mathcal{A}, P)$. Si $X \geqslant 0$ (c'est-à-dire si $X(\omega) \geqslant 0$ pour tout $\omega \in \Omega$) et si son espérance existe, alors $\mathbb{E}(X) \geqslant 0$.

De plus, si $X \geqslant 0$ et si $\mathbb{E}(X) = 0$, alors $\mathbb{P}(X = 0) = 1$ (on dit que X est **quasi certainement** nulle ou **presque sûrement** nulle).

Démonstration

C'est quasi immédiat :

- En notant $X(\Omega) = \{x_n,\ n \in \mathbb{N}\}$:
$$\mathbb{E}(X) = \sum_{n=0}^{+\infty} x_n \mathbb{P}(X = x_n).$$
donc si $X \geqslant 0$ alors les x_n sont $\geqslant 0$ d'où $\mathbb{E}(X) \geqslant 0$.
- Et si de plus $\mathbb{E}(X) = 0$ alors pour tout n on a $x_n \mathbb{P}(X = x_n) = 0$ donc si $x_n \neq 0$ on a $\mathbb{P}(X = x_n) = 0$;

Définition 15

Soit X une variable aléatoire discrète dont l'espérance existe. Puisque $\mathbb{E}(1) = 1$ il résulte du théorème précédent que la variable aléatoire $X - \mathbb{E}(X)$ est d'espérance nulle. On l'appelle **variable aléatoire centrée associée à X.**

Proposition 10: Positivité de l'espérance

Soit X une variable aléatoire réelle discrète sur un espace probabilisé $(\Omega, \mathcal{A}, P)$. Si $X \geqslant 0$ (c'est-à-dire si $X(\omega) \geqslant 0$ pour tout $\omega \in \Omega$) et si son espérance existe, alors $\mathbb{E}(X) \geqslant 0$.

De plus, si $X \geqslant 0$ et si $\mathbb{E}(X) = 0$, alors $\mathbb{P}(X = 0) = 1$ (on dit que X est **quasi certainement** nulle ou **presque sûrement** nulle).

Démonstration

C'est quasi immédiat :

- En notant $X(\Omega) = \{x_n,\ n \in \mathbb{N}\}$:
$$\mathbb{E}(X) = \sum_{n=0}^{+\infty} x_n \mathbb{P}(X = x_n).$$
donc si $X \geqslant 0$ alors les x_n sont $\geqslant 0$ d'où $\mathbb{E}(X) \geqslant 0$.
- Et si de plus $\mathbb{E}(X) = 0$ alors pour tout n on a $x_n \mathbb{P}(X = x_n) = 0$ donc si $x_n \neq 0$ on a $\mathbb{P}(X = x_n) = 0$; et puisque $\sum\limits_{n=0}^{+\infty} \mathbb{P}(X = x_n) = 1$, il existe un entier n_0 tel que $x_{n_0} = 0$ et alors $\mathbb{P}(X = x_{n_0}) = 1$.

Définition 15

Soit X une variable aléatoire discrète dont l'espérance existe. Puisque $\mathbb{E}(1) = 1$ il résulte du théorème précédent que la variable aléatoire $X - \mathbb{E}(X)$ est d'espérance nulle. On l'appelle **variable aléatoire centrée associée à X.**

Proposition 10: Positivité de l'espérance

Soit X une variable aléatoire réelle discrète sur un espace probabilisé $(\Omega, \mathcal{A}, P)$. Si $X \geqslant 0$ (c'est-à-dire si $X(\omega) \geqslant 0$ pour tout $\omega \in \Omega$) et si son espérance existe, alors $\mathbb{E}(X) \geqslant 0$.

De plus, si $X \geqslant 0$ et si $\mathbb{E}(X) = 0$, alors $\mathbb{P}(X = 0) = 1$ (on dit que X est **quasi certainement** nulle ou **presque sûrement** nulle).

Proposition 11: Croissance de l'espérance

Soient X et Y deux variables aléatoires réelles discrètes sur un espace probabilisé $(\Omega, \mathcal{A}, P)$, dont l'espérance existe.

Si $X \leqslant Y$ sur Ω, alors $\mathbb{E}(X) \leqslant \mathbb{E}(Y)$.

Définition 15

Soit X une variable aléatoire discrète dont l'espérance existe. Puisque $\mathbb{E}(1) = 1$ il résulte du théorème précédent que la variable aléatoire $X - \mathbb{E}(X)$ est d'espérance nulle. On l'appelle **variable aléatoire centrée associée à X.**

Proposition 10: Positivité de l'espérance

Soit X une variable aléatoire réelle discrète sur un espace probabilisé $(\Omega, \mathcal{A}, P)$. Si $X \geqslant 0$ (c'est-à-dire si $X(\omega) \geqslant 0$ pour tout $\omega \in \Omega$) et si son espérance existe, alors $\mathbb{E}(X) \geqslant 0$.

De plus, si $X \geqslant 0$ et si $\mathbb{E}(X) = 0$, alors $\mathbb{P}(X = 0) = 1$ (on dit que X est **quasi certainement** nulle ou **presque sûrement** nulle).

Proposition 11: Croissance de l'espérance

Soient X et Y deux variables aléatoires réelles discrètes sur un espace probabilisé $(\Omega, \mathcal{A}, P)$, dont l'espérance existe.

Si $X \leqslant Y$ sur Ω, alors $\mathbb{E}(X) \leqslant \mathbb{E}(Y)$.

Démonstration

On utilise la positivité de l'espérance, appliqué à $Y - X$, et la linéarité de l'espérance.

Proposition 12

Soient X et Y deux variables aléatoires discrètes sur un espace probabilisé $(\Omega, \mathcal{A}, P)$, X à valeurs dans $\mathbb{C}$ et Y à valeurs dans $\mathbb{R}$. On suppose que l'espérance de Y existe, et que $|X| \leqslant Y$ sur Ω.

Alors l'espérance de X existe.

Proposition 12

Soient X et Y deux variables aléatoires discrètes sur un espace probabilisé $(\Omega, \mathcal{A}, P)$, X à valeurs dans $\mathbb{C}$ et Y à valeurs dans $\mathbb{R}$. On suppose que l'espérance de Y existe, et que $|X| \leqslant Y$ sur Ω.

Alors l'espérance de X existe.

Démonstration

On reprend toutes les notations du th. de linéarité (notations habituelles). Pour tout $i \in \mathbb{N}$ on a :

$$|x_i|\,\mathbb{P}(X = x_i) = |x_i| \sum_{j \in J} \mathbb{P}\big((X = x_i) \cap (Y = y_j)\big) = \sum_{j \in J} |x_i|\,\mathbb{P}\big((X = x_i) \cap (Y = y_j)\big).$$

Proposition 12

Soient X et Y deux variables aléatoires discrètes sur un espace probabilisé $(\Omega, \mathcal{A}, P)$, X à valeurs dans $\mathbb{C}$ et Y à valeurs dans $\mathbb{R}$. On suppose que l'espérance de Y existe, et que $|X| \leqslant Y$ sur Ω.

Alors l'espérance de X existe.

Démonstration

On reprend toutes les notations du th. de linéarité (notations habituelles). Pour tout $i \in \mathbb{N}$ on a :

$$|x_i|\,\mathbb{P}(X = x_i) = |x_i| \sum_{j \in J} \mathbb{P}((X = x_i) \cap (Y = y_j)) = \sum_{j \in J} |x_i|\,\mathbb{P}((X = x_i) \cap (Y = y_j)).$$

Or $|x_i|\,\mathbb{P}((X = x_i) \cap (Y = y_j)) \leqslant y_j \mathbb{P}((X = x_i) \cap (Y = y_j))$!

Proposition 12

Soient X et Y deux variables aléatoires discrètes sur un espace probabilisé $(\Omega, \mathcal{A}, P)$, X à valeurs dans $\mathbb{C}$ et Y à valeurs dans $\mathbb{R}$. On suppose que l'espérance de Y existe, et que $|X| \leqslant Y$ sur Ω.

Alors l'espérance de X existe.

Démonstration

On reprend toutes les notations du th. de linéarité (notations habituelles). Pour tout $i \in \mathbb{N}$ on a :

$$|x_i|\,\mathbb{P}(X = x_i) = |x_i| \sum_{j \in J} \mathbb{P}\big((X = x_i) \cap (Y = y_j)\big) = \sum_{j \in J} |x_i|\,\mathbb{P}\big((X = x_i) \cap (Y = y_j)\big).$$

Or $|x_i|\,\mathbb{P}\big((X = x_i) \cap (Y = y_j)\big) \leqslant y_j \mathbb{P}\big((X = x_i) \cap (Y = y_j)\big)$! En effet, soit la probabilité de l'évènement $(X = x_i) \cap (Y = y_j)$ est nulle, auquel cas c'est vérifié,

Proposition 12

Soient X et Y deux variables aléatoires discrètes sur un espace probabilisé $(\Omega, \mathcal{A}, P)$, X à valeurs dans $\mathbb{C}$ et Y à valeurs dans $\mathbb{R}$. On suppose que l'espérance de Y existe, et que $|X| \leqslant Y$ sur Ω.

Alors l'espérance de X existe.

Démonstration

On reprend toutes les notations du th. de linéarité (notations habituelles). Pour tout $i \in \mathbb{N}$ on a :

$$|x_i|\,\mathbb{P}(X = x_i) = |x_i| \sum_{j \in J} \mathbb{P}((X = x_i) \cap (Y = y_j)) = \sum_{j \in J} |x_i|\,\mathbb{P}((X = x_i) \cap (Y = y_j)).$$

Or $|x_i|\,\mathbb{P}((X = x_i) \cap (Y = y_j)) \leqslant y_j \mathbb{P}((X = x_i) \cap (Y = y_j))$! En effet, soit la probabilité de l'évènement $(X = x_i) \cap (Y = y_j)$ est nulle, auquel cas c'est vérifié, soit il existe un ω tel que $X(\omega) = x_i$ et $Y(\omega) = y_j$ et puisque $\left|X(\omega)\right| \leqslant Y(\omega)$ on a encore l'inégalité.

Proposition 12

Soient X et Y deux variables aléatoires discrètes sur un espace probabilisé $(\Omega, \mathcal{A}, P)$, X à valeurs dans $\mathbb{C}$ et Y à valeurs dans $\mathbb{R}$. On suppose que l'espérance de Y existe, et que $|X| \leqslant Y$ sur Ω.

Alors l'espérance de X existe.

Démonstration

On reprend toutes les notations du th. de linéarité (notations habituelles). Pour tout $i \in \mathbb{N}$ on a :

$$|x_i|\,\mathbb{P}(X = x_i) = |x_i| \sum_{j\in J} \mathbb{P}((X = x_i) \cap (Y = y_j)) = \sum_{j\in J} |x_i|\,\mathbb{P}((X = x_i) \cap (Y = y_j)).$$

Or $|x_i|\,\mathbb{P}((X = x_i) \cap (Y = y_j)) \leqslant y_j \mathbb{P}((X = x_i) \cap (Y = y_j))$! En effet, soit la probabilité de l'évènement $(X = x_i) \cap (Y = y_j)$ est nulle, auquel cas c'est vérifié, soit il existe un ω tel que $X(\omega) = x_i$ et $Y(\omega) = y_j$ et puisque $\left|X(\omega)\right| \leqslant Y(\omega)$ on a encore l'inégalité.

Ainsi $|x_i|\,\mathbb{P}(X = x_i) \leqslant \sum_{j\in J} y_j \mathbb{P}((X = x_i) \cap (Y = y_j))$.

Proposition 12

Soient X et Y deux variables aléatoires discrètes sur un espace probabilisé $(\Omega, \mathcal{A}, P)$, X à valeurs dans $\mathbb{C}$ et Y à valeurs dans $\mathbb{R}$. On suppose que l'espérance de Y existe, et que $|X| \leqslant Y$ sur Ω.

Alors l'espérance de X existe.

Démonstration

On reprend toutes les notations du th. de linéarité (notations habituelles). Pour tout $i \in \mathbb{N}$ on a :

$$|x_i|\,\mathbb{P}(X = x_i) = |x_i| \sum_{j \in J} \mathbb{P}((X = x_i) \cap (Y = y_j)) = \sum_{j \in J} |x_i|\,\mathbb{P}((X = x_i) \cap (Y = y_j)).$$

Or $|x_i|\,\mathbb{P}((X = x_i) \cap (Y = y_j)) \leqslant y_j \mathbb{P}((X = x_i) \cap (Y = y_j))$! En effet, soit la probabilité de l'évènement $(X = x_i) \cap (Y = y_j)$ est nulle, auquel cas c'est vérifié, soit il existe un ω tel que $X(\omega) = x_i$ et $Y(\omega) = y_j$ et puisque $\left|X(\omega)\right| \leqslant Y(\omega)$ on a encore l'inégalité.

Ainsi $|x_i|\,\mathbb{P}(X = x_i) \leqslant \sum_{j \in J} y_j \mathbb{P}((X = x_i) \cap (Y = y_j))$.

De plus, $\mathbb{E}(Y) = \sum_{j \in J} y_j \mathbb{P}(Y = y_j) = \sum_{j \in J} y_j \left(\sum_{i \in I} \mathbb{P}((X = x_i) \cap (Y = y_j)) \right)$, (formule des probabilités totales),

Proposition 12

Soient X et Y deux variables aléatoires discrètes sur un espace probabilisé $(\Omega, \mathcal{A}, P)$, X à valeurs dans $\mathbb{C}$ et Y à valeurs dans $\mathbb{R}$. On suppose que l'espérance de Y existe, et que $|X| \leqslant Y$ sur Ω.

Alors l'espérance de X existe.

Démonstration

On reprend toutes les notations du th. de linéarité (notations habituelles). Pour tout $i \in \mathbb{N}$ on a :

$$|x_i|\,\mathbb{P}(X = x_i) = |x_i| \sum_{j \in J} \mathbb{P}((X = x_i) \cap (Y = y_j)) = \sum_{j \in J} |x_i|\,\mathbb{P}((X = x_i) \cap (Y = y_j)).$$

Or $|x_i|\,\mathbb{P}((X = x_i) \cap (Y = y_j)) \leqslant y_j \mathbb{P}((X = x_i) \cap (Y = y_j))$! En effet, soit la probabilité de l'évènement $(X = x_i) \cap (Y = y_j)$ est nulle, auquel cas c'est vérifié, soit il existe un ω tel que $X(\omega) = x_i$ et $Y(\omega) = y_j$ et puisque $\left|X(\omega)\right| \leqslant Y(\omega)$ on a encore l'inégalité.

Ainsi $|x_i|\,\mathbb{P}(X = x_i) \leqslant \sum_{j \in J} y_j \mathbb{P}((X = x_i) \cap (Y = y_j))$.

De plus, $\mathbb{E}(Y) = \sum_{j \in J} y_j \mathbb{P}(Y = y_j) = \sum_{j \in J} y_j \left(\sum_{i \in I} \mathbb{P}((X = x_i) \cap (Y = y_j)) \right)$, (formule des probabilités totales), et la suite double $\left(y_j \mathbb{P}((X = x_i) \cap (Y = y_j)) \right)_{(i,j) \in \mathbb{N}^2}$ est donc sommable puisque $\mathbb{E}(Y)$ existe.

Proposition 12

Soient X et Y deux variables aléatoires discrètes sur un espace probabilisé $(\Omega, \mathcal{A}, P)$, X à valeurs dans $\mathbb{C}$ et Y à valeurs dans $\mathbb{R}$. On suppose que l'espérance de Y existe, et que $|X| \leqslant Y$ sur Ω.

Alors l'espérance de X existe.

Démonstration

On reprend toutes les notations du th. de linéarité (notations habituelles). Pour tout $i \in \mathbb{N}$ on a :

$$|x_i|\,\mathbb{P}(X = x_i) = |x_i| \sum_{j \in J} \mathbb{P}((X = x_i) \cap (Y = y_j)) = \sum_{j \in J} |x_i|\,\mathbb{P}((X = x_i) \cap (Y = y_j)).$$

Or $|x_i|\,\mathbb{P}((X = x_i) \cap (Y = y_j)) \leqslant y_j \mathbb{P}((X = x_i) \cap (Y = y_j))$! En effet, soit la probabilité de l'évènement $(X = x_i) \cap (Y = y_j)$ est nulle, auquel cas c'est vérifié, soit il existe un ω tel que $X(\omega) = x_i$ et $Y(\omega) = y_j$ et puisque $\left|X(\omega)\right| \leqslant Y(\omega)$ on a encore l'inégalité.

Ainsi $|x_i|\,\mathbb{P}(X = x_i) \leqslant \sum_{j \in J} y_j \mathbb{P}((X = x_i) \cap (Y = y_j))$.

De plus, $\mathbb{E}(Y) = \sum_{j \in J} y_j \mathbb{P}(Y = y_j) = \sum_{j \in J} y_j \left(\sum_{i \in I} \mathbb{P}((X = x_i) \cap (Y = y_j)) \right)$, (formule des probabilités totales), et la suite double $\left(y_j \mathbb{P}((X = x_i) \cap (Y = y_j)) \right)_{(i,j) \in \mathbb{N}^2}$ est donc sommable puisque $\mathbb{E}(Y)$ existe.

Par Fubini, $\sum_{i \in I} |x_i|\,\mathbb{P}(X = x_i) \leqslant \sum_{i \in I} \sum_{j \in J} y_j \mathbb{P}((X = x_i) \cap (Y = y_j)) = \mathbb{E}(Y) < +\infty$, ce qui permet alors de conclure que l'espérance de X existe.

Proposition 12

Soient X et Y deux variables aléatoires discrètes sur un espace probabilisé $(\Omega, \mathcal{A}, P)$, X à valeurs dans $\mathbb{C}$ et Y à valeurs dans $\mathbb{R}$. On suppose que l'espérance de Y existe, et que $|X| \leqslant Y$ sur Ω.

Alors l'espérance de X existe.

Démonstration

On reprend toutes les notations du th. de linéarité (notations habituelles). Pour tout $i \in \mathbb{N}$ on a :

$$|x_i|\,\mathbb{P}(X = x_i) = |x_i| \sum_{j\in J} \mathbb{P}((X = x_i) \cap (Y = y_j)) = \sum_{j\in J} |x_i|\,\mathbb{P}((X = x_i) \cap (Y = y_j)).$$

Or $|x_i|\,\mathbb{P}((X = x_i) \cap (Y = y_j)) \leqslant y_j\mathbb{P}((X = x_i) \cap (Y = y_j))$! En effet, soit la probabilité de l'évènement $(X = x_i) \cap (Y = y_j)$ est nulle, auquel cas c'est vérifié, soit il existe un ω tel que $X(\omega) = x_i$ et $Y(\omega) = y_j$ et puisque $\left|X(\omega)\right| \leqslant Y(\omega)$ on a encore l'inégalité.

Ainsi $|x_i|\,\mathbb{P}(X = x_i) \leqslant \sum_{j\in J} y_j\mathbb{P}((X = x_i) \cap (Y = y_j))$.

De plus, $\mathbb{E}(Y) = \sum_{j\in J} y_j\mathbb{P}(Y = y_j) = \sum_{j\in J} y_j \left(\sum_{i\in I} \mathbb{P}((X = x_i) \cap (Y = y_j))\right)$, (formule des probabilités totales), et la suite double $\left(y_j\mathbb{P}((X = x_i) \cap (Y = y_j))\right)_{(i,j)\in\mathbb{N}^2}$ est donc sommable puisque $\mathbb{E}(Y)$ existe.

Par Fubini, $\sum_{i\in I} |x_i|\,\mathbb{P}(X = x_i) \leqslant \sum_{i\in I}\sum_{j\in J} y_j\mathbb{P}((X = x_i) \cap (Y = y_j)) = \mathbb{E}(Y) < +\infty$, ce qui permet alors de conclure que l'espérance de X existe.

Corollaire:

> Si X est une variable aléatoire discrète bornée, son espérance existe.

Théorème 12: Produit de deux variables aléatoires indépendantes

Soient X et Y deux variables aléatoires discrètes sur un espace probabilisé $(\Omega, \mathcal{A}, P)$, dont l'espérance existe.
Si X et Y sont indépendantes, la variable aléatoire $Z = XY$ possède une espérance finie et

$$\mathbb{E}(XY) = \mathbb{E}(X)\mathbb{E}(Y).$$

Théorème 12: Produit de deux variables aléatoires indépendantes

Soient X et Y deux variables aléatoires discrètes sur un espace probabilisé $(\Omega, \mathcal{A}, P)$, dont l'espérance existe.
Si X et Y sont indépendantes, la variable aléatoire $Z = XY$ possède une espérance finie et

$$\mathbb{E}(XY) = \mathbb{E}(X)\mathbb{E}(Y)\,.$$

Démonstration

Avec les notations désormais habituelles, puisque X et Y admettent une espérance, les séries $\sum_i x_i \mathbb{P}(X = x_i)$ et $\sum_j y_j \mathbb{P}(Y = y_j)$ sont absolument convergentes. Les théorèmes sur les familles sommables permettent alors d'écrire :

Théorème 12: Produit de deux variables aléatoires indépendantes

Soient X et Y deux variables aléatoires discrètes sur un espace probabilisé $(\Omega, \mathcal{A}, P)$, dont l'espérance existe.
Si X et Y sont indépendantes, la variable aléatoire $Z = XY$ possède une espérance finie et

$$\mathbb{E}(XY) = \mathbb{E}(X)\mathbb{E}(Y).$$

Démonstration

Avec les notations désormais habituelles, puisque X et Y admettent une espérance, les séries $\sum\limits_i x_i \mathbb{P}(X = x_i)$ et $\sum\limits_j y_j \mathbb{P}(Y = y_j)$ sont absolument convergentes. Les théorèmes sur les familles sommables permettent alors d'écrire :

$$\mathbb{E}(X)\mathbb{E}(Y) = \left(\sum_i x_i \mathbb{P}(X = x_i)\right)\left(\sum_j y_j \mathbb{P}(Y = y_j)\right)$$

Théorème 12: Produit de deux variables aléatoires indépendantes

Soient X et Y deux variables aléatoires discrètes sur un espace probabilisé $(\Omega, \mathcal{A}, P)$, dont l'espérance existe.
Si X et Y sont indépendantes, la variable aléatoire $Z = XY$ possède une espérance finie et

$$\mathbb{E}(XY) = \mathbb{E}(X)\mathbb{E}(Y).$$

Démonstration

Avec les notations désormais habituelles, puisque X et Y admettent une espérance, les séries $\sum_i x_i \mathbb{P}(X = x_i)$ et $\sum_j y_j \mathbb{P}(Y = y_j)$ sont absolument convergentes. Les théorèmes sur les familles sommables permettent alors d'écrire :

$$\begin{aligned}
\mathbb{E}(X)\mathbb{E}(Y) &= \left(\sum_i x_i \mathbb{P}(X = x_i)\right)\left(\sum_j y_j \mathbb{P}(Y = y_j)\right) \\
&= \sum_{(i,j)\in\mathbb{N}^2} x_i y_j \mathbb{P}(X = x_i)\mathbb{P}(Y = y_j) \qquad \text{famille double sommable}
\end{aligned}$$

Théorème 12: Produit de deux variables aléatoires indépendantes

Soient X et Y deux variables aléatoires discrètes sur un espace probabilisé $(\Omega, \mathcal{A}, P)$, dont l'espérance existe.
Si X et Y sont indépendantes, la variable aléatoire $Z = XY$ possède une espérance finie et

$$\mathbb{E}(XY) = \mathbb{E}(X)\mathbb{E}(Y)\,.$$

Démonstration

Avec les notations désormais habituelles, puisque X et Y admettent une espérance, les séries $\sum_i x_i \mathbb{P}(X = x_i)$ et $\sum_j y_j \mathbb{P}(Y = y_j)$ sont absolument convergentes. Les théorèmes sur les familles sommables permettent alors d'écrire :

$$\begin{aligned}
\mathbb{E}(X)\mathbb{E}(Y) &= \left(\sum_i x_i \mathbb{P}(X = x_i)\right)\left(\sum_j y_j \mathbb{P}(Y = y_j)\right) \\
&= \sum_{(i,j)\in\mathbb{N}^2} x_i y_j \mathbb{P}(X = x_i)\mathbb{P}(Y = y_j) \qquad \text{famille double sommable} \\
&= \sum_{(i,j)\in\mathbb{N}^2} x_i y_j \mathbb{P}((X = x_i) \cap (Y = y_j)) \qquad \text{indépendance}
\end{aligned}$$

Théorème 12: Produit de deux variables aléatoires indépendantes

Soient X et Y deux variables aléatoires discrètes sur un espace probabilisé $(\Omega, \mathcal{A}, P)$, dont l'espérance existe.
Si X et Y sont indépendantes, la variable aléatoire $Z = XY$ possède une espérance finie et

$$\mathbb{E}(XY) = \mathbb{E}(X)\mathbb{E}(Y)\,.$$

Démonstration

Avec les notations désormais habituelles, puisque X et Y admettent une espérance, les séries $\sum_i x_i \mathbb{P}(X = x_i)$ et $\sum_j y_j \mathbb{P}(Y = y_j)$ sont absolument convergentes. Les théorèmes sur les familles sommables permettent alors d'écrire :

$$\begin{aligned}
\mathbb{E}(X)\mathbb{E}(Y) &= \left(\sum_i x_i \mathbb{P}(X = x_i)\right)\left(\sum_j y_j \mathbb{P}(Y = y_j)\right) \\
&= \sum_{(i,j)\in\mathbb{N}^2} x_i y_j \mathbb{P}(X = x_i)\mathbb{P}(Y = y_j) \qquad \text{famille double sommable} \\
&= \sum_{(i,j)\in\mathbb{N}^2} x_i y_j \mathbb{P}((X = x_i) \cap (Y = y_j)) \qquad \text{indépendance} \\
&= \mathbb{E}(XY) \qquad \text{théorème de transfert.}
\end{aligned}$$

Théorème 12: Produit de deux variables aléatoires indépendantes

Soient X et Y deux variables aléatoires discrètes sur un espace probabilisé $(\Omega, \mathcal{A}, P)$, dont l'espérance existe.
Si X et Y sont indépendantes, la variable aléatoire $Z = XY$ possède une espérance finie et

$$\mathbb{E}(XY) = \mathbb{E}(X)\mathbb{E}(Y).$$

Démonstration

Avec les notations désormais habituelles, puisque X et Y admettent une espérance, les séries $\sum\limits_i x_i \mathbb{P}(X = x_i)$ et $\sum\limits_j y_j \mathbb{P}(Y = y_j)$ sont absolument convergentes. Les théorèmes sur les familles sommables permettent alors d'écrire :

$$\begin{aligned}
\mathbb{E}(X)\mathbb{E}(Y) &= \left(\sum_i x_i \mathbb{P}(X = x_i)\right)\left(\sum_j y_j \mathbb{P}(Y = y_j)\right) \\
&= \sum_{(i,j)\in\mathbb{N}^2} x_i y_j \mathbb{P}(X = x_i)\mathbb{P}(Y = y_j) \qquad \text{famille double sommable} \\
&= \sum_{(i,j)\in\mathbb{N}^2} x_i y_j \mathbb{P}((X = x_i) \cap (Y = y_j)) \qquad \text{indépendance} \\
&= \mathbb{E}(XY) \qquad \text{théorème de transfert.}
\end{aligned}$$

Remarque : Ce résultat s'étend bien sûr au cas de n variables aléatoires discrètes indépendantes.

Théorème 13: Inégalité de Markov

Soit X une variable aléatoire discrète réelle positive, dont l'espérance existe.
Alors, pour tout réel $a > 0$:

$$\mathbb{P}(X \geqslant a) \leqslant \frac{\mathbb{E}(X)}{a}\cdot$$

Théorème 13: Inégalité de Markov

Soit X une variable aléatoire discrète réelle positive, dont l'espérance existe.
Alors, pour tout réel $a > 0$:

$$\mathbb{P}(X \geqslant a) \leqslant \frac{\mathbb{E}(X)}{a}\cdot$$

Démonstration

Soit $X(\Omega) = \{x_n,\ n \in \mathbb{N}\}$ avec ici les x_n positifs ou nuls.

Théorème 13: Inégalité de Markov

Soit X une variable aléatoire discrète réelle positive, dont l'espérance existe.
Alors, pour tout réel $a > 0$:

$$\mathbb{P}(X \geqslant a) \leqslant \frac{\mathbb{E}(X)}{a}.$$

Démonstration

Soit $X(\Omega) = \{x_n,\ n \in \mathbb{N}\}$ avec ici les x_n positifs ou nuls. On a $\mathbb{E}(X) = \sum_{n=0}^{+\infty} x_n \mathbb{P}(X = x_n)$.

Théorème 13: Inégalité de Markov

Soit X une variable aléatoire discrète réelle positive, dont l'espérance existe.
Alors, pour tout réel $a > 0$:

$$\mathbb{P}(X \geqslant a) \leqslant \frac{\mathbb{E}(X)}{a}.$$

Démonstration

Soit $X(\Omega) = \{x_n,\ n \in \mathbb{N}\}$ avec ici les x_n positifs ou nuls. On a $\mathbb{E}(X) = \sum_{n=0}^{+\infty} x_n \mathbb{P}(X = x_n)$.

Notons I_1 l'ensemble des entiers n tels que x_n est supérieur ou égal à a, et I_2 l'ensemble des indices n tels que $x_n < a$.

Théorème 13: Inégalité de Markov

Soit X une variable aléatoire discrète réelle positive, dont l'espérance existe.
Alors, pour tout réel $a > 0$:

$$\mathbb{P}(X \geqslant a) \leqslant \frac{\mathbb{E}(X)}{a}.$$

Démonstration

Soit $X(\Omega) = \{x_n,\ n \in \mathbb{N}\}$ avec ici les x_n positifs ou nuls. On a $\mathbb{E}(X) = \sum_{n=0}^{+\infty} x_n \mathbb{P}(X = x_n)$.

Notons I_1 l'ensemble des entiers n tels que x_n est supérieur ou égal à a, et I_2 l'ensemble des indices n tels que $x_n < a$.
Donc, la série étant absolument convergente, par sommation par paquets :

$$\mathbb{E}(X) = \sum_{n \in I_1} x_n \mathbb{P}(X = x_n) + \underbrace{\sum_{n \in I_2} x_n \mathbb{P}(X = x_n)}_{\geqslant 0} \geqslant \sum_{n \in I_1} x_n \mathbb{P}(X = x_n) \geqslant a \sum_{n \in I_1} \mathbb{P}(X = x_n)$$

Théorème 13: Inégalité de Markov

Soit X une variable aléatoire discrète réelle positive, dont l'espérance existe.
Alors, pour tout réel $a > 0$:

$$\mathbb{P}(X \geqslant a) \leqslant \frac{\mathbb{E}(X)}{a}.$$

Démonstration

Soit $X(\Omega) = \{x_n,\ n \in \mathbb{N}\}$ avec ici les x_n positifs ou nuls. On a $\mathbb{E}(X) = \sum_{n=0}^{+\infty} x_n \mathbb{P}(X = x_n)$.

Notons I_1 l'ensemble des entiers n tels que x_n est supérieur ou égal à a, et I_2 l'ensemble des indices n tels que $x_n < a$.
Donc, la série étant absolument convergente, par sommation par paquets :

$$\mathbb{E}(X) = \sum_{n \in I_1} x_n \mathbb{P}(X = x_n) + \underbrace{\sum_{n \in I_2} x_n \mathbb{P}(X = x_n)}_{\geqslant 0} \geqslant \sum_{n \in I_1} x_n \mathbb{P}(X = x_n) \geqslant a \sum_{n \in I_1} \mathbb{P}(X = x_n)$$

Mais $\sum_{n \in I_1} \mathbb{P}(X = x_n) = \mathbb{P}(X \geqslant a)$ puisque $(X \geqslant a)$ est la réunion disjointe des évènements $(X = x_n)$ avec $x_n \geqslant a$, d'où l'inégalité cherchée.

Variance d'une variable aléatoire réelle

► Les variables aléatoires de ce paragraphe sont toutes à valeurs réelles ◄

Variance d'une variable aléatoire réelle

► Les variables aléatoires de ce paragraphe sont toutes à valeurs réelles ◄

Définition 16

Soit $(\Omega, \mathcal{A}, P)$ un espace probabilisé et X une variable aléatoire discrète à valeurs dans $\mathbb{R}$, et soit $r \geqslant 1$ un entier.

- si $X(\Omega)$ est fini, $X(\Omega) = \{x_1, \ldots, x_n\}$, alors le **moment d'ordre r de X** est

$$m_r(X) = \mathbb{E}(X^r) = \sum_{i=1}^{n} x_i^r \mathbb{P}(X = x_i).$$

Variance d'une variable aléatoire réelle

► Les variables aléatoires de ce paragraphe sont toutes à valeurs réelles ◄

Définition 16

Soit $(\Omega, \mathcal{A}, P)$ un espace probabilisé et X une variable aléatoire discrète à valeurs dans $\mathbb{R}$, et soit $r \geqslant 1$ un entier.

- si $X(\Omega)$ est fini, $X(\Omega) = \{x_1, \ldots, x_n\}$, alors le **moment d'ordre r de X** est

$$m_r(X) = \mathbb{E}(X^r) = \sum_{i=1}^{n} x_i^r \mathbb{P}(X = x_i).$$

- si $X(\Omega)$ est infini , $X(\Omega) = \{x_i,\ i \in I\}$ avec I dénombrable, on dira que X admet un **moment d'ordre r** si la variable aléatoire X^r admet une espérance, c'est-à-dire si la famille $\left(x^r \mathbb{P}(X = x)\right)_{x \in X(\Omega)}$ est sommable. Dans ce cas le moment d'ordre r de X est :

$$m_r(X) = \mathbb{E}(X^r) = \sum_{x \in X(\Omega)} x^r \mathbb{P}(X = x) = \sum_{i \in I} x_i^r \mathbb{P}(X = x_i).$$

Remarques

- Une variable aléatoire discrète finie admet des moments de tous ordres, ce qui n'est pas forcément le cas pour une variable aléatoire discrète infinie.

Remarques

- Une variable aléatoire discrète finie admet des moments de tous ordres, ce qui n'est pas forcément le cas pour une variable aléatoire discrète infinie.
- Lorsque $X(\Omega) = (x_n)_{n\in\mathbb{N}}$, dire que X est d'espérance finie équivaut à dire que la série de terme général $x_n^r\mathbb{P}(X = x_n)$ est **absolument** convergente et dans ce cas :

$$\mathbb{E}(X) = \sum_{n=0}^{+\infty} x_n^r\mathbb{P}(X = x_n).$$

Remarques

- Une variable aléatoire discrète finie admet des moments de tous ordres, ce qui n'est pas forcément le cas pour une variable aléatoire discrète infinie.
- Lorsque $X(\Omega) = (x_n)_{n\in\mathbb{N}}$, dire que X est d'espérance finie équivaut à dire que la série de terme général $x_n^r\mathbb{P}(X = x_n)$ est **absolument** convergente et dans ce cas :

$$\mathbb{E}(X) = \sum_{n=0}^{+\infty} x_n^r\mathbb{P}(X = x_n).$$

Pour toute la suite, on se limitera au cas où l'ensemble $X(\Omega)$ est infini : $X(\Omega) = \{x_n,\ n \in \mathbb{N}\}$.

Théorème 14

Si X admet un moment d'ordre $r \geqslant 2$, elle admet des moments d'ordre s pour tout $s \in [\![1\,;r]\!]$.

Remarques

- Une variable aléatoire discrète finie admet des moments de tous ordres, ce qui n'est pas forcément le cas pour une variable aléatoire discrète infinie.
- Lorsque $X(\Omega) = (x_n)_{n\in\mathbb{N}}$, dire que X est d'espérance finie équivaut à dire que la série de terme général $x_n^r\mathbb{P}(X = x_n)$ est **absolument** convergente et dans ce cas :
$$\mathbb{E}(X) = \sum_{n=0}^{+\infty} x_n^r\mathbb{P}(X = x_n).$$

Pour toute la suite, on se limitera au cas où l'ensemble $X(\Omega)$ est infini : $X(\Omega) = \{x_n,\ n \in \mathbb{N}\}$.

Théorème 14

Si X admet un moment d'ordre $r \geqslant 2$, elle admet des moments d'ordre s pour tout $s \in [\![1\,;r]\!]$.

Démonstration

Pour tout x réel on a $|x|^{r-1} \leqslant 1 + |x|^r$ (il suffit de distinguer les cas $|x| \leqslant 1$ et $|x| \geqslant 1$).

Remarques

- Une variable aléatoire discrète finie admet des moments de tous ordres, ce qui n'est pas forcément le cas pour une variable aléatoire discrète infinie.
- Lorsque $X(\Omega) = (x_n)_{n\in\mathbb{N}}$, dire que X est d'espérance finie équivaut à dire que la série de terme général $x_n^r\mathbb{P}(X = x_n)$ est **absolument** convergente et dans ce cas :

$$\mathbb{E}(X) = \sum_{n=0}^{+\infty} x_n^r\mathbb{P}(X = x_n).$$

Pour toute la suite, on se limitera au cas où l'ensemble $X(\Omega)$ est infini : $X(\Omega) = \{x_n,\ n \in \mathbb{N}\}$.

Théorème 14

Si X admet un moment d'ordre $r \geqslant 2$, elle admet des moments d'ordre s pour tout $s \in [\![1\,;r]\!]$.

Démonstration

Pour tout x réel on a $|x|^{r-1} \leqslant 1 + |x|^r$ (il suffit de distinguer les cas $|x| \leqslant 1$ et $|x| \geqslant 1$).
Pour tout n notons $p_n = \mathbb{P}(X = x_n)$. Si $m_r(X)$ existe la série $\sum_{n\in\mathbb{N}} p_n\,|x_n|^r$ est convergente donc aussi

$\sum_{n\in\mathbb{N}} p_n(1 + |x_n|^r)$ puisque $\sum_{n=0}^{+\infty} p_n = 1$.

Remarques

- Une variable aléatoire discrète finie admet des moments de tous ordres, ce qui n'est pas forcément le cas pour une variable aléatoire discrète infinie.
- Lorsque $X(\Omega) = (x_n)_{n\in\mathbb{N}}$, dire que X est d'espérance finie équivaut à dire que la série de terme général $x_n^r \mathbb{P}(X = x_n)$ est **absolument** convergente et dans ce cas :

$$\mathbb{E}(X) = \sum_{n=0}^{+\infty} x_n^r \mathbb{P}(X = x_n).$$

Pour toute la suite, on se limitera au cas où l'ensemble $X(\Omega)$ est infini : $X(\Omega) = \{x_n,\ n \in \mathbb{N}\}$.

Théorème 14

Si X admet un moment d'ordre $r \geqslant 2$, elle admet des moments d'ordre s pour tout $s \in [\![1\,;r]\!]$.

Démonstration

Pour tout x réel on a $|x|^{r-1} \leqslant 1 + |x|^r$ (il suffit de distinguer les cas $|x| \leqslant 1$ et $|x| \geqslant 1$).
Pour tout n notons $p_n = \mathbb{P}(X = x_n)$. Si $m_r(X)$ existe la série $\sum\limits_{n\in\mathbb{N}} p_n\, |x_n|^r$ est convergente donc aussi

$\sum\limits_{n\in\mathbb{N}} p_n(1 + |x_n|^r)$ puisque $\sum\limits_{n=0}^{+\infty} p_n = 1$.

Par comparaison de séries à termes positifs, la série de terme général $p_n x_n^{r-1}$ sera donc aussi absolument convergente, c'est-à-dire que $m_{r-1}(X)$ existe.

Théorème 15: (et définition 17)

Soit X une variable aléatoire réelle dont le moment d'ordre 2 (c'est-à-dire $\mathbb{E}(X^2)$) existe. Alors

1. La variable aléatoire $X - \mathbb{E}(X)$ admet un moment d'ordre 2, appelé **variance de** X. Ainsi

$$\mathbb{V}(X) = E\left(\left(X - \mathbb{E}(X)\right)^2\right).$$

Théorème 15: (et définition 17)

Soit X une variable aléatoire réelle dont le moment d'ordre 2 (c'est-à-dire $\mathbb{E}(X^2)$) existe. Alors

1. La variable aléatoire $X - \mathbb{E}(X)$ admet un moment d'ordre 2, appelé **variance de** X. Ainsi

$$\mathbb{V}(X) = E\left(\left(X - \mathbb{E}(X)\right)^2\right).$$

2. On a aussi :

$$\mathbb{V}(X) = \mathbb{E}(X^2) - \mathbb{E}(X)^2 \qquad \text{(formule de Koenig-Huygens)}$$

Théorème 15: (et définition 17)

Soit X une variable aléatoire réelle dont le moment d'ordre 2 (c'est-à-dire $\mathbb{E}(X^2)$) existe. Alors

1. La variable aléatoire $X - \mathbb{E}(X)$ admet un moment d'ordre 2, appelé **variance de** X. Ainsi

$$\mathbb{V}(X) = E\left(\left(X - \mathbb{E}(X)\right)^2\right).$$

2. On a aussi :

$$\mathbb{V}(X) = \mathbb{E}(X^2) - \mathbb{E}(X)^2 \qquad \text{(formule de Koenig-Huygens)}$$

On appelle alors **écart type** de X le réel $\sigma(X) = \sqrt{\mathbb{V}(X)}$.

Théorème 15: (et définition 17)

Soit X une variable aléatoire réelle dont le moment d'ordre 2 (c'est-à-dire $\mathbb{E}(X^2)$) existe. Alors

1. La variable aléatoire $X - \mathbb{E}(X)$ admet un moment d'ordre 2, appelé **variance de** X. Ainsi
$$\mathbb{V}(X) = E\left(\left(X - \mathbb{E}(X)\right)^2\right).$$
2. On a aussi :
$$\mathbb{V}(X) = \mathbb{E}(X^2) - \mathbb{E}(X)^2 \qquad \text{(formule de Koenig-Huygens)}$$

On appelle alors **écart type** de X le réel $\sigma(X) = \sqrt{\mathbb{V}(X)}$.

Démonstration

Puisque X admet un moment d'ordre 2 elle admet aussi une espérance d'après le théorème précédent.

Théorème 15: (et définition 17)

Soit X une variable aléatoire réelle dont le moment d'ordre 2 (c'est-à-dire $\mathbb{E}(X^2)$) existe. Alors

1. La variable aléatoire $X - \mathbb{E}(X)$ admet un moment d'ordre 2, appelé **variance de** X. Ainsi
$$\mathbb{V}(X) = E\left(\left(X - \mathbb{E}(X)\right)^2\right).$$
2. On a aussi :
$$\mathbb{V}(X) = \mathbb{E}(X^2) - \mathbb{E}(X)^2 \qquad \text{(formule de Koenig-Huygens)}$$

On appelle alors **écart type** de X le réel $\sigma(X) = \sqrt{\mathbb{V}(X)}$.

Démonstration

Puisque X admet un moment d'ordre 2 elle admet aussi une espérance d'après le théorème précédent.
Puisque :
$$\left(X - \mathbb{E}(X)\right)^2 = X^2 - 2\mathbb{E}(X).X + \mathbb{E}(X)^2,$$

Théorème 15: (et définition 17)

Soit X une variable aléatoire réelle dont le moment d'ordre 2 (c'est-à-dire $\mathbb{E}(X^2)$) existe. Alors

1. La variable aléatoire $X - \mathbb{E}(X)$ admet un moment d'ordre 2, appelé **variance de** X. Ainsi

$$\mathbb{V}(X) = E\left(\left(X - \mathbb{E}(X)\right)^2\right).$$

2. On a aussi :

$$\mathbb{V}(X) = \mathbb{E}(X^2) - \mathbb{E}(X)^2 \qquad \text{(formule de Koenig-Huygens)}$$

On appelle alors **écart type** de X le réel $\sigma(X) = \sqrt{\mathbb{V}(X)}$.

Démonstration

Puisque X admet un moment d'ordre 2 elle admet aussi une espérance d'après le théorème précédent. Puisque :

$$\left(X - \mathbb{E}(X)\right)^2 = X^2 - 2\mathbb{E}(X).X + \mathbb{E}(X)^2,$$

la variable aléatoire $\left(X - \mathbb{E}(X)\right)^2$ admet aussi une espérance et par linéarité de l'espérance :

Théorème 15: (et définition 17)

Soit X une variable aléatoire réelle dont le moment d'ordre 2 (c'est-à-dire $\mathbb{E}(X^2)$) existe. Alors

1. La variable aléatoire $X - \mathbb{E}(X)$ admet un moment d'ordre 2, appelé **variance de** X. Ainsi

$$\mathbb{V}(X) = E\left(\left(X - \mathbb{E}(X)\right)^2\right).$$

2. On a aussi :

$$\mathbb{V}(X) = \mathbb{E}(X^2) - \mathbb{E}(X)^2 \qquad \text{(formule de Koenig-Huygens)}$$

On appelle alors **écart type** de X le réel $\sigma(X) = \sqrt{\mathbb{V}(X)}$.

Démonstration

Puisque X admet un moment d'ordre 2 elle admet aussi une espérance d'après le théorème précédent. Puisque :

$$\left(X - \mathbb{E}(X)\right)^2 = X^2 - 2\mathbb{E}(X).X + \mathbb{E}(X)^2,$$

la variable aléatoire $\left(X - \mathbb{E}(X)\right)^2$ admet aussi une espérance et par linéarité de l'espérance :

$$\mathbb{E}\left(\left(X - \mathbb{E}(X)\right)^2\right) = \mathbb{E}(X^2) - 2\mathbb{E}(X)\mathbb{E}(X) + \mathbb{E}(X)^2 = \mathbb{E}(X^2) - \mathbb{E}(X)^2.$$

Proposition 13

Soit X une variable aléatoire réelle dont la variance $\mathbb{V}(X)$ existe.
Si a et b sont deux réels, la variable $aX + b$ admet aussi une variance et :

$$\mathbb{V}(aX + b) = a^2\mathbb{V}(X)\,.$$

Proposition 13

Soit X une variable aléatoire réelle dont la variance $\mathbb{V}(X)$ existe.
Si a et b sont deux réels, la variable $aX + b$ admet aussi une variance et :

$$\mathbb{V}(aX + b) = a^2\mathbb{V}(X)\,.$$

Démonstration

Déjà, puisque $\mathbb{V}(X)$ existe il en est de même de $\mathbb{E}(X)$, par le théorème 14.

Proposition 13

Soit X une variable aléatoire réelle dont la variance $\mathbb{V}(X)$ existe.
Si a et b sont deux réels, la variable $aX+b$ admet aussi une variance et :

$$\mathbb{V}(aX+b) = a^2\mathbb{V}(X)\,.$$

Démonstration

Déjà, puisque $\mathbb{V}(X)$ existe il en est de même de $\mathbb{E}(X)$, par le théorème 14.
On a : $(aX+b)^2 = a^2X^2 + 2abX + b^2$ donc par linéarité $\mathbb{E}\Big((aX+b)^2\Big)$ existe puis :

Proposition 13

Soit X une variable aléatoire réelle dont la variance $\mathbb{V}(X)$ existe.
Si a et b sont deux réels, la variable $aX + b$ admet aussi une variance et :

$$\mathbb{V}(aX+b) = a^2\mathbb{V}(X)\,.$$

Démonstration

Déjà, puisque $\mathbb{V}(X)$ existe il en est de même de $\mathbb{E}(X)$, par le théorème 14.
On a : $(aX+b)^2 = a^2X^2 + 2abX + b^2$ donc par linéarité $\mathbb{E}\big((aX+b)^2\big)$ existe puis :

$$\mathbb{V}(aX+b) = \mathbb{E}\big((aX+b)^2\big) - \big(\mathbb{E}(aX+b)\big)^2 = \mathbb{E}\big((aX+b)^2\big) - \big(a\mathbb{E}(X)+b\big)^2$$

Proposition 13

Soit X une variable aléatoire réelle dont la variance $\mathbb{V}(X)$ existe.
Si a et b sont deux réels, la variable $aX+b$ admet aussi une variance et :

$$\mathbb{V}(aX+b) = a^2\mathbb{V}(X)\,.$$

Démonstration

Déjà, puisque $\mathbb{V}(X)$ existe il en est de même de $\mathbb{E}(X)$, par le théorème 14.
On a : $(aX+b)^2 = a^2X^2 + 2abX + b^2$ donc par linéarité $\mathbb{E}\Big((aX+b)^2\Big)$ existe puis :

$$\begin{aligned}\mathbb{V}(aX+b) &= \mathbb{E}\Big((aX+b)^2\Big) - \Big(\mathbb{E}(aX+b)\Big)^2 = \mathbb{E}\Big((aX+b)^2\Big) - \Big(a\mathbb{E}(X)+b\Big)^2 \\ &= a^2\mathbb{E}(X^2) + 2ab\mathbb{E}(X) + b^2 - \Big(a^2\mathbb{E}(X)^2 + b^2 + 2ab\mathbb{E}(X)\Big) = a^2\mathbb{V}(X).\end{aligned}$$

Proposition 13

Soit X une variable aléatoire réelle dont la variance $\mathbb{V}(X)$ existe.
Si a et b sont deux réels, la variable $aX+b$ admet aussi une variance et :

$$\mathbb{V}(aX+b) = a^2\mathbb{V}(X)\,.$$

Démonstration

Déjà, puisque $\mathbb{V}(X)$ existe il en est de même de $\mathbb{E}(X)$, par le théorème 14.
On a : $(aX+b)^2 = a^2X^2 + 2abX + b^2$ donc par linéarité $\mathbb{E}\Big((aX+b)^2\Big)$ existe puis :

$$\begin{aligned}\mathbb{V}(aX+b) = \mathbb{E}\Big((aX+b)^2\Big) - \Big(\mathbb{E}(aX+b)\Big)^2 &= \mathbb{E}\Big((aX+b)^2\Big) - \Big(a\mathbb{E}(X)+b\Big)^2 \\ &= a^2\mathbb{E}(X^2) + 2ab\mathbb{E}(X) + b^2 - \Big(a^2\mathbb{E}(X)^2 + b^2 + 2ab\mathbb{E}(X)\Big) = a^2\mathbb{V}(X).\end{aligned}$$

Définition 18

Une variable aléatoire X qui admet un moment d'ordre 2 est dite **réduite** si $\sigma(X) = 1$.

Proposition 13

Soit X une variable aléatoire réelle dont la variance $\mathbb{V}(X)$ existe.
Si a et b sont deux réels, la variable $aX+b$ admet aussi une variance et :

$$\mathbb{V}(aX+b) = a^2\mathbb{V}(X)\,.$$

Démonstration

Déjà, puisque $\mathbb{V}(X)$ existe il en est de même de $\mathbb{E}(X)$, par le théorème 14.
On a : $(aX+b)^2 = a^2X^2 + 2abX + b^2$ donc par linéarité $\mathbb{E}\big((aX+b)^2\big)$ existe puis :

$$\begin{aligned}\mathbb{V}(aX+b) &= \mathbb{E}\big((aX+b)^2\big) - \big(\mathbb{E}(aX+b)\big)^2 = \mathbb{E}\big((aX+b)^2\big) - \big(a\mathbb{E}(X)+b\big)^2 \\ &= a^2\mathbb{E}(X^2) + 2ab\mathbb{E}(X) + b^2 - \big(a^2\mathbb{E}(X)^2 + b^2 + 2ab\mathbb{E}(X)\big) = a^2\mathbb{V}(X).\end{aligned}$$

Définition 18

Une variable aléatoire X qui admet un moment d'ordre 2 est dite **réduite** si $\sigma(X) = 1$.

Proposition 14

Si X est une variable aléatoire admettant un moment d'ordre 2 et si $\sigma(X) \neq 0$, alors la variable aléatoire $\dfrac{X - \mathbb{E}(X)}{\sigma(X)}$ est centrée réduite.

Proposition 13

Soit X une variable aléatoire réelle dont la variance $\mathbb{V}(X)$ existe.
Si a et b sont deux réels, la variable $aX+b$ admet aussi une variance et :

$$\mathbb{V}(aX+b) = a^2\mathbb{V}(X).$$

Démonstration

Déjà, puisque $\mathbb{V}(X)$ existe il en est de même de $\mathbb{E}(X)$, par le théorème 14.
On a : $(aX+b)^2 = a^2X^2 + 2abX + b^2$ donc par linéarité $\mathbb{E}\big((aX+b)^2\big)$ existe puis :

$$\begin{aligned}\mathbb{V}(aX+b) &= \mathbb{E}\big((aX+b)^2\big) - \big(\mathbb{E}(aX+b)\big)^2 = \mathbb{E}\big((aX+b)^2\big) - \big(a\mathbb{E}(X)+b\big)^2 \\ &= a^2\mathbb{E}(X^2) + 2ab\mathbb{E}(X) + b^2 - \big(a^2\mathbb{E}(X)^2 + b^2 + 2ab\mathbb{E}(X)\big) = a^2\mathbb{V}(X).\end{aligned}$$

Définition 18

Une variable aléatoire X qui admet un moment d'ordre 2 est dite **réduite** si $\sigma(X) = 1$.

Proposition 14

Si X est une variable aléatoire admettant un moment d'ordre 2 et si $\sigma(X) \neq 0$, alors la variable aléatoire $\dfrac{X-\mathbb{E}(X)}{\sigma(X)}$ est centrée réduite.

Démonstration

Trivial.

Théorème 16: Inégalité de Bienaymé-Tchebychev

Soit X une variable aléatoire réelle discrète admettant un moment d'ordre 2. Alors, pour tout réel $\varepsilon > 0$:

$$\mathbb{P}\Big(\big| X - \mathbb{E}(X) \big| \geqslant \varepsilon \Big) \leqslant \frac{\mathbb{V}(X)}{\varepsilon^2}.$$

Théorème 16: Inégalité de Bienaymé-Tchebychev

Soit X une variable aléatoire réelle discrète admettant un moment d'ordre 2. Alors, pour tout réel $\varepsilon > 0$:

$$\mathbb{P}\Big(\big|X - \mathbb{E}(X)\big| \geqslant \varepsilon\Big) \leqslant \frac{\mathbb{V}(X)}{\varepsilon^2}\,.$$

Démonstration

On applique l'inégalité de Markov à la variable aléatoire réelle positive $(X - \mathbb{E}(X))^2$:

$$\mathbb{P}((X - \mathbb{E}(X))^2 \geqslant \varepsilon^2) \leqslant \frac{\mathbb{E}((X - \mathbb{E}(X))^2)}{\varepsilon^2}$$

Théorème 16: Inégalité de Bienaymé-Tchebychev

Soit X une variable aléatoire réelle discrète admettant un moment d'ordre 2. Alors, pour tout réel $\varepsilon > 0$:

$$\mathbb{P}\Big(\big|X - \mathbb{E}(X)\big| \geqslant \varepsilon \Big) \leqslant \frac{\mathbb{V}(X)}{\varepsilon^2}.$$

Remarque : Cette inégalité montre que la variance permet de mesurer la dispersion de la variable X autour de sa moyenne.

Théorème 16: Inégalité de Bienaymé-Tchebychev

Soit X une variable aléatoire réelle discrète admettant un moment d'ordre 2. Alors, pour tout réel $\varepsilon > 0$:

$$\mathbb{P}\Big(\big|X - \mathbb{E}(X)\big| \geqslant \varepsilon\Big) \leqslant \frac{\mathbb{V}(X)}{\varepsilon^2}.$$

Remarque : Cette inégalité montre que la variance permet de mesurer la dispersion de la variable X autour de sa moyenne.

Exemple

Combien de lancers d'une pièce équilibrée suffit-il d'effectuer pour pouvoir affirmer avec un risque d'erreur inférieur à 5% que la fréquence d'apparition de pile différera de $\frac{1}{2}$ d'au plus 10^{-2} ?

Théorème 16: Inégalité de Bienaymé-Tchebychev

Soit X une variable aléatoire réelle discrète admettant un moment d'ordre 2. Alors, pour tout réel $\varepsilon > 0$:

$$\mathbb{P}\Big(\big|X - \mathbb{E}(X)\big| \geqslant \varepsilon\Big) \leqslant \frac{\mathbb{V}(X)}{\varepsilon^2}\,.$$

Remarque : Cette inégalité montre que la variance permet de mesurer la dispersion de la variable X autour de sa moyenne.

Exemple

Combien de lancers d'une pièce équilibrée suffit-il d'effectuer pour pouvoir affirmer avec un risque d'erreur inférieur à 5% que la fréquence d'apparition de pile différera de $\frac{1}{2}$ d'au plus 10^{-2} ?

Solution

Soit n le nombre de lancers et F_n la fréquence de piles obtenus. On cherche donc n tel que

$\mathbb{P}\left(\left|F_n - \frac{1}{2}\right| > 0,01\right) \leqslant 0,05\,.$

Théorème 16: Inégalité de Bienaymé-Tchebychev

Soit X une variable aléatoire réelle discrète admettant un moment d'ordre 2. Alors, pour tout réel $\varepsilon > 0$:

$$\mathbb{P}\Big(\big|X - \mathbb{E}(X)\big| \geqslant \varepsilon\Big) \leqslant \frac{\mathbb{V}(X)}{\varepsilon^2}.$$

Remarque : Cette inégalité montre que la variance permet de mesurer la dispersion de la variable X autour de sa moyenne.

Exemple

Combien de lancers d'une pièce équilibrée suffit-il d'effectuer pour pouvoir affirmer avec un risque d'erreur inférieur à 5% que la fréquence d'apparition de pile différera de $\frac{1}{2}$ d'au plus 10^{-2} ?

Solution

Soit n le nombre de lancers et F_n la fréquence de piles obtenus. On cherche donc n tel que $\mathbb{P}\left(\left|F_n - \frac{1}{2}\right| > 0,01\right) \leqslant 0,05$. Si on note X_n le nombre de pile obtenus, $F_n = \dfrac{1}{n}X_n$, et $X_n \hookrightarrow \mathcal{B}(n, \frac{1}{2})$. Donc $\mathbb{E}(X_n) = np = \frac{n}{2}$ et $\mathbb{V}(X_n) = npq = \frac{n}{4}$ (voir formules plus loin), de sorte que $\mathbb{E}(F_n) = \frac{1}{2}$ et $\mathbb{V}(F_n) = \frac{1}{4n}$.

Théorème 16: Inégalité de Bienaymé-Tchebychev

Soit X une variable aléatoire réelle discrète admettant un moment d'ordre 2. Alors, pour tout réel $\varepsilon > 0$:

$$\mathbb{P}\Big(\big|X - \mathbb{E}(X)\big| \geqslant \varepsilon\Big) \leqslant \frac{\mathbb{V}(X)}{\varepsilon^2}\,.$$

Remarque : Cette inégalité montre que la variance permet de mesurer la dispersion de la variable X autour de sa moyenne.

Exemple

Combien de lancers d'une pièce équilibrée suffit-il d'effectuer pour pouvoir affirmer avec un risque d'erreur inférieur à 5% que la fréquence d'apparition de pile différera de $\frac{1}{2}$ d'au plus 10^{-2} ?

Solution

Soit n le nombre de lancers et F_n la fréquence de piles obtenus. On cherche donc n tel que $\mathbb{P}\left(\left|F_n - \frac{1}{2}\right| > 0,01\right) \leqslant 0,05$. Si on note X_n le nombre de pile obtenus, $F_n = \dfrac{1}{n}X_n$, et $X_n \hookrightarrow \mathcal{B}(n, \frac{1}{2})$. Donc $\mathbb{E}(X_n) = np = \frac{n}{2}$ et $\mathbb{V}(X_n) = npq = \frac{n}{4}$ (voir formules plus loin), de sorte que $\mathbb{E}(F_n) = \frac{1}{2}$ et $\mathbb{V}(F_n) = \frac{1}{4n}$.
L'inégalité de BT s'écrit donc ici

$$\mathbb{P}\left(\left|F_n - \frac{1}{2}\right| \geqslant \varepsilon\right) \leqslant \frac{1}{4n\varepsilon^2}\,.$$

Théorème 16: Inégalité de Bienaymé-Tchebychev

Soit X une variable aléatoire réelle discrète admettant un moment d'ordre 2. Alors, pour tout réel $\varepsilon > 0$:

$$\mathbb{P}\Big(\big|X - \mathbb{E}(X)\big| \geqslant \varepsilon\Big) \leqslant \frac{\mathbb{V}(X)}{\varepsilon^2}\,.$$

Remarque : Cette inégalité montre que la variance permet de mesurer la dispersion de la variable X autour de sa moyenne.

Exemple

Combien de lancers d'une pièce équilibrée suffit-il d'effectuer pour pouvoir affirmer avec un risque d'erreur inférieur à 5% que la fréquence d'apparition de pile différera de $\frac{1}{2}$ d'au plus 10^{-2} ?

Solution

Soit n le nombre de lancers et F_n la fréquence de piles obtenus. On cherche donc n tel que $\mathbb{P}\left(\left|F_n - \frac{1}{2}\right| > 0,01\right) \leqslant 0,05$. Si on note X_n le nombre de pile obtenus, $F_n = \dfrac{1}{n}X_n$, et $X_n \hookrightarrow \mathcal{B}(n, \frac{1}{2})$. Donc $\mathbb{E}(X_n) = np = \frac{n}{2}$ et $\mathbb{V}(X_n) = npq = \frac{n}{4}$ (voir formules plus loin), de sorte que $\mathbb{E}(F_n) = \frac{1}{2}$ et $\mathbb{V}(F_n) = \frac{1}{4n}$.
L'inégalité de BT s'écrit donc ici

$$\mathbb{P}\left(\left|F_n - \frac{1}{2}\right| \geqslant \varepsilon\right) \leqslant \frac{1}{4n\varepsilon^2}\,.$$

Pour $\varepsilon = 10^{-2}$, il suffit donc d'avoir $\dfrac{10^4}{4n} \leqslant 5.10^{-2}$ soit $n \geqslant 50000$.

Théorème 16: Inégalité de Bienaymé-Tchebychev

Soit X une variable aléatoire réelle discrète admettant un moment d'ordre 2. Alors, pour tout réel $\varepsilon > 0$:

$$\mathbb{P}\Big(\big|X - \mathbb{E}(X)\big| \geqslant \varepsilon\Big) \leqslant \frac{\mathbb{V}(X)}{\varepsilon^2}.$$

Remarque : Cette inégalité montre que la variance permet de mesurer la dispersion de la variable X autour de sa moyenne.

Exemple

Combien de lancers d'une pièce équilibrée suffit-il d'effectuer pour pouvoir affirmer avec un risque d'erreur inférieur à 5% que la fréquence d'apparition de pile différera de $\frac{1}{2}$ d'au plus 10^{-2} ?

Corollaire:

> Soit X une variable aléatoire réelle discrète admettant un moment d'ordre 2. Notons $m = \mathbb{E}(X)$.
>
> Si $\mathbb{V}(X) = 0$, alors $\mathbb{P}(X = m) = 1$ (X est **quasi certaine**).

Théorème 16: Inégalité de Bienaymé-Tchebychev

Soit X une variable aléatoire réelle discrète admettant un moment d'ordre 2. Alors, pour tout réel $\varepsilon > 0$:

$$\mathbb{P}\Big(\big|X - \mathbb{E}(X)\big| \geqslant \varepsilon\Big) \leqslant \frac{\mathbb{V}(X)}{\varepsilon^2}\,.$$

Remarque : Cette inégalité montre que la variance permet de mesurer la dispersion de la variable X autour de sa moyenne.

Exemple

Combien de lancers d'une pièce équilibrée suffit-il d'effectuer pour pouvoir affirmer avec un risque d'erreur inférieur à 5% que la fréquence d'apparition de pile différera de $\frac{1}{2}$ d'au plus 10^{-2} ?

Corollaire:

> Soit X une variable aléatoire réelle discrète admettant un moment d'ordre 2. Notons $m = \mathbb{E}(X)$.
>
> Si $\mathbb{V}(X) = 0$, alors $\mathbb{P}(X = m) = 1$ (X est **quasi certaine**).

Démonstration

L'événement $(X \neq m)$ est la réunion des évènements $A_n = \left(|X - m| > \frac{1}{n}\right)$.

Théorème 16: Inégalité de Bienaymé-Tchebychev

Soit X une variable aléatoire réelle discrète admettant un moment d'ordre 2. Alors, pour tout réel $\varepsilon > 0$:

$$\mathbb{P}\Big(\big|X - \mathbb{E}(X)\big| \geqslant \varepsilon\Big) \leqslant \frac{\mathbb{V}(X)}{\varepsilon^2}.$$

Remarque : Cette inégalité montre que la variance permet de mesurer la dispersion de la variable X autour de sa moyenne.

Exemple

Combien de lancers d'une pièce équilibrée suffit-il d'effectuer pour pouvoir affirmer avec un risque d'erreur inférieur à 5% que la fréquence d'apparition de pile différera de $\frac{1}{2}$ d'au plus 10^{-2} ?

Corollaire:

> Soit X une variable aléatoire réelle discrète admettant un moment d'ordre 2. Notons $m = \mathbb{E}(X)$.
>
> Si $\mathbb{V}(X) = 0$, alors $\mathbb{P}(X = m) = 1$ (X est **quasi certaine**).

Démonstration

L'événement $(X \neq m)$ est la réunion des évènements $A_n = \left(|X - m| > \frac{1}{n}\right)$. Or les ensembles A_n forment une suite croissante d'événements ; par conséquent, $\mathbb{P}(X \neq m) = \lim\limits_{n \to +\infty} \mathbb{P}(A_n)$.

Théorème 16: Inégalité de Bienaymé-Tchebychev

Soit X une variable aléatoire réelle discrète admettant un moment d'ordre 2. Alors, pour tout réel $\varepsilon > 0$:

$$\mathbb{P}\Big(\big|X - \mathbb{E}(X)\big| \geqslant \varepsilon\Big) \leqslant \frac{\mathbb{V}(X)}{\varepsilon^2}.$$

Remarque : Cette inégalité montre que la variance permet de mesurer la dispersion de la variable X autour de sa moyenne.

Exemple

Combien de lancers d'une pièce équilibrée suffit-il d'effectuer pour pouvoir affirmer avec un risque d'erreur inférieur à 5% que la fréquence d'apparition de pile différera de $\frac{1}{2}$ d'au plus 10^{-2} ?

Corollaire:

> Soit X une variable aléatoire réelle discrète admettant un moment d'ordre 2. Notons $m = \mathbb{E}(X)$.
>
> Si $\mathbb{V}(X) = 0$, alors $\mathbb{P}(X = m) = 1$ (X est **quasi certaine**).

Démonstration

L'événement $(X \neq m)$ est la réunion des évènements $A_n = \left(|X - m| > \frac{1}{n}\right)$. Or les ensembles A_n forment une suite croissante d'événements ; par conséquent, $\mathbb{P}(X \neq m) = \lim\limits_{n\to+\infty} \mathbb{P}(A_n)$. Or puisque $\mathbb{V}(X) = 0$, $P\left(|X - m| > \frac{1}{n}\right) = 0$ d'après l'inégalité de BT d'où le résultat.

Théorème 16: Inégalité de Bienaymé-Tchebychev

Soit X une variable aléatoire réelle discrète admettant un moment d'ordre 2. Alors, pour tout réel $\varepsilon > 0$:

$$\mathbb{P}\Big(\big|X - \mathbb{E}(X)\big| \geqslant \varepsilon\Big) \leqslant \frac{\mathbb{V}(X)}{\varepsilon^2}.$$

Remarque : Cette inégalité montre que la variance permet de mesurer la dispersion de la variable X autour de sa moyenne.

Exemple

Combien de lancers d'une pièce équilibrée suffit-il d'effectuer pour pouvoir affirmer avec un risque d'erreur inférieur à 5% que la fréquence d'apparition de pile différera de $\frac{1}{2}$ d'au plus 10^{-2} ?

Corollaire:

> Soit X une variable aléatoire réelle discrète admettant un moment d'ordre 2. Notons $m = \mathbb{E}(X)$.
>
> Si $\mathbb{V}(X) = 0$, alors $\mathbb{P}(X = m) = 1$ (X est **quasi certaine**).

Démonstration

L'événement $(X \neq m)$ est la réunion des évènements $A_n = \left(|X - m| > \frac{1}{n}\right)$. Or les ensembles A_n forment une suite croissante d'événements ; par conséquent, $\mathbb{P}(X \neq m) = \lim\limits_{n \to +\infty} \mathbb{P}(A_n)$. Or puisque $\mathbb{V}(X) = 0$, $P\left(|X - m| > \frac{1}{n}\right) = 0$ d'après l'inégalité de BT d'où le résultat.

Remarque : il est plus rapide de remarquer que, la variable $(X - \mathbb{E}(X))^2$ étant positive d'espérance nulle, elle est presque sûrement nulle en vertu de la proposition 10, mais la démonstration précédente est instructive....

Moments des lois usuelles

Théorème 17: Loi uniforme

Soit $X \hookrightarrow \mathcal{U}\big([\![1\,;n]\!]\big)$. Alors : $\mathbb{E}(X) = \dfrac{n+1}{2}$ et $\mathbb{V}(X) = \dfrac{n^2-1}{12}$.

Moments des lois usuelles

Théorème 17: Loi uniforme

Soit $X \hookrightarrow \mathcal{U}\big([\![1\,;n]\!]\big)$. Alors : $\mathbb{E}(X) = \dfrac{n+1}{2}$ et $\mathbb{V}(X) = \dfrac{n^2-1}{12}$.

Démonstration

C'est immédiat en utilisant : $\displaystyle\sum_{k=1}^{n} k = \frac{n(n+1)}{2}$ et $\displaystyle\sum_{k=1}^{n} k^2 = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6}$.

Moments des lois usuelles

Théorème 17: Loi uniforme

Soit $X \hookrightarrow \mathcal{U}\big([\![1\,;\,n]\!]\big)$. Alors : $\mathbb{E}(X) = \dfrac{n+1}{2}$ et $\mathbb{V}(X) = \dfrac{n^2-1}{12}$.

Théorème 18: Loi binomiale

Soit $X \hookrightarrow \mathcal{B}(n,p)$. Alors : $\mathbb{E}(X) = np$ et $\mathbb{V}(X) = npq$ $(q = 1-p)$.

Moments des lois usuelles

Théorème 17: Loi uniforme

Soit $X \hookrightarrow \mathcal{U}\big([\![1\,;n]\!]\big)$. Alors : $\mathbb{E}(X) = \dfrac{n+1}{2}$ et $\mathbb{V}(X) = \dfrac{n^2-1}{12}$.

Théorème 18: Loi binomiale

Soit $X \hookrightarrow \mathcal{B}(n,p)$. Alors : $\mathbb{E}(X) = np$ et $\mathbb{V}(X) = npq$ $(q = 1-p)$.

Démonstration

$$\mathbb{E}(X) = \sum_{k=0}^{n} k\binom{n}{k}p^k(1-p)^{n-k}.$$

Moments des lois usuelles

Théorème 17: Loi uniforme

Soit $X \hookrightarrow \mathcal{U}(\llbracket 1\,;\,n \rrbracket)$. Alors : $\mathbb{E}(X) = \dfrac{n+1}{2}$ et $\mathbb{V}(X) = \dfrac{n^2-1}{12}$.

Théorème 18: Loi binomiale

Soit $X \hookrightarrow \mathcal{B}(n,p)$. Alors : $\mathbb{E}(X) = np$ et $\mathbb{V}(X) = npq \quad (q = 1-p)$.

Démonstration

$\mathbb{E}(X) = \displaystyle\sum_{k=0}^{n} k\binom{n}{k}p^k(1-p)^{n-k}$. Or $k\dbinom{n}{k} = n\dbinom{n-1}{k-1}$ donc :

$$\mathbb{E}(X) = np\sum_{k=1}^{n}\binom{n-1}{k-1}p^{k-1}(1-p)^{(n-1)-(k-1)} = np(p+(1-p))^{n-1} = np.$$

Moments des lois usuelles

Théorème 17: Loi uniforme

Soit $X \hookrightarrow \mathcal{U}\big([\![1\,;n]\!]\big)$. Alors : $\mathbb{E}(X) = \dfrac{n+1}{2}$ et $\mathbb{V}(X) = \dfrac{n^2-1}{12}$.

Théorème 18: Loi binomiale

Soit $X \hookrightarrow \mathcal{B}(n,p)$. Alors : $\mathbb{E}(X) = np$ et $\mathbb{V}(X) = npq$ $(q = 1-p)$.

Démonstration

$\mathbb{E}(X) = \displaystyle\sum_{k=0}^{n} k\binom{n}{k}p^k(1-p)^{n-k}$. Or $k\dbinom{n}{k} = n\dbinom{n-1}{k-1}$ donc :

$$\mathbb{E}(X) = np\sum_{k=1}^{n}\binom{n-1}{k-1}p^{k-1}(1-p)^{(n-1)-(k-1)} = np(p+(1-p))^{n-1} = np\,.$$

À l'aide de la formule de transfert :

$$\mathbb{E}(X(X-1)) = \sum_{\substack{\cancel{k=0} \\ k=2}}^{n} k(k-1)\binom{n}{k}p^k(1-p)^{n-k} = n(n-1)p^2\sum_{k=2}^{n}\binom{n-2}{k-2}p^{k-2}(1-p)^{(n-2)-(k-2)} = n(n-1)p^2$$

Moments des lois usuelles

Théorème 17: Loi uniforme

Soit $X \hookrightarrow \mathcal{U}\left(\llbracket 1\,;n\rrbracket\right)$. Alors : $\mathbb{E}(X)=\dfrac{n+1}{2}$ et $\mathbb{V}(X)=\dfrac{n^2-1}{12}$.

Théorème 18: Loi binomiale

Soit $X \hookrightarrow \mathcal{B}(n,p)$. Alors : $\mathbb{E}(X)=np$ et $\mathbb{V}(X)=npq \quad (q=1-p)$.

Démonstration

$\mathbb{E}(X)=\displaystyle\sum_{k=0}^{n} k\binom{n}{k}p^k(1-p)^{n-k}$. Or $k\displaystyle\binom{n}{k}=n\binom{n-1}{k-1}$ donc :

$$\mathbb{E}(X)=np\sum_{k=1}^{n}\binom{n-1}{k-1}p^{k-1}(1-p)^{(n-1)-(k-1)}=np(p+(1-p))^{n-1}=np.$$

À l'aide de la formule de transfert :

$$\mathbb{E}(X(X-1))=\sum_{\substack{\cancel{k=0}\\k=2}}^{n} k(k-1)\binom{n}{k}p^k(1-p)^{n-k}=n(n-1)p^2\sum_{k=2}^{n}\binom{n-2}{k-2}p^{k-2}(1-p)^{(n-2)-(k-2)}=n(n-1)p^2$$

d'où : $\mathbb{V}(X)=\mathbb{E}(X^2)-\mathbb{E}(X^2)=\mathbb{E}(X(X-1))+\mathbb{E}(X)-\mathbb{E}(X)^2=n(n-1)p^2+np-n^2p^2=np(1-p)$.

Théorème 19: Loi géométrique

Soit $X \hookrightarrow \mathcal{G}(p)$. Alors :

$$\mathbb{E}(X) = \frac{1}{p} \quad \text{et} \quad \mathbb{V}(X) = \frac{q}{p^2}\,.$$

Théorème 19: Loi géométrique

Soit $X \hookrightarrow \mathcal{G}(p)$. Alors :

$$\mathbb{E}(X) = \frac{1}{p} \quad \text{et} \quad \mathbb{V}(X) = \frac{q}{p^2}\cdot$$

Démonstration

$\mathbb{E}(X) = \displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty} n\mathbb{P}(X = n) = \sum_{n=1}^{+\infty} npq^{n-1}$ (sous réserve de convergence, ce qui est fait ci-dessous).

Théorème 19: Loi géométrique

Soit $X \hookrightarrow \mathcal{G}(p)$. Alors :

$$\mathbb{E}(X) = \frac{1}{p} \quad \text{et} \quad \mathbb{V}(X) = \frac{q}{p^2}\,.$$

Démonstration

$\mathbb{E}(X) = \sum_{n=1}^{+\infty} n\mathbb{P}(X = n) = \sum_{n=1}^{+\infty} npq^{n-1}$ (sous réserve de convergence, ce qui est fait ci-dessous).

Or pour tout $x \in \left]-1\,;1\right[$, $\sum_{n=0}^{+\infty} x^n = \frac{1}{1-x}$ d'où en dérivant cette série entière (c'est licite, cf. cours correspondant), $\sum_{n=1}^{+\infty} nx^{n-1} = \frac{1}{(1-x)^2}$.

Théorème 19: Loi géométrique

Soit $X \hookrightarrow \mathcal{G}(p)$. Alors :

$$\mathbb{E}(X) = \frac{1}{p} \quad \text{et} \quad \mathbb{V}(X) = \frac{q}{p^2}\,.$$

Démonstration

$\mathbb{E}(X) = \sum_{n=1}^{+\infty} n\mathbb{P}(X = n) = \sum_{n=1}^{+\infty} npq^{n-1}$ (sous réserve de convergence, ce qui est fait ci-dessous).

Or pour tout $x \in \,]-1\,;1[$, $\sum_{n=0}^{+\infty} x^n = \frac{1}{1-x}$ d'où en dérivant cette série entière (c'est licite, cf. cours correspondant), $\sum_{n=1}^{+\infty} nx^{n-1} = \frac{1}{(1-x)^2}$. On en tire : $\mathbb{E}(X) = p\frac{1}{(1-q)^2} = \frac{1}{p}\,.$

Théorème 19: Loi géométrique

Soit $X \hookrightarrow \mathcal{G}(p)$. Alors :

$$\mathbb{E}(X) = \frac{1}{p} \quad \text{et} \quad \mathbb{V}(X) = \frac{q}{p^2}\,.$$

Démonstration

$\mathbb{E}(X) = \sum_{n=1}^{+\infty} n\mathbb{P}(X = n) = \sum_{n=1}^{+\infty} npq^{n-1}$ (sous réserve de convergence, ce qui est fait ci-dessous).

Or pour tout $x \in \left]-1\,;1\right[$, $\sum_{n=0}^{+\infty} x^n = \frac{1}{1-x}$ d'où en dérivant cette série entière (c'est licite, cf. cours correspondant), $\sum_{n=1}^{+\infty} nx^{n-1} = \frac{1}{(1-x)^2}$. On en tire : $\mathbb{E}(X) = p\frac{1}{(1-q)^2} = \frac{1}{p}\,.$

Puis $\mathbb{E}(X(X-1)) = \sum_{n=1}^{+\infty} n(n-1)pq^{n-1}$.

Théorème 19: Loi géométrique

Soit $X \hookrightarrow \mathcal{G}(p)$. Alors :

$$\mathbb{E}(X) = \frac{1}{p} \quad \text{et} \quad \mathbb{V}(X) = \frac{q}{p^2}\cdot$$

Démonstration

$\mathbb{E}(X) = \displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty} n\mathbb{P}(X=n) = \sum_{n=1}^{+\infty} npq^{n-1}$ (sous réserve de convergence, ce qui est fait ci-dessous).

Or pour tout $x \in \,]-1\,;1[$, $\displaystyle\sum_{n=0}^{+\infty} x^n = \frac{1}{1-x}$ d'où en dérivant cette série entière (c'est licite, cf. cours correspondant), $\displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty} nx^{n-1} = \frac{1}{(1-x)^2}$. On en tire : $\mathbb{E}(X) = p\dfrac{1}{(1-q)^2} = \dfrac{1}{p}\cdot$

Puis $\mathbb{E}(X(X-1)) = \displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty} n(n-1)pq^{n-1}$. En dérivant la série entière précédente on a , pour tout $x \in \,]-1\,;1[$,

$\displaystyle\sum_{n=2}^{+\infty} n(n-1)x^{n-2} = \frac{2}{(1-x)^3}$.

Théorème 19: Loi géométrique

Soit $X \hookrightarrow \mathcal{G}(p)$. Alors :

$$\mathbb{E}(X) = \frac{1}{p} \quad \text{et} \quad \mathbb{V}(X) = \frac{q}{p^2}\,.$$

Démonstration

$\mathbb{E}(X) = \sum_{n=1}^{+\infty} n\mathbb{P}(X=n) = \sum_{n=1}^{+\infty} npq^{n-1}$ (sous réserve de convergence, ce qui est fait ci-dessous).

Or pour tout $x \in]-1\,;1[$, $\sum_{n=0}^{+\infty} x^n = \frac{1}{1-x}$ d'où en dérivant cette série entière (c'est licite, cf. cours correspondant), $\sum_{n=1}^{+\infty} nx^{n-1} = \frac{1}{(1-x)^2}$. On en tire : $\mathbb{E}(X) = p\frac{1}{(1-q)^2} = \frac{1}{p}\,.$

Puis $\mathbb{E}(X(X-1)) = \sum_{n=1}^{+\infty} n(n-1)pq^{n-1}$. En dérivant la série entière précédente on a , pour tout $x \in]-1\,;1[$, $\sum_{n=2}^{+\infty} n(n-1)x^{n-2} = \frac{2}{(1-x)^3}$. On en déduit $\mathbb{E}(X(X-1)) = pq\frac{2}{(1-q)^3} = \frac{2q}{p^2}$ et enfin :

Théorème 19: Loi géométrique

Soit $X \hookrightarrow \mathcal{G}(p)$. Alors :

$$\mathbb{E}(X) = \frac{1}{p} \quad \text{et} \quad \mathbb{V}(X) = \frac{q}{p^2} \cdot$$

Démonstration

$\mathbb{E}(X) = \sum_{n=1}^{+\infty} n\mathbb{P}(X = n) = \sum_{n=1}^{+\infty} npq^{n-1}$ (sous réserve de convergence, ce qui est fait ci-dessous).

Or pour tout $x \in]-1;1[$, $\sum_{n=0}^{+\infty} x^n = \frac{1}{1-x}$ d'où en dérivant cette série entière (c'est licite, cf. cours correspondant), $\sum_{n=1}^{+\infty} nx^{n-1} = \frac{1}{(1-x)^2}$. On en tire : $\mathbb{E}(X) = p\frac{1}{(1-q)^2} = \frac{1}{p} \cdot$

Puis $\mathbb{E}(X(X-1)) = \sum_{n=1}^{+\infty} n(n-1)pq^{n-1}$. En dérivant la série entière précédente on a , pour tout $x \in]-1;1[$, $\sum_{n=2}^{+\infty} n(n-1)x^{n-2} = \frac{2}{(1-x)^3}$. On en déduit $\mathbb{E}(X(X-1)) = pq\frac{2}{(1-q)^3} = \frac{2q}{p^2}$ et enfin :

$$\mathbb{V}(X) = \mathbb{E}(X(X-1)) + \mathbb{E}(X) - (\mathbb{E}(X))^2 = \frac{2q}{p^2} + \frac{1}{p} - \frac{1}{p^2} = \frac{q}{p^2}.$$

Théorème 20: Loi de Poisson

Soit $X \hookrightarrow \mathcal{P}(\lambda)$. Alors
$$\mathbb{E}(X) = \lambda \quad \text{et} \quad \mathbb{V}(X) = \lambda \cdot$$

Démonstration

$$\mathbb{E}(X) = \sum_{n=0}^{+\infty} n e^{-\lambda} \frac{\lambda^n}{n!} = e^{-\lambda} \lambda \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{\lambda^{n-1}}{(n-1)!} = \lambda e^{-\lambda} e^{\lambda} = \lambda \text{. etc...}$$

Covariance

Théorème 21: Inégalité de Cauchy-Schwarz

Soient X et Y deux variables aléatoires réelles discrètes sur un espace probabilisé $(\Omega, \mathcal{A}, P)$, ayant chacune un moment d'ordre 2.

Alors l'espérance de XY existe et : $\mathbb{E}(XY)^2 \leqslant \mathbb{E}(X^2)\mathbb{E}(Y^2)$.

De plus, il y a égalité si et seulement si il existe des réels a et b tels que la variable aléatoire $aX + bY$ est presque surement nulle (c'est-à-dire $\mathbb{P}(aX + bY = 0) = 1$).

Covariance

Théorème 21: Inégalité de Cauchy-Schwarz

Soient X et Y deux variables aléatoires réelles discrètes sur un espace probabilisé $(\Omega, \mathcal{A}, P)$, ayant chacune un moment d'ordre 2.

Alors l'espérance de XY existe et : $\mathbb{E}(XY)^2 \leqslant \mathbb{E}(X^2)\mathbb{E}(Y^2)$.

De plus, il y a égalité si et seulement si il existe des réels a et b tels que la variable aléatoire $aX + bY$ est presque surement nulle (c'est-à-dire $\mathbb{P}(aX + bY = 0) = 1$).

Démonstration

- On connaît l'inégalité : $\forall\,(x, y) \in \mathbb{R}^2,\ \left|xy\right| \leqslant \dfrac{1}{2}(x^2 + y^2)\cdot$

Covariance

Théorème 21: Inégalité de Cauchy-Schwarz

Soient X et Y deux variables aléatoires réelles discrètes sur un espace probabilisé $(\Omega, \mathcal{A}, P)$, ayant chacune un moment d'ordre 2.

Alors l'espérance de XY existe et : $\mathbb{E}(XY)^2 \leqslant \mathbb{E}(X^2)\mathbb{E}(Y^2)$.

De plus, il y a égalité si et seulement si il existe des réels a et b tels que la variable aléatoire $aX + bY$ est presque surement nulle (c'est-à-dire $\mathbb{P}(aX + bY = 0) = 1$).

Démonstration

► On connaît l'inégalité : $\forall\,(x, y) \in \mathbb{R}^2,\ \left|xy\right| \leqslant \dfrac{1}{2}(x^2 + y^2)\cdot$

Donc : $|XY| \leqslant \dfrac{1}{2}(X^2 + Y^2)$, et puisque l'espérance de $X^2 + Y^2$ existe, il en est de même de $\mathbb{E}(XY)$ d'après la proposition 12.

Covariance

Théorème 21: Inégalité de Cauchy-Schwarz

Soient X et Y deux variables aléatoires réelles discrètes sur un espace probabilisé $(\Omega, \mathcal{A}, P)$, ayant chacune un moment d'ordre 2.

Alors l'espérance de XY existe et : $\mathbb{E}(XY)^2 \leqslant \mathbb{E}(X^2)\mathbb{E}(Y^2)$.

De plus, il y a égalité si et seulement si il existe des réels a et b tels que la variable aléatoire $aX + bY$ est presque surement nulle (c'est-à-dire $\mathbb{P}(aX + bY = 0) = 1$).

Démonstration

► On connaît l'inégalité : $\forall\, (x, y) \in \mathbb{R}^2,\ \left|xy\right| \leqslant \dfrac{1}{2}(x^2 + y^2)\cdot$

Donc : $|XY| \leqslant \dfrac{1}{2}(X^2 + Y^2)$, et puisque l'espérance de $X^2 + Y^2$ existe, il en est de même de $\mathbb{E}(XY)$ d'après la proposition 12.

► Pour tout $\lambda \in \mathbb{R}$, la variable aléatoire $Z = (\lambda X + Y)^2$ est à valeurs positives. Par combinaison linéaire, son espérance existe et

$$\mathbb{E}(Z) = \lambda^2\mathbb{E}(X^2) + 2\lambda\mathbb{E}(XY) + \mathbb{E}(Y^2).$$

Covariance

Théorème 21: Inégalité de Cauchy-Schwarz

Soient X et Y deux variables aléatoires réelles discrètes sur un espace probabilisé $(\Omega, \mathcal{A}, P)$, ayant chacune un moment d'ordre 2.

Alors l'espérance de XY existe et : $\mathbb{E}(XY)^2 \leqslant \mathbb{E}(X^2)\mathbb{E}(Y^2)$.

De plus, il y a égalité si et seulement si il existe des réels a et b tels que la variable aléatoire $aX + bY$ est presque surement nulle (c'est-à-dire $\mathbb{P}(aX + bY = 0) = 1$).

Démonstration

► On connaît l'inégalité : $\forall\,(x, y) \in \mathbb{R}^2,\ \left|xy\right| \leqslant \dfrac{1}{2}(x^2 + y^2)\cdot$

Donc : $|XY| \leqslant \dfrac{1}{2}(X^2 + Y^2)$, et puisque l'espérance de $X^2 + Y^2$ existe, il en est de même de $\mathbb{E}(XY)$ d'après la proposition 12.

► Pour tout $\lambda \in \mathbb{R}$, la variable aléatoire $Z = (\lambda X + Y)^2$ est à valeurs positives. Par combinaison linéaire, son espérance existe et

$$\mathbb{E}(Z) = \lambda^2\mathbb{E}(X^2) + 2\lambda\mathbb{E}(XY) + \mathbb{E}(Y^2).$$

Par positivité de l'espérance on a donc :

$$\forall\,\lambda \in \mathbb{R},\ \lambda^2\mathbb{E}(X^2) + 2\lambda\mathbb{E}(XY) + \mathbb{E}(Y^2) \geqslant 0.$$

Covariance

Théorème 21: Inégalité de Cauchy-Schwarz

Soient X et Y deux variables aléatoires réelles discrètes sur un espace probabilisé $(\Omega, \mathcal{A}, P)$, ayant chacune un moment d'ordre 2.

Alors l'espérance de XY existe et : $\mathbb{E}(XY)^2 \leqslant \mathbb{E}(X^2)\mathbb{E}(Y^2)$.

De plus, il y a égalité si et seulement si il existe des réels a et b tels que la variable aléatoire $aX + bY$ est presque surement nulle (c'est-à-dire $\mathbb{P}(aX + bY = 0) = 1$).

Démonstration

► On connaît l'inégalité : $\forall\,(x, y) \in \mathbb{R}^2,\ \left|xy\right| \leqslant \dfrac{1}{2}(x^2 + y^2)\cdot$

Donc : $|XY| \leqslant \dfrac{1}{2}(X^2 + Y^2)$, et puisque l'espérance de $X^2 + Y^2$ existe, il en est de même de $\mathbb{E}(XY)$ d'après la proposition 12.

► Pour tout $\lambda \in \mathbb{R}$, la variable aléatoire $Z = (\lambda X + Y)^2$ est à valeurs positives. Par combinaison linéaire, son espérance existe et

$$\mathbb{E}(Z) = \lambda^2\mathbb{E}(X^2) + 2\lambda\mathbb{E}(XY) + \mathbb{E}(Y^2).$$

Par positivité de l'espérance on a donc :

$$\forall\,\lambda \in \mathbb{R},\ \lambda^2\mathbb{E}(X^2) + 2\lambda\mathbb{E}(XY) + \mathbb{E}(Y^2) \geqslant 0.$$

- si $\mathbb{E}(X^2) = 0$ alors pour que le signe ne change pas, on doit avoir $\mathbb{E}(XY) = 0$ et l'inégalité est vérifiée.

Démonstration (suite)

- sinon, on a un trinôme qui est positif pour tout λ, donc son discriminant est négatif ce qui donne le résultat.

Démonstration (suite)

- sinon, on a un trinôme qui est positif pour tout λ, donc son discriminant est négatif ce qui donne le résultat.

- Il y a égalité si et seulement si $\mathbb{E}(X^2) = 0$ (1er cas), c'est-à-dire si X est presque surement nulle,

Démonstration (suite)

- sinon, on a un trinôme qui est positif pour tout λ, donc son discriminant est négatif ce qui donne le résultat.

► Il y a égalité si et seulement si $\mathbb{E}(X^2) = 0$ (1er cas), c'est-à-dire si X est presque surement nulle, ou si le discriminant est nul, c'est-à-dire si il existe λ tel que $\mathbb{E}\big((\lambda X + Y)^2\big) = 0$, c'est-à-dire $\lambda X + Y$ presque surement nulle.

Démonstration (suite)

- sinon, on a un trinôme qui est positif pour tout λ, donc son discriminant est négatif ce qui donne le résultat.

► Il y a égalité si et seulement si $\mathbb{E}(X^2) = 0$ (1er cas), c'est-à-dire si X est presque surement nulle, ou si le discriminant est nul, c'est-à-dire si il existe λ tel que $\mathbb{E}\big((\lambda X + Y)^2\big) = 0$, c'est-à-dire $\lambda X + Y$ presque surement nulle.
En rassemblant les 2 cas, on obtient le résultat annoncé.

Corollaire:

> Si X et Y sont deux variables aléatoires réelles admettant un moment d'ordre 2, alors la variable aléatoire $X + Y$ admet aussi un moment d'ordre 2.

Démonstration (suite)

- sinon, on a un trinôme qui est positif pour tout λ, donc son discriminant est négatif ce qui donne le résultat.

► Il y a égalité si et seulement si $\mathbb{E}(X^2) = 0$ (1er cas), c'est-à-dire si X est presque surement nulle, ou si le discriminant est nul, c'est-à-dire si il existe λ tel que $\mathbb{E}\big((\lambda X + Y)^2\big) = 0$, c'est-à-dire $\lambda X + Y$ presque surement nulle.
En rassemblant les 2 cas, on obtient le résultat annoncé.

Corollaire:

> Si X et Y sont deux variables aléatoires réelles admettant un moment d'ordre 2, alors la variable aléatoire $X + Y$ admet aussi un moment d'ordre 2.

Démonstration

découle de $(X + Y)^2 = X^2 + Y^2 + 2XY$ et du théorème précédent.

Avec ces hypothèses, on aura :

$$\mathbb{V}(X + Y) = \mathbb{E}((X + Y)^2) - (\mathbb{E}(X + Y))^2$$

Démonstration (suite)

- sinon, on a un trinôme qui est positif pour tout λ, donc son discriminant est négatif ce qui donne le résultat.

► Il y a égalité si et seulement si $\mathbb{E}(X^2) = 0$ (1er cas), c'est-à-dire si X est presque surement nulle, ou si le discriminant est nul, c'est-à-dire si il existe λ tel que $\mathbb{E}\big((\lambda X + Y)^2\big) = 0$, c'est-à-dire $\lambda X + Y$ presque surement nulle.
En rassemblant les 2 cas, on obtient le résultat annoncé.

Corollaire:

> Si X et Y sont deux variables aléatoires réelles admettant un moment d'ordre 2, alors la variable aléatoire $X + Y$ admet aussi un moment d'ordre 2.

Démonstration

découle de $(X+Y)^2 = X^2 + Y^2 + 2XY$ et du théorème précédent.

Avec ces hypothèses, on aura :

$$\begin{aligned}\mathbb{V}(X+Y) &= \mathbb{E}((X+Y)^2) - (\mathbb{E}(X+Y))^2 \\ &= \mathbb{E}(X^2) + \mathbb{E}(Y^2) + 2\mathbb{E}(XY) - \mathbb{E}(X)^2 - \mathbb{E}(Y)^2 - 2\mathbb{E}(X)\mathbb{E}(Y) \qquad \text{(l'espérance est linéaire)}\end{aligned}$$

Démonstration (suite)

- sinon, on a un trinôme qui est positif pour tout λ, donc son discriminant est négatif ce qui donne le résultat.

▶ Il y a égalité si et seulement si $\mathbb{E}(X^2) = 0$ (1er cas), c'est-à-dire si X est presque surement nulle, ou si le discriminant est nul, c'est-à-dire si il existe λ tel que $\mathbb{E}\big((\lambda X + Y)^2\big) = 0$, c'est-à-dire $\lambda X + Y$ presque surement nulle.
En rassemblant les 2 cas, on obtient le résultat annoncé.

Corollaire:

> Si X et Y sont deux variables aléatoires réelles admettant un moment d'ordre 2, alors la variable aléatoire $X + Y$ admet aussi un moment d'ordre 2.

Démonstration

découle de $(X+Y)^2 = X^2 + Y^2 + 2XY$ et du théorème précédent.

Avec ces hypothèses, on aura :

$$\begin{aligned}
\mathbb{V}(X+Y) &= \mathbb{E}((X+Y)^2) - (\mathbb{E}(X+Y))^2 \\
&= \mathbb{E}(X^2) + \mathbb{E}(Y^2) + 2\mathbb{E}(XY) - \mathbb{E}(X)^2 - \mathbb{E}(Y)^2 - 2\mathbb{E}(X)\mathbb{E}(Y) \qquad \text{(l'espérance est linéaire)} \\
&= \mathbb{V}(X) + \mathbb{V}(Y) + 2\left(\mathbb{E}(XY) - \mathbb{E}(X)\mathbb{E}(Y)\right)
\end{aligned}$$

Démonstration (suite)

- sinon, on a un trinôme qui est positif pour tout λ, donc son discriminant est négatif ce qui donne le résultat.

▶ Il y a égalité si et seulement si $\mathbb{E}(X^2) = 0$ (1er cas), c'est-à-dire si X est presque surement nulle, ou si le discriminant est nul, c'est-à-dire si il existe λ tel que $\mathbb{E}\big((\lambda X + Y)^2\big) = 0$, c'est-à-dire $\lambda X + Y$ presque surement nulle.
En rassemblant les 2 cas, on obtient le résultat annoncé.

Corollaire:

> Si X et Y sont deux variables aléatoires réelles admettant un moment d'ordre 2, alors la variable aléatoire $X + Y$ admet aussi un moment d'ordre 2.

Démonstration

découle de $(X+Y)^2 = X^2 + Y^2 + 2XY$ et du théorème précédent.

Avec ces hypothèses, on aura :

$$\begin{aligned}\mathbb{V}(X+Y) &= \mathbb{E}((X+Y)^2) - (\mathbb{E}(X+Y))^2 \\ &= \mathbb{E}(X^2) + \mathbb{E}(Y^2) + 2\mathbb{E}(XY) - \mathbb{E}(X)^2 - \mathbb{E}(Y)^2 - 2\mathbb{E}(X)\mathbb{E}(Y) \qquad \text{(l'espérance est linéaire)} \\ &= \mathbb{V}(X) + \mathbb{V}(Y) + 2\left(\mathbb{E}(XY) - \mathbb{E}(X)\mathbb{E}(Y)\right)\end{aligned}$$

ce qui conduit à la définition suivante.

Définition 19

Si X et Y sont deux variables aléatoires réelles admettant chacune un moment d'ordre 2, on appelle **covariance de X et Y** le réel

$$\mathrm{cov}(X, Y) = \mathbb{E}\Big[\big(X - \mathbb{E}(X)\big)\big(Y - \mathbb{E}(Y)\big)\Big].$$

Définition 19

Si X et Y sont deux variables aléatoires réelles admettant chacune un moment d'ordre 2, on appelle **covariance de X et Y** le réel

$$\operatorname{cov}(X, Y) = \mathbb{E}\Big[\big(X - \mathbb{E}(X)\big)\big(Y - \mathbb{E}(Y)\big)\Big].$$

Un calcul simple montre que l'on a aussi : $\operatorname{cov}(X, Y) = \mathbb{E}(XY) - \mathbb{E}(X)\mathbb{E}(Y)$.

Définition 19

Si X et Y sont deux variables aléatoires réelles admettant chacune un moment d'ordre 2, on appelle **covariance de X et Y** le réel

$$\operatorname{cov}(X, Y) = \mathbb{E}\Big[(X - \mathbb{E}(X))(Y - \mathbb{E}(Y))\Big].$$

Un calcul simple montre que l'on a aussi : $\operatorname{cov}(X, Y) = \mathbb{E}(XY) - \mathbb{E}(X)\mathbb{E}(Y)$. On a donc la relation :

$$\mathbb{V}(X + Y) = \mathbb{V}(X) + \mathbb{V}(Y) + 2\operatorname{cov}(X, Y).$$

Définition 19

Si X et Y sont deux variables aléatoires réelles admettant chacune un moment d'ordre 2, on appelle **covariance de X et Y** le réel

$$\operatorname{cov}(X, Y) = \mathbb{E}\Big[(X - \mathbb{E}(X))(Y - \mathbb{E}(Y))\Big].$$

Un calcul simple montre que l'on a aussi : $\operatorname{cov}(X, Y) = \mathbb{E}(XY) - \mathbb{E}(X)\mathbb{E}(Y)$. On a donc la relation :

$$\mathbb{V}(X + Y) = \mathbb{V}(X) + \mathbb{V}(Y) + 2\operatorname{cov}(X, Y).$$

Les propriétés qui suivent se vérifient aisément, compte tenu de tout ce qui précède :

Définition 19

Si X et Y sont deux variables aléatoires réelles admettant chacune un moment d'ordre 2, on appelle **covariance de X et Y** le réel

$$\mathrm{cov}(X, Y) = \mathbb{E}\Big[(X - \mathbb{E}(X))(Y - \mathbb{E}(Y))\Big].$$

Un calcul simple montre que l'on a aussi : $\mathrm{cov}(X, Y) = \mathbb{E}(XY) - \mathbb{E}(X)\mathbb{E}(Y)$. On a donc la relation :

$$\mathbb{V}(X + Y) = \mathbb{V}(X) + \mathbb{V}(Y) + 2\mathrm{cov}(X, Y).$$

Les propriétés qui suivent se vérifient aisément, compte tenu de tout ce qui précède :

Proposition 15

Soit $(\Omega, \mathcal{A}, P)$ un espace probabilisé.

1. L'ensemble $\mathcal{V}(\Omega, \mathbb{R})$ des variables aléatoires réelles discrètes sur Ω est un sous-espace vectoriel de $\mathcal{A}(\Omega, \mathbb{R})$;

Définition 19

Si X et Y sont deux variables aléatoires réelles admettant chacune un moment d'ordre 2, on appelle **covariance de X et Y** le réel

$$\operatorname{cov}(X,Y) = \mathbb{E}\Big[(X - \mathbb{E}(X))(Y - \mathbb{E}(Y))\Big].$$

Un calcul simple montre que l'on a aussi : $\operatorname{cov}(X,Y) = \mathbb{E}(XY) - \mathbb{E}(X)\mathbb{E}(Y)$. On a donc la relation :

$$\mathbb{V}(X+Y) = \mathbb{V}(X) + \mathbb{V}(Y) + 2\operatorname{cov}(X,Y).$$

Les propriétés qui suivent se vérifient aisément, compte tenu de tout ce qui précède :

Proposition 15

Soit $(\Omega, \mathcal{A}, P)$ un espace probabilisé.

1. L'ensemble $\mathcal{V}(\Omega, \mathbb{R})$ des variables aléatoires réelles discrètes sur Ω est un sous-espace vectoriel de $\mathcal{A}(\Omega, \mathbb{R})$;
2. L'ensemble $\mathcal{V}^1(\Omega, \mathbb{R})$ des variables aléatoires réelles discrètes sur Ω admettant une espérance est un sous-espace vectoriel de $\mathcal{V}(\Omega, \mathbb{R})$;

Définition 19

Si X et Y sont deux variables aléatoires réelles admettant chacune un moment d'ordre 2, on appelle **covariance de X et Y** le réel

$$\text{cov}(X,Y) = \mathbb{E}\Big[(X - \mathbb{E}(X))(Y - \mathbb{E}(Y))\Big].$$

Un calcul simple montre que l'on a aussi : $\text{cov}(X,Y) = \mathbb{E}(XY) - \mathbb{E}(X)\mathbb{E}(Y)$. On a donc la relation :

$$\mathbb{V}(X+Y) = \mathbb{V}(X) + \mathbb{V}(Y) + 2\text{cov}(X,Y).$$

Les propriétés qui suivent se vérifient aisément, compte tenu de tout ce qui précède :

Proposition 15

Soit $(\Omega, \mathcal{A}, P)$ un espace probabilisé.

1. L'ensemble $\mathcal{V}(\Omega,\mathbb{R})$ des variables aléatoires réelles discrètes sur Ω est un sous-espace vectoriel de $\mathcal{A}(\Omega,\mathbb{R})$;
2. L'ensemble $\mathcal{V}^1(\Omega,\mathbb{R})$ des variables aléatoires réelles discrètes sur Ω admettant une espérance est un sous-espace vectoriel de $\mathcal{V}(\Omega,\mathbb{R})$;
3. L'ensemble $\mathcal{V}^2(\Omega,\mathbb{R})$ des variables aléatoires réelles discrètes sur Ω admettant un moment d'ordre 2 est un sous-espace vectoriel de $\mathcal{V}^1(\Omega,\mathbb{R})$;

Définition 19

Si X et Y sont deux variables aléatoires réelles admettant chacune un moment d'ordre 2, on appelle **covariance de X et Y** le réel

$$\mathrm{cov}(X,Y) = \mathbb{E}\Big[(X-\mathbb{E}(X))(Y-\mathbb{E}(Y))\Big].$$

Un calcul simple montre que l'on a aussi : $\mathrm{cov}(X,Y) = \mathbb{E}(XY) - \mathbb{E}(X)\mathbb{E}(Y)$. On a donc la relation :

$$\mathbb{V}(X+Y) = \mathbb{V}(X) + \mathbb{V}(Y) + 2\mathrm{cov}(X,Y).$$

Les propriétés qui suivent se vérifient aisément, compte tenu de tout ce qui précède :

Proposition 15

Soit $(\Omega, \mathcal{A}, P)$ un espace probabilisé.

1. L'ensemble $\mathcal{V}(\Omega,\mathbb{R})$ des variables aléatoires réelles discrètes sur Ω est un sous-espace vectoriel de $\mathcal{A}(\Omega,\mathbb{R})$;
2. L'ensemble $\mathcal{V}^1(\Omega,\mathbb{R})$ des variables aléatoires réelles discrètes sur Ω admettant une espérance est un sous-espace vectoriel de $\mathcal{V}(\Omega,\mathbb{R})$;
3. L'ensemble $\mathcal{V}^2(\Omega,\mathbb{R})$ des variables aléatoires réelles discrètes sur Ω admettant un moment d'ordre 2 est un sous-espace vectoriel de $\mathcal{V}^1(\Omega,\mathbb{R})$;
4. L'application $(X,Y) \mapsto \mathrm{cov}(X,Y)$ est une forme bilinéaire symétrique positive (mais non définie) sur l'espace vectoriel $\mathcal{V}^2(\Omega,\mathbb{R})$, et, pour tout $X \in \mathcal{V}^2(\Omega,\mathbb{R})$, $\mathrm{cov}(X,X) = \mathbb{V}(X)$;

Proposition 16: Inégalité de Cauchy-Schwarz

Si X et Y appartiennent à $\mathcal{V}^2(\Omega, \mathbb{R})$, on a l'inégalité :

$$\left|\operatorname{cov}(X, Y)\right| \leqslant \sigma(X)\sigma(Y)\,.$$

Proposition 16: Inégalité de Cauchy-Schwarz

Si X et Y appartiennent à $\mathcal{V}^2(\Omega, \mathbb{R})$, on a l'inégalité :

$$\left|\operatorname{cov}(X, Y)\right| \leqslant \sigma(X)\sigma(Y)\,.$$

Démonstration

Soit λ un réel. On a $\mathbb{V}(X+\lambda Y) = \operatorname{cov}(X+\lambda Y, X+\lambda Y) = \mathbb{V}(X) + \lambda^2\mathbb{V}(Y) + 2\lambda\operatorname{cov}(X, Y)$ par bilinéarité.

Proposition 16: Inégalité de Cauchy-Schwarz

Si X et Y appartiennent à $\mathcal{V}^2(\Omega, \mathbb{R})$, on a l'inégalité :

$$\left|\mathrm{cov}(X, Y)\right| \leqslant \sigma(X)\sigma(Y)\,.$$

Démonstration

Soit λ un réel. On a $\mathbb{V}(X+\lambda Y) = \mathrm{cov}(X+\lambda Y, X+\lambda Y) = \mathbb{V}(X) + \lambda^2\mathbb{V}(Y) + 2\lambda\mathrm{cov}(X, Y)$ par bilinéarité. On distingue deux cas :

- si $\mathbb{V}(Y) = 0$, pour que l'expression soit positive pour tout λ, il faut et il suffit que le coefficient de λ soit nul, donc $\mathrm{cov}(X, Y) = 0$, et on a le résultat.

Proposition 16: Inégalité de Cauchy-Schwarz

Si X et Y appartiennent à $\mathcal{V}^2(\Omega, \mathbb{R})$, on a l'inégalité :

$$\left|\operatorname{cov}(X, Y)\right| \leqslant \sigma(X)\sigma(Y)\,.$$

Démonstration

Soit λ un réel. On a $\mathbb{V}(X + \lambda Y) = \operatorname{cov}(X + \lambda Y, X + \lambda Y) = \mathbb{V}(X) + \lambda^2\mathbb{V}(Y) + 2\lambda\operatorname{cov}(X, Y)$ par bilinéarité. On distingue deux cas :

- si $\mathbb{V}(Y) = 0$, pour que l'expression soit positive pour tout λ, il faut et il suffit que le coefficient de λ soit nul, donc $\operatorname{cov}(X, Y) = 0$, et on a le résultat.
- sinon, on a un trinôme qui est positif pour tout λ, son discriminant est négatif ou nul ce qui donne
$$[\operatorname{cov}(X, Y)]^2 - \mathbb{V}(X)\mathbb{V}(Y) \leqslant 0$$
et l'on obtient l' inégalité.

Proposition 16: Inégalité de Cauchy-Schwarz

Si X et Y appartiennent à $\mathcal{V}^2(\Omega, \mathbb{R})$, on a l'inégalité :

$$\left|\mathrm{cov}(X, Y)\right| \leqslant \sigma(X)\sigma(Y)\,.$$

Démonstration

Soit λ un réel. On a $\mathbb{V}(X+\lambda Y) = \mathrm{cov}(X+\lambda Y, X+\lambda Y) = \mathbb{V}(X) + \lambda^2\mathbb{V}(Y) + 2\lambda\mathrm{cov}(X, Y)$ par bilinéarité. On distingue deux cas :

- si $\mathbb{V}(Y) = 0$, pour que l'expression soit positive pour tout λ, il faut et il suffit que le coefficient de λ soit nul, donc $\mathrm{cov}(X, Y) = 0$, et on a le résultat.
- sinon, on a un trinôme qui est positif pour tout λ, son discriminant est négatif ou nul ce qui donne
$$[\mathrm{cov}(X, Y)]^2 - \mathbb{V}(X)\mathbb{V}(Y) \leqslant 0$$
et l'on obtient l' inégalité.

Proposition 17

Si X et Y sont deux variables aléatoires réelles admettant chacune un moment d'ordre 2 et **indépendantes**, alors leur covariance est nulle.

Il en résulte que l'on a alors $\mathbb{V}(X+Y) = \mathbb{V}(X) + \mathbb{V}(Y)$.

Proposition 16: Inégalité de Cauchy-Schwarz

Si X et Y appartiennent à $\mathcal{V}^2(\Omega, \mathbb{R})$, on a l'inégalité :

$$\left|\text{cov}(X, Y)\right| \leqslant \sigma(X)\sigma(Y)\,.$$

Démonstration

Soit λ un réel. On a $\mathbb{V}(X + \lambda Y) = \text{cov}(X + \lambda Y, X + \lambda Y) = \mathbb{V}(X) + \lambda^2\mathbb{V}(Y) + 2\lambda\text{cov}(X, Y)$ par bilinéarité. On distingue deux cas :

- si $\mathbb{V}(Y) = 0$, pour que l'expression soit positive pour tout λ, il faut et il suffit que le coefficient de λ soit nul, donc $\text{cov}(X, Y) = 0$, et on a le résultat.
- sinon, on a un trinôme qui est positif pour tout λ, son discriminant est négatif ou nul ce qui donne
$$[\text{cov}(X, Y)]^2 - \mathbb{V}(X)\mathbb{V}(Y) \leqslant 0$$
et l'on obtient l' inégalité.

Proposition 17

Si X et Y sont deux variables aléatoires réelles admettant chacune un moment d'ordre 2 et **indépendantes**, alors leur covariance est nulle.

Il en résulte que l'on a alors $\mathbb{V}(X + Y) = \mathbb{V}(X) + \mathbb{V}(Y)$.

Démonstration

Cela résulte directement du théorème 12 ($\mathbb{E}(XY) = \mathbb{E}(X)\mathbb{E}(Y)$) et de la définition de la covariance.

La réciproque de cette propriété est fausse !

La réciproque de cette propriété est fausse !

Par exemple, soit X une variable aléatoire dont la loi est donnée par $\mathbb{P}(X = -1) = \mathbb{P}(X = 1) = 1/4$ et $\mathbb{P}(X = 0) = 1/2$, et soit $Y = X^2$.

La réciproque de cette propriété est fausse !

Par exemple, soit X une variable aléatoire dont la loi est donnée par $\mathbb{P}(X = -1) = \mathbb{P}(X = 1) = 1/4$ et $\mathbb{P}(X = 0) = 1/2$, et soit $Y = X^2$.

Alors $\mathbb{E}(X) = 0$ et $\mathbb{E}(XY) = \mathbb{E}(X^3) = 0$ donc $\mathrm{cov}(X, Y) = 0$.

La réciproque de cette propriété est fausse !

Par exemple, soit X une variable aléatoire dont la loi est donnée par $\mathbb{P}(X=-1)=\mathbb{P}(X=1)=1/4$ et $\mathbb{P}(X=0)=1/2$, et soit $Y=X^2$.

Alors $\mathbb{E}(X)=0$ et $\mathbb{E}(XY)=\mathbb{E}(X^3)=0$ donc $\mathrm{cov}(X,Y)=0$.

Mais $\mathbb{P}((X=0)\cap(Y=1))\neq\mathbb{P}(X=0)\mathbb{P}(Y=1)$ donc X et Y ne sont pas indépendantes.

La réciproque de cette propriété est fausse !

Par exemple, soit X une variable aléatoire dont la loi est donnée par $\mathbb{P}(X=-1)=\mathbb{P}(X=1)=1/4$ et $\mathbb{P}(X=0)=1/2$, et soit $Y=X^2$.

Alors $\mathbb{E}(X)=0$ et $\mathbb{E}(XY)=\mathbb{E}(X^3)=0$ donc $\operatorname{cov}(X,Y)=0$.

Mais $\mathbb{P}((X=0)\cap(Y=1))\neq\mathbb{P}(X=0)\mathbb{P}(Y=1)$ donc X et Y ne sont pas indépendantes.

Généralisation :

Si $X_1,\dots,X_n$ sont n variables aléatoires réelles possédant toutes un moment d'ordre 2, en utilisant la bilinéarité de la covariance on obtient :

$$\begin{aligned}\mathbb{V}(X_1+\cdots+X_n)&=\operatorname{cov}(X_1+\cdots+X_n,X_1+\cdots+X_n)\\&=\mathbb{V}(X_1)+\cdots+\mathbb{V}(X_n)+2\sum_{1\leqslant i<j\leqslant n}\operatorname{cov}(X_i,X_j)\,.\end{aligned}$$

La réciproque de cette propriété est fausse !

Par exemple, soit X une variable aléatoire dont la loi est donnée par $\mathbb{P}(X=-1)=\mathbb{P}(X=1)=1/4$ et $\mathbb{P}(X=0)=1/2$, et soit $Y=X^2$.

Alors $\mathbb{E}(X)=0$ et $\mathbb{E}(XY)=\mathbb{E}(X^3)=0$ donc $\operatorname{cov}(X,Y)=0$.

Mais $\mathbb{P}((X=0)\cap(Y=1))\neq\mathbb{P}(X=0)\mathbb{P}(Y=1)$ donc X et Y ne sont pas indépendantes.

Généralisation :
Si $X_1,\ldots,X_n$ sont n variables aléatoires réelles possédant toutes un moment d'ordre 2, en utilisant la bilinéarité de la covariance on obtient :

$$\begin{aligned}\mathbb{V}(X_1+\cdots+X_n)&=\operatorname{cov}(X_1+\cdots+X_n,X_1+\cdots+X_n)\\&=\mathbb{V}(X_1)+\cdots+\mathbb{V}(X_n)+2\sum_{1\leqslant i<j\leqslant n}\operatorname{cov}(X_i,X_j)\,.\end{aligned}$$

Il en résulte :

Théorème 22

Si $X_1,\ldots,X_n$ sont n variables aléatoires réelles possédant toutes un moment d'ordre 2 et **indépendantes deux à deux** :

$$\mathbb{V}(X_1+\cdots+X_n)=\sum_{i=1}^{n}\mathbb{V}(X_i)\,.$$

LOI FAIBLE DES GRANDS NOMBRES

Étant donné une pièce équilibrée, il est admis intuitivement que lorsque cette pièce est lancée un certain nombre de fois, la fréquence des faces est proche de 1/2. La loi faible des grands nombres est la formulation mathématique de cette intuition. Les lancers successifs sont modélisés par une suite de variables aléatoires X_i où X_i prend la valeur 0 si au i-ème lancer on obtient pile et 1 si l'on obtient face. La fréquence de face sur n lancers est :

$$\overline{X_n} = \frac{X_1 + \cdots + X_n}{n}.$$

La loi faible des grands nombres exprime que la variable $\overline{X_n}$ tend vers 1/2 lorsque $n \to \infty$ (en un certain sens).

Étant donné une pièce équilibrée, il est admis intuitivement que lorsque cette pièce est lancée un certain nombre de fois, la fréquence des faces est proche de 1/2. La loi faible des grands nombres est la formulation mathématique de cette intuition. Les lancers successifs sont modélisés par une suite de variables aléatoires X_i où X_i prend la valeur 0 si au i-ème lancer on obtient pile et 1 si l'on obtient face. La fréquence de face sur n lancers est :

$$\overline{X_n} = \frac{X_1 + \cdots + X_n}{n}.$$

La loi faible des grands nombres exprime que la variable $\overline{X_n}$ tend vers 1/2 lorsque $n \to \infty$ (en un certain sens).

Théorème 23: Loi faible des grands nombres

Soit $(X_i)_{i \in N}$ une suite de variables aléatoires réelles définies sur un espace probabilisé $(\Omega, \mathcal{A}, \mathbb{P})$, indépendantes et de même loi (en abrégé : i.i.d), et de variance finie.

On pose $m = \mathbb{E}(X_1)$, et $\overline{X_n} = \dfrac{\sum\limits_{i=1}^{n} X_i}{n}$ $\cdot$ Alors :

Étant donné une pièce équilibrée, il est admis intuitivement que lorsque cette pièce est lancée un certain nombre de fois, la fréquence des faces est proche de 1/2. La loi faible des grands nombres est la formulation mathématique de cette intuition. Les lancers successifs sont modélisés par une suite de variables aléatoires X_i où X_i prend la valeur 0 si au i-ème lancer on obtient pile et 1 si l'on obtient face. La fréquence de face sur n lancers est :

$$\overline{X_n} = \frac{X_1 + \cdots + X_n}{n}.$$

La loi faible des grands nombres exprime que la variable $\overline{X_n}$ tend vers 1/2 lorsque $n \to \infty$ (en un certain sens).

Théorème 23: Loi faible des grands nombres

Soit $(X_i)_{i \in N}$ une suite de variables aléatoires réelles définies sur un espace probabilisé $(\Omega, \mathcal{A}, \mathbb{P})$, indépendantes et de même loi (en abrégé : i.i.d), et de variance finie.

On pose $m = \mathbb{E}(X_1)$, et $\overline{X_n} = \dfrac{\sum\limits_{i=1}^{n} X_i}{n} \cdot$ Alors :

$$\forall \varepsilon > 0, \ \lim_{n \to \infty} \mathbb{P}\left(|\overline{X_n} - m| \geqslant \varepsilon\right) = 0.$$

Démonstration

Notons déjà que, puisque les X_i possèdent un moment d'ordre 2, elles possèdent aussi un moment d'ordre 1, donc $m = \mathbb{E}(X_1)$ est fini.

Démonstration

Notons déjà que, puisque les X_i possèdent un moment d'ordre 2, elles possèdent aussi un moment d'ordre 1, donc $m = \mathbb{E}(X_1)$ est fini.

Les variables ayant même loi, on a $\mathbb{E}(X_i) = \mathbb{E}(X_1)$ et $\mathbb{V}(X_i) = \mathbb{V}(X_1)$ pour tout i.

Démonstration

Notons déjà que, puisque les X_i possèdent un moment d'ordre 2, elles possèdent aussi un moment d'ordre 1, donc $m = \mathbb{E}(X_1)$ est fini.

Les variables ayant même loi, on a $\mathbb{E}(X_i) = \mathbb{E}(X_1)$ et $\mathbb{V}(X_i) = \mathbb{V}(X_1)$ pour tout i.

Par linéarité de l'espérance, $\mathbb{E}(\overline{X_n}) = m$ et puisque les variables sont indépendantes, $\mathbb{V}(\overline{X_n}) = \dfrac{\mathbb{V}(X_1)}{n}$.

Démonstration

Notons déjà que, puisque les X_i possèdent un moment d'ordre 2, elles possèdent aussi un moment d'ordre 1, donc $m = \mathbb{E}(X_1)$ est fini.

Les variables ayant même loi, on a $\mathbb{E}(X_i) = \mathbb{E}(X_1)$ et $\mathbb{V}(X_i) = \mathbb{V}(X_1)$ pour tout i.

Par linéarité de l'espérance, $\mathbb{E}(\overline{X_n}) = m$ et puisque les variables sont indépendantes, $\mathbb{V}(\overline{X_n}) = \dfrac{\mathbb{V}(X_1)}{n}$.

On applique alors l'inégalité de BT :

$$\mathbb{P}\Big(\big|\overline{X_n} - \mathbb{E}(X_n)\big| \geqslant \varepsilon \Big) \leqslant \frac{\mathbb{V}(\overline{X_n})}{\varepsilon^2} = \frac{\mathbb{V}(\overline{X_1})}{n\varepsilon^2}$$

Démonstration

Notons déjà que, puisque les X_i possèdent un moment d'ordre 2, elles possèdent aussi un moment d'ordre 1, donc $m = \mathbb{E}(X_1)$ est fini.

Les variables ayant même loi, on a $\mathbb{E}(X_i) = \mathbb{E}(X_1)$ et $\mathbb{V}(X_i) = \mathbb{V}(X_1)$ pour tout i.

Par linéarité de l'espérance, $\mathbb{E}(\overline{X_n}) = m$ et puisque les variables sont indépendantes, $\mathbb{V}(\overline{X_n}) = \dfrac{\mathbb{V}(X_1)}{n}$.

On applique alors l'inégalité de BT :

$$\mathbb{P}\Big(\left|\overline{X_n} - \mathbb{E}(X_n)\right| \geqslant \varepsilon\Big) \leqslant \frac{\mathbb{V}(\overline{X_n})}{\varepsilon^2} = \frac{\mathbb{V}(\overline{X_1})}{n\varepsilon^2}$$

et le résultat en découle immédiatement.

VARIABLES ALÉATOIRES À VALEURS DANS $\mathbb{N}$

Définition 20

Soit X une variable aléatoire définie sur un espace probabilisé $(\Omega, \mathcal{A}, \mathbb{P})$, à valeurs dans $\mathbb{N}$.

La **fonction génératrice** de X est la série entière :

$$G_X(t) = \sum_{n=0}^{+\infty} \mathbb{P}(X = n) t^n \,.$$

Définition 20

Soit X une variable aléatoire définie sur un espace probabilisé $(\Omega, \mathcal{A}, \mathbb{P})$, à valeurs dans $\mathbb{N}$.

La **fonction génératrice** de X est la série entière :

$$G_X(t) = \sum_{n=0}^{+\infty} \mathbb{P}(X = n) t^n \,.$$

Proposition 18

La fonction génératrice d'une variable aléatoire à valeurs entières a un rayon de convergence R_X supérieur ou égal à 1.

Définition 20

Soit X une variable aléatoire définie sur un espace probabilisé $(\Omega, \mathcal{A}, \mathbb{P})$, à valeurs dans $\mathbb{N}$.

La **fonction génératrice** de X est la série entière :

$$G_X(t) = \sum_{n=0}^{+\infty} \mathbb{P}(X = n)t^n \,.$$

Proposition 18

La fonction génératrice d'une variable aléatoire à valeurs entières a un rayon de convergence R_X supérieur ou égal à 1.

Démonstration

$G_X(1) = \sum_{n=0}^{+\infty} \mathbb{P}(X = n) = 1$ puisque $X(\Omega) \subset \mathbb{N}$, donc la série entière converge pour $t = 1$. Puis cf. cours sur les séries entières.

Définition 20

Soit X une variable aléatoire définie sur un espace probabilisé $(\Omega, \mathcal{A}, \mathbb{P})$, à valeurs dans $\mathbb{N}$.

La **fonction génératrice** de X est la série entière :

$$G_X(t) = \sum_{n=0}^{+\infty} \mathbb{P}(X = n) t^n \,.$$

Proposition 18

La fonction génératrice d'une variable aléatoire à valeurs entières a un rayon de convergence R_X supérieur ou égal à 1.

Démonstration

$G_X(1) = \sum\limits_{n=0}^{+\infty} \mathbb{P}(X = n) = 1$ puisque $X(\Omega) \subset \mathbb{N}$, donc la série entière converge pour $t = 1$. Puis cf. cours sur les séries entières.

Proposition 19

G_X est de classe $\mathscr{C}^\infty$ sur $]-R_X\,;R_X[$ et pour tout $n \in \mathbb{N}$: $\mathbb{P}(X = n) = \dfrac{G_X^{(n)}(0)}{n!}$.

Définition 20

Soit X une variable aléatoire définie sur un espace probabilisé $(\Omega, \mathcal{A}, \mathbb{P})$, à valeurs dans $\mathbb{N}$.

La **fonction génératrice** de X est la série entière :

$$G_X(t) = \sum_{n=0}^{+\infty} \mathbb{P}(X = n)t^n .$$

Proposition 18

La fonction génératrice d'une variable aléatoire à valeurs entières a un rayon de convergence R_X supérieur ou égal à 1.

Démonstration

$G_X(1) = \sum_{n=0}^{+\infty} \mathbb{P}(X = n) = 1$ puisque $X(\Omega) \subset \mathbb{N}$, donc la série entière converge pour $t = 1$. Puis cf. cours sur les séries entières.

Proposition 19

G_X est de classe $\mathscr{C}^\infty$ sur $]-R_X ; R_X[$ et pour tout $n \in \mathbb{N}$: $\mathbb{P}(X = n) = \dfrac{G_X^{(n)}(0)}{n!}$.

Démonstration

cf cours sur les séries entières...

Définition 20

Soit X une variable aléatoire définie sur un espace probabilisé $(\Omega, \mathcal{A}, \mathbb{P})$, à valeurs dans $\mathbb{N}$.

La **fonction génératrice** de X est la série entière :

$$G_X(t) = \sum_{n=0}^{+\infty} \mathbb{P}(X = n) t^n \,.$$

Proposition 18

La fonction génératrice d'une variable aléatoire à valeurs entières a un rayon de convergence R_X supérieur ou égal à 1.

Démonstration

$G_X(1) = \sum_{n=0}^{+\infty} \mathbb{P}(X = n) = 1$ puisque $X(\Omega) \subset \mathbb{N}$, donc la série entière converge pour $t = 1$. Puis cf. cours sur les séries entières.

Proposition 19

G_X est de classe $\mathscr{C}^\infty$ sur $]-R_X\,;R_X[$ et pour tout $n \in \mathbb{N}$: $\mathbb{P}(X = n) = \dfrac{G_X^{(n)}(0)}{n!}$.

Remarque : Cette proposition montre que la loi d'une variable aléatoire à valeurs entières est entièrement caractérisée par sa fonction génératrice.

Proposition 20

Pour tout $t \in \left]-R_X\,;R_X\right[$, $G_X(t) = \mathbb{E}(t^X)$.

Proposition 20

Pour tout $t \in \left]-R_X\,;R_X\right[$, $G_X(t) = \mathbb{E}(t^X)$.

Démonstration

C'est le théorème de transfert.

Proposition 20

Pour tout $t \in]-R_X\,;R_X[$, $G_X(t) = \mathbb{E}(t^X)$.

Démonstration

C'est le théorème de transfert.

Proposition 21

1. Si X suit la loi binomiale de paramètres (n, p), sa fonction génératrice est la fonction polynomiale définie par
$$\forall\, t \in \mathbb{R},\ \ G_X(t) = (pt + q)^n\,.$$

Proposition 20

Pour tout $t \in]-R_X ; R_X[$, $G_X(t) = \mathbb{E}(t^X)$.

Démonstration

C'est le théorème de transfert.

Proposition 21

1. Si X suit la loi binomiale de paramètres (n, p), sa fonction génératrice est la fonction polynomiale définie par
$$\forall\, t \in \mathbb{R},\ G_X(t) = (pt + q)^n .$$

2. Si X suit la loi géométrique de paramètre p, le rayon de convergence de sa fonction génératrice est égal à $\frac{1}{q}$ et
$$\forall\, t \in \left]-\tfrac{1}{q} ; \tfrac{1}{q}\right[,\ G_X(t) = \frac{pt}{1 - qt} .$$

Proposition 20

Pour tout $t \in \left]-R_X\,;R_X\right[$, $G_X(t) = \mathbb{E}(t^X)$.

Démonstration

C'est le théorème de transfert.

Proposition 21

1. Si X suit la loi binomiale de paramètres (n,p), sa fonction génératrice est la fonction polynomiale définie par
$$\forall\, t \in \mathbb{R},\ G_X(t) = (pt+q)^n\,.$$

2. Si X suit la loi géométrique de paramètre p, le rayon de convergence de sa fonction génératrice est égal à $\frac{1}{q}$ et
$$\forall\, t \in \left]-\tfrac{1}{q}\,;\tfrac{1}{q}\right[,\ G_X(t) = \frac{pt}{1-qt}\,.$$

3. Si X suit la loi de Poisson de paramètre λ, sa série génératrice est de rayon de convergence ∞ et
$$\forall\, t \in \mathbb{R},\ G_X(t) = \mathrm{e}^{\lambda(t-1)}\,.$$

Démonstration

1. Si $X \hookrightarrow \mathcal{B}(n, p)$ sa série génératrice est en fait la somme finie :

$$G_X(t) = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} p^k q^{n-k} t^k = (pt + q)^n \quad \text{(formule du binôme).}$$

Démonstration

1. Si $X \hookrightarrow \mathcal{B}(n,p)$ sa série génératrice est en fait la somme finie :

$$G_X(t) = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} p^k q^{n-k} t^k = (pt+q)^n \quad \text{(formule du binôme)}.$$

2. Si $X \hookrightarrow \mathcal{G}(p)$ on a lorsque la série converge :

$$G_X(t) = \sum_{n=1}^{+\infty} pq^{n-1} t^n = pt \sum_{n=1}^{+\infty} (qt)^{n-1}$$

et l'on reconnaît une série géométrique de raison qt.

Démonstration

1. Si $X \hookrightarrow \mathcal{B}(n,p)$ sa série génératrice est en fait la somme finie :

$$G_X(t) = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} p^k q^{n-k} t^k = (pt+q)^n \quad \text{(formule du binôme).}$$

2. Si $X \hookrightarrow \mathcal{G}(p)$ on a lorsque la série converge :

$$G_X(t) = \sum_{n=1}^{+\infty} pq^{n-1} t^n = pt \sum_{n=1}^{+\infty} (qt)^{n-1}$$

et l'on reconnaît une série géométrique de raison qt.

3. Si $X \hookrightarrow \mathcal{P}(\lambda)$ on a lorsque la série converge :

$$G_X(t) = \mathrm{e}^{-\lambda} \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{\lambda^n}{n!} t^n = \mathrm{e}^{-\lambda} \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(\lambda t)^n}{n!}$$

et on reconnaît le développement en série de $\exp(\lambda t)$.

Démonstration

1. Si $X \hookrightarrow \mathcal{B}(n, p)$ sa série génératrice est en fait la somme finie :

$$G_X(t) = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} p^k q^{n-k} t^k = (pt+q)^n \quad \text{(formule du binôme).}$$

2. Si $X \hookrightarrow \mathcal{G}(p)$ on a lorsque la série converge :

$$G_X(t) = \sum_{n=1}^{+\infty} p q^{n-1} t^n = pt \sum_{n=1}^{+\infty} (qt)^{n-1}$$

   et l'on reconnaît une série géométrique de raison qt.

3. Si $X \hookrightarrow \mathcal{P}(\lambda)$ on a lorsque la série converge :

$$G_X(t) = \mathrm{e}^{-\lambda} \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{\lambda^n}{n!} t^n = \mathrm{e}^{-\lambda} \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(\lambda t)^n}{n!}$$

   et on reconnaît le développement en série de $\exp(\lambda t)$.

Extrait du programme officiel :

Les étudiants doivent savoir calculer rapidement la fonction génératrice d'une variable aléatoire de Bernoulli, binomiale, géométrique, de Poisson.

Théorème 24: Fonction génératrice de la somme de deux v.a. indépendantes

Soient X et Y deux variables aléatoires à valeurs dans $\mathbb{N}$, G_X et G_Y leurs fonctions génératrices respectives, et R_X, R_Y leurs rayons de convergence.

Si X et Y sont indépendantes on a :

$$\text{pour tout } t \text{ tel que } |t| < \min(R_X, R_Y),\ G_{X+Y}(t) = G_X(t)G_Y(t)\,.$$

Théorème 24: Fonction génératrice de la somme de deux v.a. indépendantes

Soient X et Y deux variables aléatoires à valeurs dans $\mathbb{N}$, G_X et G_Y leurs fonctions génératrices respectives, et R_X, R_Y leurs rayons de convergence.

Si X et Y sont indépendantes on a :

$$\text{pour tout } t \text{ tel que } |t| < \min(R_X, R_Y),\ G_{X+Y}(t) = G_X(t)G_Y(t)\,.$$

Démonstration

X et Y étant indépendantes, il en est de même des variables aléatoires t^X et t^Y pour tout t tel que $|t| < \min(R_X, R_Y)$, en vertu du théorème 5.

Théorème 24: Fonction génératrice de la somme de deux v.a. indépendantes

Soient X et Y deux variables aléatoires à valeurs dans $\mathbb{N}$, G_X et G_Y leurs fonctions génératrices respectives, et R_X, R_Y leurs rayons de convergence.

Si X et Y sont indépendantes on a :

$$\text{pour tout } t \text{ tel que } |t| < \min(R_X, R_Y),\ G_{X+Y}(t) = G_X(t)G_Y(t)\,.$$

Démonstration

X et Y étant indépendantes, il en est de même des variables aléatoires t^X et t^Y pour tout t tel que $|t| < \min(R_X, R_Y)$, en vertu du théorème 5.

Puis en vertu du théorème 12, on aura $\mathbb{E}(t^X)\mathbb{E}(t^Y) = \mathbb{E}(t^X t^Y) = \mathbb{E}(t^{X+Y})$ et il ne reste plus qu'à conclure en utilisant la proposition précédente.

Théorème 24: Fonction génératrice de la somme de deux v.a. indépendantes

Soient X et Y deux variables aléatoires à valeurs dans $\mathbb{N}$, G_X et G_Y leurs fonctions génératrices respectives, et R_X, R_Y leurs rayons de convergence.

Si X et Y sont indépendantes on a :

$$\text{pour tout } t \text{ tel que } |t| < \min(R_X, R_Y),\ G_{X+Y}(t) = G_X(t)G_Y(t)\,.$$

Démonstration

X et Y étant indépendantes, il en est de même des variables aléatoires t^X et t^Y pour tout t tel que $|t| < \min(R_X, R_Y)$, en vertu du théorème 5.

Puis en vertu du théorème 12, on aura $\mathbb{E}(t^X)\mathbb{E}(t^Y) = \mathbb{E}(t^X t^Y) = \mathbb{E}(t^{X+Y})$ et il ne reste plus qu'à conclure en utilisant la proposition précédente.

Remarque : ce résultat se généralise sans difficulté au cas d'une somme finie de variables aléatoires entières indépendantes (utiliser le lemme des coalitions pour faire la récurrence).

Théorème 24: Fonction génératrice de la somme de deux v.a. indépendantes

Soient X et Y deux variables aléatoires à valeurs dans $\mathbb{N}$, G_X et G_Y leurs fonctions génératrices respectives, et R_X, R_Y leurs rayons de convergence.

Si X et Y sont indépendantes on a :

$$\text{pour tout } t \text{ tel que } |t| < \min(R_X, R_Y),\ G_{X+Y}(t) = G_X(t)G_Y(t)\,.$$

Démonstration

X et Y étant indépendantes, il en est de même des variables aléatoires t^X et t^Y pour tout t tel que $|t| < \min(R_X, R_Y)$, en vertu du théorème 5.

Puis en vertu du théorème 12, on aura $\mathbb{E}(t^X)\mathbb{E}(t^Y) = \mathbb{E}(t^X t^Y) = \mathbb{E}(t^{X+Y})$ et il ne reste plus qu'à conclure en utilisant la proposition précédente.

Remarque : ce résultat se généralise sans difficulté au cas d'une somme finie de variables aléatoires entières indépendantes (utiliser le lemme des coalitions pour faire la récurrence).

Exemple

Retrouver la loi de la somme de deux variables indépendantes dans les cas de la loi binomiale et de la loi Poisson..

Théorème 25: Fonction génératrice et moments

Soit X une variable aléatoire définie sur un espace probabilisé $(\Omega, \mathcal{A}, \mathbb{P})$, à valeurs dans $\mathbb{N}$, et G_X sa fonction génératrice. On suppose que $R_X > 1$, de sorte que G_X sera de classe $\mathscr{C}^\infty$ au voisinage de 1. Alors :

$$\forall\, k \in \mathbb{N}^*,\ \ G_X^{(k)}(1) = E\Big(X(X-1)\dots(X-k+1)\Big).$$

Théorème 25: Fonction génératrice et moments

Soit X une variable aléatoire définie sur un espace probabilisé $(\Omega, \mathcal{A}, \mathbb{P})$, à valeurs dans $\mathbb{N}$, et G_X sa fonction génératrice. On suppose que $R_X > 1$, de sorte que G_X sera de classe $\mathscr{C}^\infty$ au voisinage de 1. Alors :

$$\forall\, k \in \mathbb{N}^*,\ G_X^{(k)}(1) = E\Big(X(X-1)\dots(X-k+1)\Big).$$

En particulier : $\mathbb{E}(X) = G_X'(1)$, $\mathbb{E}(X(X-1)) = G_X''(1)$ donc $\mathbb{E}(X^2) = G_X'(1) + G_X''(1)$.

Théorème 25: Fonction génératrice et moments

Soit X une variable aléatoire définie sur un espace probabilisé $(\Omega, \mathcal{A}, \mathbb{P})$, à valeurs dans $\mathbb{N}$, et G_X sa fonction génératrice. On suppose que $R_X > 1$, de sorte que G_X sera de classe $\mathscr{C}^\infty$ au voisinage de 1. Alors :

$$\forall\, k \in \mathbb{N}^*,\ \ G_X^{(k)}(1) = E\Big(X(X-1)\dots(X-k+1)\Big).$$

En particulier : $\mathbb{E}(X) = G_X'(1)$, $\mathbb{E}(X(X-1)) = G_X''(1)$ donc $\mathbb{E}(X^2) = G_X'(1) + G_X''(1)$.

Démonstration

D'après le théorème de dérivation d'une série entière,

$$\forall\, t \in \left]-R_X\,;R_X\right[,\ \ \forall\, k \in \mathbb{N},\ \ G_X^{(k)}(t) = \sum_{n=k}^{+\infty} n(n-1)\dots(n-k+1)\mathbb{P}(X=n)t^{n-k}$$

Théorème 25: Fonction génératrice et moments

Soit X une variable aléatoire définie sur un espace probabilisé $(\Omega, \mathcal{A}, \mathbb{P})$, à valeurs dans $\mathbb{N}$, et G_X sa fonction génératrice. On suppose que $R_X > 1$, de sorte que G_X sera de classe $\mathscr{C}^\infty$ au voisinage de 1. Alors :

$$\forall\, k \in \mathbb{N}^*,\ \ G_X^{(k)}(1) = E\Big(X(X-1)\dots(X-k+1)\Big).$$

En particulier : $\mathbb{E}(X) = G_X'(1)$, $\mathbb{E}(X(X-1)) = G_X''(1)$ donc $\mathbb{E}(X^2) = G_X'(1) + G_X''(1)$.

Démonstration

D'après le théorème de dérivation d'une série entière,

$$\forall\, t \in \left]-R_X\,;R_X\right[,\ \forall\, k \in \mathbb{N},\ \ G_X^{(k)}(t) = \sum_{n=k}^{+\infty} n(n-1)\dots(n-k+1)\mathbb{P}(X=n)t^{n-k}$$

donc

$$G_X^{(k)}(1) = \sum_{n=k}^{+\infty} n(n-1)\dots(n-k+1)\mathbb{P}(X=n) = \mathbb{E}\Big(X(X-1)\dots(X-k+1)\Big)$$

en utilisant le théorème de transfert.

Théorème 25: Fonction génératrice et moments

Soit X une variable aléatoire définie sur un espace probabilisé $(\Omega, \mathcal{A}, \mathbb{P})$, à valeurs dans $\mathbb{N}$, et G_X sa fonction génératrice. On suppose que $R_X > 1$, de sorte que G_X sera de classe $\mathscr{C}^\infty$ au voisinage de 1. Alors :

$$\forall\, k \in \mathbb{N}^*,\ \ G_X^{(k)}(1) = E\Big(X(X-1)\dots(X-k+1)\Big).$$

En particulier : $\mathbb{E}(X) = G_X'(1)$, $\mathbb{E}(X(X-1)) = G_X''(1)$ donc $\mathbb{E}(X^2) = G_X'(1) + G_X''(1)$.

Démonstration

D'après le théorème de dérivation d'une série entière,

$$\forall\, t \in \left]-R_X\,;R_X\right[,\ \forall\, k \in \mathbb{N},\ \ G_X^{(k)}(t) = \sum_{n=k}^{+\infty} n(n-1)\dots(n-k+1)\mathbb{P}(X=n)t^{n-k}$$

donc

$$G_X^{(k)}(1) = \sum_{n=k}^{+\infty} n(n-1)\dots(n-k+1)\mathbb{P}(X=n) = \mathbb{E}\Big(X(X-1)\dots(X-k+1)\Big)$$

en utilisant le théorème de transfert.

Le théorème précédent admet une réciproque.

Théorème 26

Soit X une variable aléatoire définie sur un espace probabilisé $(\Omega, \mathcal{A}, \mathbb{P})$, à valeurs dans $\mathbb{N}$, et G_X sa fonction génératrice.

L'espérance de X existe si et seulement si G_X est dérivable à gauche en 1 et la variance de X existe si et seulement si G_X est deux fois dérivable à gauche en 1.

Dans ce cas on aura encore : $\mathbb{E}(X) = G_X'(1)$ et $\mathbb{E}(X^2) = G_X'(1) + G_X''(1)$.

Théorème 26

Soit X une variable aléatoire définie sur un espace probabilisé $(\Omega, \mathcal{A}, \mathbb{P})$, à valeurs dans $\mathbb{N}$, et G_X sa fonction génératrice.

L'espérance de X existe si et seulement si G_X est dérivable à gauche en 1 et la variance de X existe si et seulement si G_X est deux fois dérivable à gauche en 1.

Dans ce cas on aura encore : $\mathbb{E}(X) = G'_X(1)$ et $\mathbb{E}(X^2) = G'_X(1) + G''_X(1)$.

Démonstration

- Si X admet une espérance, la série $\sum\limits_{n\in\mathbb{N}} n\mathbb{P}(X = n)$ est ACV donc la série entière $\sum\limits_{n\in\mathbb{N}} n\mathbb{P}(X = n)t^n$ est normalement convergente, donc uniformément, sur $[-1\,;1]$.

Théorème 26

Soit X une variable aléatoire définie sur un espace probabilisé $(\Omega, \mathcal{A}, \mathbb{P})$, à valeurs dans $\mathbb{N}$, et G_X sa fonction génératrice.

L'espérance de X existe si et seulement si G_X est dérivable à gauche en 1 et la variance de X existe si et seulement si G_X est deux fois dérivable à gauche en 1.

Dans ce cas on aura encore : $\mathbb{E}(X) = G_X'(1)$ et $\mathbb{E}(X^2) = G_X'(1) + G_X''(1)$.

Démonstration

- Si X admet une espérance, la série $\sum\limits_{n\in\mathbb{N}} n\mathbb{P}(X=n)$ est ACV donc la série entière $\sum\limits_{n\in\mathbb{N}} n\mathbb{P}(X=n)t^n$ est normalement convergente, donc uniformément, sur $[-1\,;1]$. Le théorème de dérivation d'une série de fonctions donne alors le résultat.

Théorème 26

Soit X une variable aléatoire définie sur un espace probabilisé $(\Omega, \mathcal{A}, \mathbb{P})$, à valeurs dans $\mathbb{N}$, et G_X sa fonction génératrice.

L'espérance de X existe si et seulement si G_X est dérivable à gauche en 1 et la variance de X existe si et seulement si G_X est deux fois dérivable à gauche en 1.

Dans ce cas on aura encore : $\mathbb{E}(X) = G_X'(1)$ et $\mathbb{E}(X^2) = G_X'(1) + G_X''(1)$.

Démonstration

- Si X admet une espérance, la série $\sum\limits_{n\in\mathbb{N}} n\mathbb{P}(X=n)$ est ACV donc la série entière $\sum\limits_{n\in\mathbb{N}} n\mathbb{P}(X=n)t^n$ est normalement convergente, donc uniformément, sur $[-1;1]$. Le théorème de dérivation d'une série de fonctions donne alors le résultat.
- Si X admet une variance alors X et X^2 admettent une espérance donc les séries $\sum\limits_{n\in\mathbb{N}} n\mathbb{P}(X=n)$ et $\sum\limits_{n\in\mathbb{N}} n^2\mathbb{P}(X=n)$ sont ACV.

Théorème 26

Soit X une variable aléatoire définie sur un espace probabilisé $(\Omega, \mathcal{A}, \mathbb{P})$, à valeurs dans $\mathbb{N}$, et G_X sa fonction génératrice.

L'espérance de X existe si et seulement si G_X est dérivable à gauche en 1 et la variance de X existe si et seulement si G_X est deux fois dérivable à gauche en 1.

Dans ce cas on aura encore : $\mathbb{E}(X) = G_X'(1)$ et $\mathbb{E}(X^2) = G_X'(1) + G_X''(1)$.

Démonstration

- Si X admet une espérance, la série $\sum\limits_{n\in\mathbb{N}} n\mathbb{P}(X = n)$ est ACV donc la série entière $\sum\limits_{n\in\mathbb{N}} n\mathbb{P}(X = n)t^n$ est normalement convergente, donc uniformément, sur $[-1\,;1]$. Le théorème de dérivation d'une série de fonctions donne alors le résultat.
- Si X admet une variance alors X et X^2 admettent une espérance donc les séries $\sum\limits_{n\in\mathbb{N}} n\mathbb{P}(X = n)$ et $\sum\limits_{n\in\mathbb{N}} n^2\mathbb{P}(X = n)$ sont ACV. La série de fonctions $\sum\limits_{n\in\mathbb{N}^*} n(n-1)\mathbb{P}(X = n)t^n$ est alors normalement donc uniformément convergente sur $[-1\,;1]$,

Théorème 26

Soit X une variable aléatoire définie sur un espace probabilisé $(\Omega, \mathcal{A}, \mathbb{P})$, à valeurs dans $\mathbb{N}$, et G_X sa fonction génératrice.

L'espérance de X existe si et seulement si G_X est dérivable à gauche en 1 et la variance de X existe si et seulement si G_X est deux fois dérivable à gauche en 1.

Dans ce cas on aura encore : $\mathbb{E}(X) = G_X'(1)$ et $\mathbb{E}(X^2) = G_X'(1) + G_X''(1)$.

Démonstration

- Si X admet une espérance, la série $\sum\limits_{n\in\mathbb{N}} n\mathbb{P}(X=n)$ est ACV donc la série entière $\sum\limits_{n\in\mathbb{N}} n\mathbb{P}(X=n)t^n$ est normalement convergente, donc uniformément, sur $[-1;1]$. Le théorème de dérivation d'une série de fonctions donne alors le résultat.
- Si X admet une variance alors X et X^2 admettent une espérance donc les séries $\sum\limits_{n\in\mathbb{N}} n\mathbb{P}(X=n)$ et $\sum\limits_{n\in\mathbb{N}} n^2\mathbb{P}(X=n)$ sont ACV. La série de fonctions $\sum\limits_{n\in\mathbb{N}^*} n(n-1)\mathbb{P}(X=n)t^n$ est alors normalement donc uniformément convergente sur $[-1;1]$, ce qui permet d'en déduire (théorème de dérivation d'une série de fonctions) que G_X est deux fois dérivable à gauche en 1 et que :

Théorème 26

Soit X une variable aléatoire définie sur un espace probabilisé $(\Omega, \mathcal{A}, \mathbb{P})$, à valeurs dans $\mathbb{N}$, et G_X sa fonction génératrice.

L'espérance de X existe si et seulement si G_X est dérivable à gauche en 1 et la variance de X existe si et seulement si G_X est deux fois dérivable à gauche en 1.

Dans ce cas on aura encore : $\mathbb{E}(X) = G_X'(1)$ et $\mathbb{E}(X^2) = G_X'(1) + G_X''(1)$.

Démonstration

- Si X admet une espérance, la série $\sum\limits_{n\in\mathbb{N}} n\mathbb{P}(X=n)$ est ACV donc la série entière $\sum\limits_{n\in\mathbb{N}} n\mathbb{P}(X=n)t^n$ est normalement convergente, donc uniformément, sur $[-1\,;1]$. Le théorème de dérivation d'une série de fonctions donne alors le résultat.
- Si X admet une variance alors X et X^2 admettent une espérance donc les séries $\sum\limits_{n\in\mathbb{N}} n\mathbb{P}(X=n)$ et $\sum\limits_{n\in\mathbb{N}} n^2\mathbb{P}(X=n)$ sont ACV. La série de fonctions $\sum\limits_{n\in\mathbb{N}^*} n(n-1)\mathbb{P}(X=n)t^n$ est alors normalement donc uniformément convergente sur $[-1\,;1]$, ce qui permet d'en déduire (théorème de dérivation d'une série de fonctions) que G_X est deux fois dérivable à gauche en 1 et que :

$$G_X''(1) = \sum_{n=1}^{+\infty} n(n-1)\mathbb{P}(X=n) = \sum_{n=1}^{+\infty} n^2\mathbb{P}(X=n) - \sum_{n=1}^{+\infty} n\mathbb{P}(X=n) = \mathbb{E}(X^2) - \mathbb{E}(X)$$

  puis la relation cherchée.

Théorème 26

Soit X une variable aléatoire définie sur un espace probabilisé $(\Omega, \mathcal{A}, \mathbb{P})$, à valeurs dans $\mathbb{N}$, et G_X sa fonction génératrice.

L'espérance de X existe si et seulement si G_X est dérivable à gauche en 1 et la variance de X existe si et seulement si G_X est deux fois dérivable à gauche en 1.

Dans ce cas on aura encore : $\mathbb{E}(X) = G_X'(1)$ et $\mathbb{E}(X^2) = G_X'(1) + G_X''(1)$.

Démonstration

- Si X admet une espérance, la série $\sum\limits_{n\in\mathbb{N}} n\mathbb{P}(X=n)$ est ACV donc la série entière $\sum\limits_{n\in\mathbb{N}} n\mathbb{P}(X=n)t^n$ est normalement convergente, donc uniformément, sur $[-1\,;1]$. Le théorème de dérivation d'une série de fonctions donne alors le résultat.
- Si X admet une variance alors X et X^2 admettent une espérance donc les séries $\sum\limits_{n\in\mathbb{N}} n\mathbb{P}(X=n)$ et $\sum\limits_{n\in\mathbb{N}} n^2\mathbb{P}(X=n)$ sont ACV. La série de fonctions $\sum\limits_{n\in\mathbb{N}^*} n(n-1)\mathbb{P}(X=n)t^n$ est alors normalement donc uniformément convergente sur $[-1\,;1]$, ce qui permet d'en déduire (théorème de dérivation d'une série de fonctions) que G_X est deux fois dérivable à gauche en 1 et que :

$$G_X''(1) = \sum_{n=1}^{+\infty} n(n-1)\mathbb{P}(X=n) = \sum_{n=1}^{+\infty} n^2\mathbb{P}(X=n) - \sum_{n=1}^{+\infty} n\mathbb{P}(X=n) = \mathbb{E}(X^2) - \mathbb{E}(X)$$

  puis la relation cherchée. **La démonstration de la réciproque est admise.**

Théorème 26

Soit X une variable aléatoire définie sur un espace probabilisé $(\Omega, \mathcal{A}, \mathbb{P})$, à valeurs dans $\mathbb{N}$, et G_X sa fonction génératrice.

L'espérance de X existe si et seulement si G_X est dérivable à gauche en 1 et la variance de X existe si et seulement si G_X est deux fois dérivable à gauche en 1.

Dans ce cas on aura encore : $\mathbb{E}(X) = G'_X(1)$ et $\mathbb{E}(X^2) = G'_X(1) + G''_X(1)$.

Démonstration

- Si X admet une espérance, la série $\sum\limits_{n\in\mathbb{N}} n\mathbb{P}(X=n)$ est ACV donc la série entière $\sum\limits_{n\in\mathbb{N}} n\mathbb{P}(X=n)t^n$ est normalement convergente, donc uniformément, sur $[-1\,;1]$. Le théorème de dérivation d'une série de fonctions donne alors le résultat.
- Si X admet une variance alors X et X^2 admettent une espérance donc les séries $\sum\limits_{n\in\mathbb{N}} n\mathbb{P}(X=n)$ et $\sum\limits_{n\in\mathbb{N}} n^2\mathbb{P}(X=n)$ sont ACV. La série de fonctions $\sum\limits_{n\in\mathbb{N}^*} n(n-1)\mathbb{P}(X=n)t^n$ est alors normalement donc uniformément convergente sur $[-1\,;1]$, ce qui permet d'en déduire (théorème de dérivation d'une série de fonctions) que G_X est deux fois dérivable à gauche en 1 et que :

$$G''_X(1) = \sum_{n=1}^{+\infty} n(n-1)\mathbb{P}(X=n) = \sum_{n=1}^{+\infty} n^2\mathbb{P}(X=n) - \sum_{n=1}^{+\infty} n\mathbb{P}(X=n) = \mathbb{E}(X^2) - \mathbb{E}(X)$$

  puis la relation cherchée. **La démonstration de la réciproque est admise.**

Exemple

Retrouver les moments d'une variable aléatoire suivant une loi binomiale, géométrique et de Poisson...

FIN DU CHAPITRE XVIII