

ÉQUATIONS DIFFÉRENTIELLES LINÉAIRES SCALAIRES D'ORDRE 1

Dans ce chapitre, I est un intervalle de $\mathbb{R}$ et $\mathbb{K}$ désigne $\mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$.

Déf 1:

Soient $\alpha, \beta, \gamma : I \rightarrow \mathbb{K}$ des applications continues.

On considère l'équation différentielle linéaire scalaire du premier ordre :

$$\alpha(t)x' + \beta(t)x = \gamma(t) \quad (L)$$

On appelle solution de (L) sur I toute application $f : I \rightarrow \mathbb{K}$, dérivable, telle que

$$\forall t \in I, \alpha(t)f'(t) + \beta(t)f(t) = \gamma(t).$$

L'équation (L) est dite homogène si $\gamma = 0$. L'équation homogène associée à (L) est l'équation :

$$\alpha(t)x' + \beta(t)x = 0 \quad (H)$$

Prop 1:

1. L'ensemble $\mathcal{S}(H)$ des solutions de l'équation homogène (H) est un sous-espace vectoriel de l'espace vectoriel $\mathcal{D}(I, \mathbb{K})$ des applications dérivables de I dans $\mathbb{K}$.
2. Si f_0 est une solution particulière de (L) (s'il en existe), l'ensemble $\mathcal{S}(L)$ des solutions de l'équation (L) est égal à $f_0 + \mathcal{S}(H) = \{f_0 + h \mid h \in \mathcal{S}(H)\}$.

Démonstration:

1. Immédiat par la caractérisation d'un sous-espace vectoriel : $\mathcal{S}(H)$ contient la fonction nulle et est stable par combinaisons linéaires.

2. Si f_0 est solution de (L), alors pour une application $f : I \rightarrow \mathbb{K}$ dérivable, on a :

$$f \in \mathcal{S}(L) \iff \alpha f' + \beta f = \gamma \iff \alpha f' + \beta f = \alpha f_0' + \beta f_0 \iff \alpha(f' - f_0') + \beta(f - f_0) = 0 \iff f - f_0 \in \mathcal{S}(H)$$

ce qui établit le résultat.

Remarques

1. Il suffit donc, pour déterminer $\mathcal{S}(L)$, de connaître une solution de (L) et les solutions de (H) : si f_0 est une solution particulière de l'équation complète (L), alors la solution générale de (L) est : $f = f_0 + h$ où h désigne une solution quelconque de l'équation homogène (H).
2. Sans plus d'hypothèse, on ne peut pas prévoir la dimension de $\mathcal{S}(H)$, ni garantir que (L) possède effectivement une solution sur I , comme on le verra plus loin sur des exemples.

Comme dans tout problème linéaire, on dispose aussi du principe de superposition des solutions :

Prop 2:

Soient $\gamma_1, \gamma_2 : I \rightarrow \mathbb{K}$ deux applications continues et $\lambda_1, \lambda_2 \in \mathbb{K}$.

Si f_1 est une solution de l'équation $\alpha(t)x' + \beta(t)x = \gamma_1(t)$ et f_2 est une solution de l'équation $\alpha(t)x' + \beta(t)x = \gamma_2(t)$, alors $\lambda_1 f_1 + \lambda_2 f_2$ est une solution de l'équation $\alpha(t)x' + \beta(t)x = \lambda_1 \gamma_1(t) + \lambda_2 \gamma_2(t)$.

Rem: Ce résultat se généralise sans problème au cas où le second membre est de la forme $\sum_{i=1}^n \lambda_i \gamma_i(t)$.

■ Résolution dans le cas où α ne s'annule pas

Si l'application α ne s'annule pas sur I , l'équation (L) est alors équivalente à :

$$x' = -\frac{\beta(t)}{\alpha(t)}x + \frac{\gamma(t)}{\alpha(t)}$$

donc on se ramène à une équation sous forme réduite (ou équation résolue) de la forme :

$$x' = a(t)x + b(t) \quad (L)$$

où a et b sont des applications continues de I dans $\mathbb{K}$.

Rem: Dans le cas où x est solution d'une telle équation, x est nécessairement de classe $\mathcal{C}^1$.

Prop 3:

Si l'application a est continue sur I , l'ensemble $\mathcal{S}(H)$ des solutions sur I de l'équation différentielle homogène : $x' = a(t)x$ est une droite vectorielle.

Si A est une primitive quelconque de a , l'application $t \mapsto e^{A(t)}$ est une base de $\mathcal{S}(H)$.

 **Démonstration:**

Soit A une primitive de la fonction continue a sur I . Soit $f : I \rightarrow \mathbb{K}$ dérivable; puisque $e^{-A(t)} \neq 0$ pour tout $t \in I$:

$$f \text{ est solution de } (H) \iff \forall t \in I, f'(t) - a(t)f(t) = 0 \iff \forall t \in I, f'(t)e^{-A(t)} - f(t)A'(t)e^{-A(t)} = 0$$

$$\iff \forall t \in I, \frac{d}{dt} (f(t)e^{-A(t)}) = 0 \iff \exists \lambda \in \mathbb{K}, \forall t \in I, f(t)e^{-A(t)} = \lambda \iff \exists \lambda \in \mathbb{K}, \forall t \in I, f(t) = \lambda e^{A(t)}$$

d'où le résultat.

Rem: L'expression trouvée ci-dessus montre que, si une solution n'est pas la solution nulle, elle ne peut s'annuler sur I .

Cela justifie a posteriori la « méthode » suivante (lorsque $\mathbb{K} = \mathbb{R}$), qui permet de se rappeler facilement la structure de l'ensemble des solutions :

$$x' = ax \iff \frac{x'}{x} = a \iff \ln |x| = \int a + cste \iff x = \lambda e^{\int a}.$$

Théorème 1: de Cauchy-Lipschitz

Si a et b sont des applications continues de I dans $\mathbb{K}$, pour tout $(t_0, x_0) \in I \times \mathbb{K}$ il existe une et une seule solution f de l'équation différentielle

$$x' = a(t)x + b(t) \quad (L)$$

définie sur I et qui vérifie la condition initiale : $f(t_0) = x_0$.

 **Démonstration:**

Cette démonstration montre l'utilisation de la *méthode de variation de la constante*.

Soit f une application dérivable de I dans $\mathbb{K}$. Il existe alors une application λ dérivable sur I telle que : $\forall t \in I, f(t) = \lambda(t)e^{A(t)}$ (puisque $t \mapsto e^{A(t)}$ ne s'annule pas). On a alors :

$$f \text{ est solution de } (L) \iff \forall t \in I, f'(t) - a(t)f(t) = b(t) \iff \lambda'(t)e^{A(t)} = b(t) \iff \lambda'(t) = b(t)e^{-A(t)}$$

$$\text{soit } \lambda(t) = \int_{t_0}^t b(u)e^{-A(u)} du + C \text{ où } C \text{ est un scalaire.}$$

La solution générale de (L) est alors donnée par :

$$\forall t \in I, f(t) = e^{A(t)} \left(\int_{t_0}^t b(u)e^{-A(u)} du \right) + Ce^{A(t)} \text{ avec } C \in \mathbb{K}, A \text{ primitive de } a.$$

La condition initiale $f(t_0) = x_0$, équivaut alors à $C = x_0 e^{-A(t_0)}$, d'où son existence et unicité.

■ Cas d'une équation à coefficients constants

Il s'agit ici d'une équation de la forme $x' - ax = b(t)$, où $a \in \mathbb{K}$ est une constante. Dans ce cas, l'ensemble des solutions de l'équation homogène $x' - ax = 0$ est l'ensemble des fonctions de la forme $t \mapsto Ce^{at}$.

La méthode de variation de la constante s'applique bien sûr pour la résolution de l'équation complète, mais il y a un cas particulier à retenir :

Si le second membre est de la forme $b(t) = e^{mt}P(t)$ où $m \in \mathbb{C}$ et où P est un polynôme, on peut rechercher (avec des coefficients à déterminer) une solution particulière de l'équation $x' - ax = e^{mt}P(t)$ sous la forme $e^{mt}Q(t)$ avec Q polynôme de même degré que P si $m \neq a$, ou de la forme $e^{mt}tQ(t)$ avec Q polynôme de même degré que P si $m = a$.

■ Problème des raccords

Revenons au cas général d'une équation différentielle de la forme

$$\alpha(t)x' + \beta(t)x = \gamma(t) \quad (L)$$

où α , β , γ sont des applications continues sur un intervalle I , à valeurs dans $\mathbb{K}$.

Pour résoudre complètement l'équation sur tout l'intervalle I , on commence par chercher des sous-intervalles maximaux $I_1, \dots, I_n$ de I sur lesquels α ne s'annule pas. Sur chacun de ces intervalles, on peut appliquer les résultats précédents. Il faut ensuite raccorder les solutions trouvées :

Supposons pour simplifier que $I =]a; b[\cup]b; c[$, avec $\alpha(b) = 0$ et α ne s'annulant pas sur $]a; b[$ ni sur $]b; c[$.

On a donc trouvé des solutions f_1 sur $]a; b[$, dépendant d'une certaine constante C_1 , et des solutions f_2 sur $]b; c[$, dépendant d'une constante C_2 .

Pour qu'il existe une solution f définie sur I , il faut et il suffit que f vérifie l'équation pour $t = b$, que f coïncide avec f_1 sur $]a; b[$ et f_2 sur $]b; c[$, et que f soit dérivable sur I . Pour cela, les constantes C_1 et C_2 doivent être choisies telles que

$$\lim_{t \rightarrow b^-} f_1(t) = \lim_{t \rightarrow b^+} f_2(t) \quad \text{et} \quad \lim_{t \rightarrow b^-} f_1'(t) = \lim_{t \rightarrow b^+} f_2'(t)$$

ces limites étant des réels finis.

On notera qu'il n'existe pas nécessairement de solution à ce problème (le théorème de Cauchy-Lipschitz ne s'appliquant pas dans ce cas).

■ Quelques exemples

1. Résoudre l'équation différentielle : $xy' - 2y = x$. Étudier le problème de Cauchy.

 *Solution:*

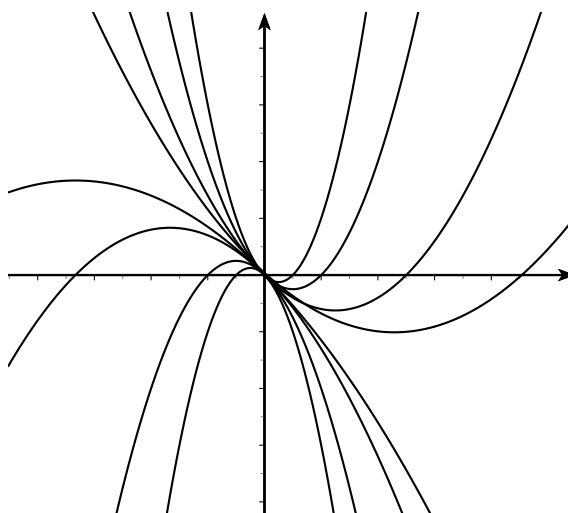
L'équation homogène $xy' - 2y = 0$ admet pour solutions les fonctions $x \mapsto \lambda x^2$, et l'équation complète admet pour solution particulière $y = -x$.

L'ensemble des solutions de (L) est donc inclus dans l'ensemble des applications définies sur $\mathbb{R}$ par :

$$y = \begin{cases} \lambda x^2 - x & \text{si } x < 0 \\ \mu x^2 - x & \text{si } x > 0 \end{cases} \quad \text{avec } \lambda, \mu \in \mathbb{R}.$$

Il est facile de vérifier que toutes ces applications sont de classe $\mathcal{C}^1$ sur $\mathbb{R}$, pour tous λ et μ ; l'ensemble des solutions sur $\mathbb{R}$ est donc un espace affine de dimension 2.

Voici l'allure des courbes intégrales :



Problème de Cauchy : par tout point (x_0, y_0) du plan passent une infinité de courbes intégrales, sauf aux points de coordonnées $(x_0, 0)$ avec $x_0 \neq 0$, où il n'en passe aucune.

2. Chercher les solutions de l'équation différentielle :

$$(1-x)y' - \frac{y}{2} = x.$$

Existe-t-il des solutions sur $\mathbb{R}$?

 Solution:

On résout l'équation sur chacun des intervalles $]-\infty; 1[$ et $]1; +\infty[$.

L'équation homogène associée est : $(1-x)y' - \frac{y}{2} = 0$. Elle a pour solution générale :

$$\lambda \exp\left(\int \frac{dx}{2(1-x)}\right) = \frac{\lambda}{\sqrt{|1-x|}}.$$

On cherche alors les solutions de l'équation complète sous la forme : $y(x) = \frac{\lambda(x)}{\sqrt{|1-x|}}$, ce qui conduit (*sans calculs!*) à :

$$\frac{\lambda'(x)}{\sqrt{|1-x|}} = \frac{x}{1-x}.$$

– Pour $x > 1$, cela s'écrit : $\lambda'(x) = \frac{-x}{\sqrt{x-1}}$ donc

$$\lambda(x) = -\int \frac{x}{\sqrt{x-1}} dx \underset{u=\sqrt{x-1}}{=} -\int 2(u^2+1) du = -\frac{2}{3}u^3 - 2u + C_1 = -\frac{2}{3}\sqrt[3]{x-1} - 2\sqrt{x-1} + C_1$$

d'où :

$$\forall x \in]1; +\infty[, y(x) = -\frac{2}{3}(x-1) - 2 + \frac{C_1}{\sqrt{x-1}} = -\frac{2}{3}(x+2) + \frac{C_1}{\sqrt{x-1}}.$$

Un calcul similaire donne, pour $x < 1$:

$$\forall x \in]-\infty; 1[, y(x) = -\frac{2}{3}(x+2) + \frac{C_2}{\sqrt{1-x}}.$$

Puisque $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{1}{\sqrt{|1-x|}} = +\infty$, la seule solution définie sur $\mathbb{R}$ est : $y(x) = -\frac{2}{3}(x+2)$.

3. Chercher les solutions de l'équation différentielle :

$$(E) \quad x(x^2-1)y' + 2y = x^2.$$

Existe-t-il une solution définie sur $\mathbb{R}$?

 Solution:

Les intervalles de définition sont les

$$I_1 =]-\infty; -1[, \quad I_2 =]-1; 0[, \quad I_3 =]0; 1[\quad \text{et} \quad I_4 =]1; +\infty[.$$

De plus, puisque $x \mapsto x(x^2-1)$ est impaire, une solution f_3 sur I_3 donne une solution sur I_2 par $f_2(t) = f_3(-t)$, et de même pour I_4 et I_1 . L'équation homogène associée à (E) est

$$(E_0) \quad y' - a(x)y = 0 \quad \text{avec} \quad a(x) = \frac{-2}{x(x^2-1)} = 2\left(\frac{1}{x} - \frac{x}{x^2-1}\right).$$

Les solutions de E_0 , qui est du premier ordre et linéaire, sont donc les

$$x \mapsto \lambda \frac{x^2}{x^2-1}.$$

On effectue une variation de la constante en posant $y = \frac{x^2}{x^2-1}\phi(x)$, ce qui mène à $\phi'(x) = \frac{1}{x}$ et donc $\phi(x) = \ln|x|$. Ainsi, la solution générale est de la forme

$$y = \frac{x^2}{x^2-1}(\ln|x| + \lambda_k), \quad k \in \llbracket 1; 4 \rrbracket.$$

Pour que les solutions se recollent bien en 1, il faut $\lambda_3 = \lambda_4 = 0$, ce qui donne

$$y = \frac{x^2 \ln x}{x^2-1} \quad y(1) = \frac{1}{2}, \quad y'(1) = \frac{1}{2},$$

et cette solution admet une limite en 0, qui vaut 0. Comme de plus $\frac{y}{x}$ admet aussi une limite en 0, le prolongement par continuité puis prolongement par parité est de classe $\mathcal{C}^1$ sur $\mathbb{R}$ et la solution unique est donc, sous une forme paire :

$$y : x \mapsto \frac{1}{2} \frac{x^2 \ln x^2}{x^2-1}.$$

4. Résoudre l'équation différentielle : $x' \sin t - x \cos t = \sin^3 t$.

 Solution:

Plaçons-nous d'abord sur un intervalle où la fonction $\sin$ ne s'annule pas : $I_k =]k\pi, (k+1)\pi[$ ($k \in \mathbb{Z}$).

L'ensemble des solutions de l'équation homogène est l'ensemble des fonctions de la forme $x(t) = C \sin t$. Cherchons une solution de l'équation complète sous la forme $x(t) = C(t) \sin t$. On obtient $C'(t) = \sin t$, d'où $C(t) = -\cos t + C_k$, puis $x(t) = -\sin t \cos t + C_k \sin t$. Les constantes C_k sont indépendantes. L'espace des solutions sur $\mathbb{R} \setminus \pi\mathbb{Z}$ est de dimension infinie. Cependant chaque solution se prolonge de façon unique par continuité et dérivabilité en $k\pi$. Les solutions sur $\mathbb{R}$ sont les fonctions x de la forme : $x(t) = -\sin t \cos t + C \sin t$; elles forment un espace affine de dimension 1.