ESPACES VECTORIELS

Dans tout le chapitre, $\mathbb{K}$ désigne $\mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$.

I. Définitions

Déf 1:

Un $\mathbb{K}$-espace vectoriel est un triplet $(E,+,.)$, où E est un ensemble et :

- $+$ une loi de composition interne sur E, telle que $(E,+)$ soit un *groupe abélien*, c'est-à-dire :
  (i) la loi $+$ est une application de $E \times E$ dans E : $\forall (x,y) \in E^2$, $x+y \in E$ (loi *interne*) ;
  (ii) la loi $+$ est *associative* : $\forall (x,y,z) \in E^3$, $(x+y)+z = x+(y+z)$;
  (iii) la loi $+$ est *commutative* : $\forall (x,y) \in E^2$, $x+y = y+x$;
  (iv) la loi $+$ possède un *élément neutre*, noté 0_E : $\forall x \in E$, $x + 0_E = x$;
  (v) tout élément x de E possède un *symétrique* pour la loi $+$, noté $-x$: $x+(-x) = 0_E$.
- $.$ une loi de composition externe de domaine d'opérateurs $\mathbb{K}$, c'est-à-dire une application $\begin{cases} \mathbb{K} \times E \longrightarrow E \\ (\lambda, x) \longmapsto \lambda.x \end{cases}$ vérifiant les propriétés suivantes : $\forall (\lambda,\mu) \in \mathbb{K}^2$, $\forall (x,y) \in E^2$,
  (i) $1_{\mathbb{K}}.x = x$;
  (ii) $\lambda.(x+y) = \lambda.x + \lambda.y$;
  (iii) $(\lambda+\mu).x = \lambda.x + \mu.x$;
  (iv) $\lambda.(\mu.x) = (\lambda\mu).x$.

Les éléments du $\mathbb{K}$-espace vectoriel E sont appelés les vecteurs et ceux de $\mathbb{K}$ sont appelés les scalaires.

Conséquences: si $(E,+,.)$ est un $\mathbb{K}$-espace vectoriel, alors :

1. $\forall \lambda \in \mathbb{K}$, $\forall x \in E$, $\lambda.x = 0_E \iff \lambda = 0_{\mathbb{K}}$ ou $x = 0_E$.
2. $\forall (\lambda,\mu) \in \mathbb{K}^2, \forall x \in E, (\lambda-\mu).x = \lambda.x - \mu.x$.
3. $\forall \lambda \in \mathbb{K}$, $\forall (x,y) \in E^2$, $\lambda.(x-y) = \lambda.x - \lambda.y$.

Exemples de référence

1. $\mathbb{K}$ est un $\mathbb{K}$-espace vectoriel.
2. $\mathbb{C}$ est un $\mathbb{R}$-espace vectoriel pour les lois usuelles.
3. Si D est un ensemble quelconque et E un $\mathbb{K}$-espace vectoriel, l'ensemble $\mathcal{A}(D,E)$ (noté aussi E^D) des applications de D dans E peut être muni d'une structure de $\mathbb{K}$-espace vectoriel pour les lois :
$$\begin{cases} (f,g) \longmapsto f+g & \text{avec : } \forall x \in D,\ (f+g)(x) = f(x) +_E g(x) \\ (\lambda, f) \longmapsto \lambda.f & \text{avec : } (\lambda.f)(x) = \lambda.f(x) \end{cases}$$
   Le vecteur nul de cet espace vectoriel est la fonction nulle de D dans E, qui à tout élément $x \in D$ associe le vecteur 0_E.
4. En particulier, l'ensemble $E^{\mathbb{N}} = \mathcal{A}(\mathbb{N},E)$ des suites à valeurs dans E est un $\mathbb{K}$-espace vectoriel pour les lois ainsi définies : si u et v sont deux suites à valeurs dans E et λ un scalaire :
   · $u+v$ est la suite donnée par : $\forall n \in \mathbb{N}$, $(u+v)_n = u_n + v_n$;
   · $\lambda.u$ est la suite donnée par : $\forall n \in \mathbb{N}$, $(\lambda.u)_n = \lambda.u_n$.

   Le vecteur nul de cet espace vectoriel est la suite nulle, c'est-à-dire telle que $\forall n \in \mathbb{N}$, $u_n = 0_E$.
5. $\mathbb{K}[X]$, $\mathbb{K}$-espace vectoriel des polynômes à coefficients dans $\mathbb{K}$.
6. $\mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{K})$, ensemble des matrices de type (n,p) à coefficients dans $\mathbb{K}$.

Prop 1:

Soient $E_1, E_2, \ldots, E_p$ p $\mathbb{K}$-espaces vectoriels. Alors l'ensemble produit $E = E_1 \times E_2 \times \ldots \times E_p$ est un $\mathbb{K}$-espace vectoriel pour les lois définies par :
$\forall (x_1, x_2, \ldots, x_p),\ (y_1, y_2, \ldots, y_p) \in E_1 \times E_2 \times \ldots \times E_p, \quad \forall \lambda \in \mathbb{K}$:

$$\begin{aligned}(x_1, x_2, \ldots, x_p) + (y_1, y_2, \ldots, y_p) &= (x_1 + y_1, x_2 + y_2, \ldots, x_p + y_p)\\ \lambda.(x_1, x_2, \ldots, x_p) &= (\lambda x_1, \lambda x_2, \ldots, \lambda x_p)\end{aligned}$$

Muni de ces lois, E s'appelle l'espace vectoriel produit des E_i.

Rem : Le vecteur nul de E est le p-uplet $(0_{E_1}, \ldots, 0_{E_p})$.

Exemple

$\mathbb{K}^p$ (ensemble des p-uplets de scalaires) est un $\mathbb{K}$-espace vectoriel pour les lois définies ci-dessus.

II. Sous-espace vectoriel

Déf 2:

Soit $(E, +, .)$ un $\mathbb{K}$-espace vectoriel. Une ***partie*** F de E est appelée un sous-espace vectoriel de E si $(F, +, .)$ est encore un $\mathbb{K}$-espace vectoriel (pour les mêmes lois que celles de E).

Rem: Cette définition *implique*, en particulier :

- que la loi $+$ est interne dans F c'est-à-dire : $\forall (x, y) \in F^2, x + y \in F$ (*on dit aussi que F est stable par la loi $+$*) ;
- que le vecteur nul, 0_E, appartient à F (car $(F, +)$ possède un élément neutre, et ce ne peut être que 0_E par unicité) ;
- que la loi $.$ est une loi de composition externe sur F, donc : $\forall \lambda \in \mathbb{K}, \forall x \in F, \lambda.x \in F$ (*on dit aussi que F est stable par la loi* $.$).

Théorème 1:

F est un sous-espace vectoriel de E si et seulement si :

(i) $F \subset E$;

(ii) $F \neq \emptyset$;

(iii) $\forall (\lambda, \mu) \in \mathbb{K}^2, \forall (x, y) \in F^2, \quad \lambda x + \mu y \in F$.

Remarques

1. On peut remplacer la condition (ii) par : $0_E \in F$.
C'est ce que l'on fait généralement puisque, si F est un sous-espace vectoriel de E, alors nécessairement il contient 0_E.
2. On peut remplacer la condition (iii) par :
$$\forall \lambda \in \mathbb{K}, \forall (x, y) \in F^2, \quad \lambda x + y \in F$$
ou par :
$$\forall \lambda \in \mathbb{K}, \forall (x, y) \in F^2, \quad x + y \in F \text{ et } \lambda x \in F$$

Rem: Si F est un sous-espace vectoriel de E, il est alors facile de démontrer par récurrence que F est *stable par combinaisons linéaires* c'est-à-dire :

$$\forall n \in \mathbb{N}, \forall (\lambda_1, \ldots, \lambda_n) \in \mathbb{K}^n, \forall (x_1, \ldots, x_n) \in F^n, \quad \sum_{i=1}^{n} \lambda_i x_i \in F.$$

Exemples

1. $\{0_E\}$ et E sont des sous-espaces vectoriels de E (dits triviaux).
2. Si $n \in \mathbb{N}$, $\mathbb{K}_n[X]$, ensemble des polynômes de $\mathbb{K}[X]$ de degré inférieur ou égal à n, est un sous-espace vectoriel de $\mathbb{K}[X]$.

   Attention : L'ensemble des polynômes de degré *exactement* n n'est PAS un sous-espace vectoriel de $\mathbb{K}[X]$; en effet, il ne contient même pas le polynôme nul !
3. Si $P \in \mathbb{K}[X]$, l'ensemble $\mathbb{K}[X] \cdot P$ des multiples de P est un sous-espace vectoriel de $\mathbb{K}[X]$.
4. Si I est un intervalle de $\mathbb{R}$, l'ensemble $\mathscr{C}(I, \mathbb{R})$ des fonctions continues sur I à valeurs réelles est un sous-espace vectoriel de $\mathcal{A}(I, \mathbb{R})$.

Prop 2:

Si $(E_i)_{i\in I}$ est une famille quelconque de sous-espaces vectoriels de E, leur intersection $\bigcap\limits_{i\in I} E_i$ est encore un sous-espace vectoriel de E.

Prop 3:

Soit X une partie quelconque d'un $\mathbb{K}$-espace vectoriel E.
D'après la proposition précédente, l'intersection de tous les sous-espaces vectoriels de E qui contiennent X est encore un sous-espace vectoriel de E ; c'est en fait le plus petit (pour l'inclusion) sous-espace vectoriel de E contenant X ;

On l'appelle sous-espace vectoriel engendré par X, et on le note $\mathrm{Vect}(X)$.

Remarques

1. $\mathrm{Vect}(\varnothing) = \{0_E\}$.
2. F est un sous-espace vectoriel de E si et seulement si $\mathrm{Vect}(F) = F$.

Rem : La **réunion** de sous-espaces vectoriels de E n'est pas, en général, un sous-espace vectoriel de E .

Exemple : Dans $\mathbb{R}^2$, la *réunion* F des deux sous-espaces vectoriels $\mathbb{R} \times \{0\}$ et $\{0\} \times \mathbb{R}$ n'est pas un sous-espace vectoriel de $\mathbb{R}^2$ puisque, par exemple, $(1, 0) + (0, 1)$ n'appartient pas à F.

Plus précisément, on peut démontrer le résultat suivant :

Prop 4:

Si A et B sont deux sous-espaces vectoriels d'un espace vectoriel E, $A \cup B$ est encore un sous-espace vectoriel de E si et seulement si $A \subset B$ ou $B \subset A$.

III. Combinaisons linéaires

Déf 3:

Une famille $(\lambda_i)_{i\in I}$ d'éléments de $\mathbb{K}$ est dite à support fini si et seulement si l'ensemble $\{i \in I \mid \lambda_i \neq 0_{\mathbb{K}}\}$ est fini (on dit aussi que les λ_i sont presque tous nuls).

On dit de même qu'une famille $(x_i)_{i\in I}$ d'éléments d'un $\mathbb{K}$-espace vectoriel E est à support fini si l'ensemble $\{i \in I \mid x_i \neq 0_E\}$ est fini.

Déf 4:

Soit $(x_i)_{i\in I}$ une famille quelconque non vide d'éléments d'un $\mathbb{K}$-espace vectoriel E. On dit que $x \in E$ est combinaison linéaire de cette famille s'il existe une famille $(\lambda_i)_{i\in I}$ d'éléments de $\mathbb{K}$ *à support fini* telle que :

$$x = \sum_{\substack{i\in I \\ \lambda_i \neq 0}} \lambda_i x_i .$$

On note alors simplement $x = \sum\limits_{i\in I} \lambda_i x_i$ (somme en fait finie).

Rem : dans le cas d'une famille finie $(x_1, \ldots, x_n)$ de vecteurs, x est combinaison linéaire de cette famille si et seulement si il s'écrit $x = \sum\limits_{i=1}^{n} \lambda_i x_i$ où $(\lambda_1, \ldots, \lambda_n) \in \mathbb{K}^n$.

Théorème 2:

Soit $X = (x_i)_{i\in I}$ une famille quelconque non vide d'éléments d'un $\mathbb{K}$-espace vectoriel E.
Alors $\mathrm{Vect}(X)$ est exactement l'ensemble des combinaisons linéaires des éléments de X.

Rem: Ce théorème prouve, en particulier, que l'ensemble des combinaisons linéaires d'une partie de E est un sous-espace vectoriel de E.
Ce résultat est utile pour abréger certaines démonstrations (voir derniers exemples ci-dessous).

Exemples

1. Soit $x \in E$. Alors $\mathrm{Vect}(\{x\}) = \mathbb{K}.x = \{\lambda x \mid \lambda \in \mathbb{K}\}$.
   Si $x \neq 0_E$, $\mathbb{K}x$ s'appelle la droite vectorielle engendrée par x.
2. Dans $\mathbb{K}[X]$: $\mathbb{K}[X] = \mathrm{Vect}\left((X^i)_{i\in\mathbb{N}}\right)$ et $\mathbb{K}_n[X] = \mathrm{Vect}\left((X^i)_{0\leqslant i\leqslant n}\right)$.
3. Exemple important — Dans l'espace vectoriel $\mathcal{M}_2(\mathbb{R})$ des matrices carrées d'ordre 2 à coefficients réels, soit F l'ensemble des matrices de la forme $\begin{pmatrix} a & -b \\ b & a \end{pmatrix}$ pour $(a,b) \in \mathbb{R}^2$.
   On peut dire sans calcul que F est un sous-espace vectoriel de $\mathcal{M}_2(\mathbb{R})$, car on remarque qu'il s'agit de l'ensemble des combinaisons linéaires des vecteurs $I = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ et $J = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$. C'est donc le sous-espace vectoriel $\mathrm{Vect}(\{I, J\})$.
4. Exemple important — Dans l'espace vectoriel $\mathbb{R}^3$, l'ensemble $F = \left\{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 \;\middle|\; x+y+z = 0\right\}$ est un sous-espace vectoriel.
   En effet, $u = (x,y,z)$ appartient à F si et seulement si il existe $(x,y) \in \mathbb{R}^2$ tel que
   $$u = (x, y, -x-y) = x(1,0,-1) + y(0,1,-1).$$
   F est donc le sous-espace vectoriel engendré par les vecteurs $(1,0,-1)$ et $(0,1,-1)$.

IV. Somme d'une famille finie de sous-espaces vectoriels

Déf 5:

Soit $(E_i)_{1\leqslant i\leqslant n}$ une famille de n sous-espaces vectoriels de E ($n \in \mathbb{N}^*$).

On appelle somme des E_i, notée $\sum\limits_{i=1}^{n} E_i$, l'ensemble des vecteurs x de E qui peuvent s'écrire d'au moins une façon sous la forme $x = \sum\limits_{i=1}^{n} x_i$ avec $x_i \in E_i$ pour tout $i \in [\![1\,;n]\!]$:

$$\sum_{i=1}^{n} E_i = \left\{ x \in E \;\middle|\; \exists\,(x_1, \ldots, x_n) \in \prod_{i=1}^{n} E_i \text{ tq } x = \sum_{i=1}^{n} x_i \right\}.$$

Théorème 3:

1. $\sum_{i=1}^{n} E_i$ est un sous-espace vectoriel de E.
2. Plus précisément, $\sum_{i=1}^{n} E_i$ est le sous-espace vectoriel engendré par $\bigcup_{i=1}^{n} E_i$, c'est-à-dire le plus petit sous-espace vectoriel de E qui contient tous les E_i :

$$\sum_{i=1}^{n} E_i = \operatorname{Vect}\left(\bigcup_{i=1}^{n} E_i\right).$$

Rem: Soit $X = (x_i)_{1 \leqslant i \leqslant n}$ une famille de n vecteurs de E. Alors $\operatorname{Vect}(X) = \sum_{i=1}^{n} \mathbb{K}.x_i$.

Rem: Dans le cas d'une famille quelconque $(E_i)_{i \in I}$ de sous-espaces vectoriels de E (pas nécessairement finie), $\sum_{i \in I} E_i$ désigne l'ensemble des vecteurs de la forme $\sum_{i \in I} x_i$, où $x_i \in E_i$ pour tout $i \in I$ et où la famille (x_i) est *à support fini* (c'est-à-dire que les x_i sont tous nuls sauf un nombre fini).

Déf 6:

Soit $(E_i)_{1 \leqslant i \leqslant n}$ une famille de n sous-espaces vectoriels de E.
On dit que la somme $\sum_{i=1}^{n} E_i$ est directe si :

pour tout $x \in \sum_{i=1}^{n} E_i$, il existe une *unique* famille $(x_i)_{1 \leqslant i \leqslant n} \in \prod_{i=1}^{n} E_i$ telle que $x = \sum_{i=1}^{n} x_i$.

On note alors : $\bigoplus_{i=1}^{n} E_i$ au lieu de $\sum_{i=1}^{n} E_i$.

Exemple

$$\mathbb{K}_n[X] = \bigoplus_{i=0}^{n} \mathbb{K}.X^i$$

Rem: Dans le cas d'une famille quelconque $(E_i)_{i \in I}$ de sous-espaces vectoriels de E, on dit que la somme $\sum_{i \in I} E_i$ est *directe* si tout élément x de cette somme s'écrit de manière unique sous la forme $\sum_{i \in I} x_i$ où, pour tout $i \in I$, $x_i \in I$ et où la famille (x_i) est *à support fini*.
Par exemple, on peut écrire : $\mathbb{K}[X] = \bigoplus_{n \in \mathbb{N}} \mathbb{K}.X^n$.

Théorème 4: caractérisation d'une somme directe

Pour que la somme $\sum_{i=1}^{n} E_i$ soit directe, il faut et il suffit que :

$$\text{pour toute famille } (x_i)_{1 \leqslant i \leqslant n} \in \prod_{i=1}^{n} E_i, \quad \sum_{i=1}^{n} x_i = 0 \Longrightarrow \forall i \in [\![1\,;n]\!],\ x_i = 0.$$

Prop 5:

Pour que $\boxed{\textit{deux}}$ sous-espaces vectoriels E_1 et E_2 de E soient en somme directe, il faut et il suffit que : $E_1 \cap E_2 = \{0_E\}$

Rem : Cela ne se généralise pas à plus de *deux* sous-espaces vectoriels.
Exemple : Dans $\mathbb{R}^2$ muni d'une base (e_1, e_2), soient $F = \mathbb{R}e_1$, $G = \mathbb{R}e_2$ et $H = \mathbb{R}(e_1 + e_2)$: on a bien $F \cap G \cap H = \{0\}$ mais la somme $F + G + H$ n'est PAS directe (le vecteur $e_1 + e_2$, par exemple, peut se décomposer de plusieurs façons différentes).

Prop 6: « Associativité » de la somme directe

Pour que la somme $\sum_{i=1}^{n} E_i$ soit directe, il faut et il suffit que :

il existe/pour tout $j \in [\![1\,;n]\!]$, $\sum_{\substack{1\leqslant i\leqslant n\\ i\neq j}} E_i$ est directe et $\sum_{\substack{1\leqslant i\leqslant n\\ i\neq j}} E_i$ et E_j sont en somme directe.

Déf 7:

n sous-espaces vectoriels $(E_i)_{1\leqslant i\leqslant n}$ de E sont dits <u>supplémentaires</u> si $E = \bigoplus_{i=1}^{n} E_i$.

Cela équivaut à :

$$\forall\, x \in E,\ \exists\,!(x_i)_{1\leqslant i\leqslant n} \in \prod_{i=1}^{n} E_i \text{ tel que } x = \sum_{i=1}^{n} x_i\,.$$

Exemples

1. Dans le $\mathbb{R}$-espace vectoriel $\mathcal{A}(\mathbb{R},\mathbb{R})$ des applications de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$, soit $\mathcal{P}$ l'ensemble des applications paires, et $\mathcal{I}$ l'ensemble des applications impaires.
   Alors $\mathcal{P}$ et $\mathcal{I}$ sont des sous-espaces vectoriels supplémentaires de $\mathcal{A}(\mathbb{R},\mathbb{R})$.
2. Soit $A \in \mathbb{K}[X]$, tel que deg(A)= $n+1$, $n \in \mathbb{N}$.
   Alors $\mathbb{K}_n[X]$ et $\mathbb{K}[X]A$ (ensemble des multiples de A) sont des sous-espaces vectoriels supplémentaires de $\mathbb{K}[X]$.

V. Familles génératrices, libres, liées

Déf 8:

Une famille $(x_i)_{i\in I}$ d'un $\mathbb{K}$-espace vectoriel E est dite <u>génératrice</u> de E si Vect$\big((x_i)_{i\in I}\big) = E$.
Cela équivaut à dire que tout vecteur de E est combinaison linéaire (finie) des x_i, ou encore que E est somme des sous-espaces vectoriels $\mathbb{K}.x_i$.

Prop 7:

Si $(x_i)_{i\in I}$ est génératrice de E, toute famille contenant les (x_i) (<u>sur-famille</u>) est encore une famille génératrice de E.

Prop 8:

Soit $(x_i)_{i\in I}$ une famille génératrice de E et $i_0 \in I$.
Alors : $(x_i)_{i\in I\setminus\{i_0\}}$ est encore une famille génératrice de E si et seulement si x_{i_0} est combinaison linéaire des $(x_i)_{i\neq i_0}$.

Déf 9:

1. Une famille finie $(x_i)_{1\leqslant i\leqslant n}$ d'un $\mathbb{K}$-espace vectoriel E est dite <u>libre</u> si, pour toute famille $(\lambda_i)_{1\leqslant i\leqslant n}$ d'éléments de $\mathbb{K}$:
$$\sum_{i=1}^{n} \lambda_i x_i = 0_E \Longrightarrow \forall\, i \in [\![1\,;n]\!]\,,\ \lambda_i = 0_{\mathbb{K}}.$$
(on dit aussi que les (x_i) sont <u>linéairement indépendants</u>).
2. Une famille quelconque $(x_i)_{i\in I}$ d'un $\mathbb{K}$-espace vectoriel E est dite <u>libre</u> si *toutes* ses sous-familles finies sont libres.
Cela équivaut à dire que, pour toute famille $(\lambda_i)_{i\in I}$ d'éléments de $\mathbb{K}$ *à support fini*, la relation $\sum\limits_{i\in I} \lambda_i x_i = 0_E$ implique $\lambda_i = 0_{\mathbb{K}}$ pour tout i.
3. Une famille $(x_i)_{i\in I}$ d'un $\mathbb{K}$-espace vectoriel E est dite <u>liée</u> si elle n'est pas libre, c'est-à-dire s'il existe une famille $(\lambda_i)_{i\in I}$ d'éléments de $\mathbb{K}$, à support fini, *non tous nuls*, telle que $\sum\limits_{i\in I} \lambda_i x_i = 0_E$.
(on dit aussi que les (x_i) sont <u>linéairement dépendants</u>).

Exemples

1. Dans $E = \mathcal{A}(\mathbb{R}_+^*, \mathbb{R})$, soit, pour tout $\lambda \in \mathbb{R}$, $e_\lambda : t \mapsto t^\lambda$.
Alors la famille $(e_\lambda)_{\lambda\in\mathbb{R}}$ est libre.
2. Dans $E = \mathcal{A}(\mathbb{R}, \mathbb{R})$, soit, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $e_n : t \mapsto \cos(nt)$.
Alors la famille $(e_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est libre.
3. Dans $\mathbb{K}[X]$, toute famille de polynômes non nuls de degrés distincts est libre.

Résultat important, qui peut être utilisé directement.

Propriétés:

1. La famille $\varnothing$ est libre.
2. Une famille réduite à un élément, $\{x\}$, est libre si et seulement si $x \neq 0_E$.
3. Toute famille contenant 0_E est liée.
4. Les éléments d'une famille libre sont nécessairement deux à deux distincts.
5. Toute sous-famille d'une famille libre est libre.
Toute sur-famille d'une famille liée est liée.
6. Une famille $(x_i)_{i\in I}$ est liée si et seulement si *il existe* $j \in I$ tel que x_j soit combinaison linéaire des $(x_i)_{i\in I, i\neq j}$.
Une famille $(x_i)_{i\in I}$ est libre si aucun des x_i n'est combinaison linéaire des autres.
7. Soit $(x_i)_{1\leqslant i\leqslant n}$ une famille de vecteurs *non nuls* de E. Alors cette famille est libre si et seulement si la somme $\sum\limits_{i=1}^{n} \mathbb{K}x_i$ est directe.

Prop 9:

Soit $(x_i)_{i\in I}$ une famille *libre* d'un $\mathbb{K}$-espace vectoriel E, et $y \in E$ tel que $\{y\} \cup \{x_i \mid i \in I\}$ soit liée.
Alors y est combinaison linéaire des x_i, de manière unique.

<u>Corollaire 9.1:</u>

Une famille de deux éléments $\{x_1, x_2\}$ dans un $\mathbb{K}$-espace vectoriel E est liée si et seulement si :
$$x_1 = 0_E \text{ ou } \exists\, \lambda \in \mathbb{K} \text{ tel que } x_2 = \lambda x_1\,.$$

VI. Bases

Déf 10:

Une famille d'un $\mathbb{K}$-espace vectoriel E est appelée base de E si elle est à la fois libre et génératrice.

Théorème 5:

Pour une famille $\mathscr{B} = (e_i)_{i\in I}$ d'un$\mathbb{K}$-espace vectoriel E , les propriétés suivantes sont équivalentes :

(a) $\mathscr{B}$ est une base de E.

(b) Tout vecteur de E s'écrit de manière unique comme combinaison linéaire des éléments de $\mathscr{B}$.

Rem: Si $(e_i)_{1\leqslant i\leqslant n}$ est une famille de vecteurs *non nuls* de E, cette famille est une base de E si et seulement si $E = \bigoplus_{i=1}^{n} \mathbb{K}e_i$.

Déf 11:

Soit $\mathscr{B} = (e_i)_{i\in I}$ une base de E. Alors, pour tout $x \in E$, il existe une unique famille $(x_i)_{i\in I}$ d'éléments de $\mathbb{K}$, à support fini, telle que $x = \sum_{i\in I} x_i e_i$.

Les x_i sont appelés les coordonnées de x dans la base $\mathscr{B}$.

Les vecteurs $x_i e_i$ sont appelées les composantes de x dans cette base.

Exemples

1. Une base de $\{0\}$ est $\varnothing$ (en effet, la famille $\{\varnothing\}$ est libre et $\text{Vect}\left(\{\varnothing\}\right) = \{0\}$) .
2. Base canonique de $\mathbb{K}^n$: il s'agit des vecteurs $e_1 = (1,0,\ldots,0,0)$, $e_2 = (0,1,0,\ldots,0,0)$, ... , $e_{n-1} = (0,0,\ldots,0,1,0)$, $e_n = (0,0,\ldots,0,1)$.
3. Base canonique de $\mathbb{K}[X]$: elle est formée des vecteurs X^n pour $n \in \mathbb{N}$.
4. Base canonique de $\mathbb{K}_n[X]$: elle est formée des vecteurs $1, X, X^2, \ldots, X^{n-1}, X^n$.
5. Il y a d'autres bases très utiles dans $\mathbb{K}_n[X]$:
   - Pour tout $a \in \mathbb{K}$, la famille des polynômes $(X-a)^k$ pour $k \in [\![0\,;n]\!]$. Cette famille peut être par exemple utilisée pour la démonstration de la formule de Taylor.
   - La famille des polynômes de Hilbert (ou de Newton) : ce sont les polynômes H_k pour $k \in [\![0\,;n]\!]$ définis par : $H_0 = 1$ et pour $k \geqslant 1$, $H_k = \dfrac{X(X-1)\ldots(X-k+1)}{k!}$.

   (Le fait qu'il s'agit bien de bases de $\mathbb{K}_n[X]$ sera démontré un peu plus tard).

Théorème 6: bases et sous-espaces vectoriels supplémentaires

Soit E un $\mathbb{K}$-espace vectoriel.

1. Soit $(E_i)_{1\leqslant i\leqslant n}$ une famille de sous-espaces vectoriels de E telle que $E = \bigoplus_{i=1}^{n} E_i$.
   Si, pour tout $i \in [\![1\,;n]\!]$, $\mathscr{B}_i$ est une base de E_i, alors les $\mathscr{B}_i$ sont deux à deux disjoints et $\mathscr{B} = \bigcup_{i=1}^{n} \mathscr{B}_i$ est une base de E.
2. Soit $\mathscr{B}$ une base de E, et $(\mathscr{B}_i)_{1\leqslant i\leqslant n}$ une partition de $\mathscr{B}$.
   Si, pour tout $i \in [\![1\,;n]\!]$, $E_i = \text{Vect}(\mathscr{B}_i)$, alors $E = \bigoplus_{i=1}^{n} E_i$.

Déf 12:

On dit que $(\mathscr{B}_i)_{i\in I}$ est une famille de bases adaptée à la décomposition de E en somme directe $E = \bigoplus_{i=1}^{n} E_i$.

VII. Espaces vectoriels de dimension finie

Déf 13:

On dit qu'un $\mathbb{K}$-espace vectoriel est <u>de dimension finie</u> s'il possède une famille génératrice finie.

Exemples

1. $\mathbb{K}^n$, $\mathbb{K}_n[X]$ sont de dimensions finies
2. $\mathbb{K}[X]$ n'est pas de dimension finie.

Prop 10:

Si E est un $\mathbb{K}$-espace vectoriel de dimension finie, de toute famille génératrice de E, on peut extraire une famille génératrice finie.

Théorème 7:

Si E est engendré par une famille de cardinal n, toute famille possédant au moins $n+1$ vecteurs est liée.
(*ou* : toute famille libre est de cardinal inférieur ou égal à n).

Théorème 8: de la base incomplète

Soit E un $\mathbb{K}$-espace vectoriel de dimension finie, $\mathcal{L}$ un système libre de E et $\mathcal{G}$ un système générateur de E.
Alors $\mathcal{L}$ est de cardinal fini, et il existe une base $\mathscr{B}$ de E telle que : $\mathcal{L} \subset \mathscr{B} \subset \mathcal{L} \cup \mathcal{G}$.

Corollaire 8.1:

Soit E un $\mathbb{K}$-espace vectoriel de dimension finie, $\mathcal{L}$ un système libre de E.
Alors il existe une base $\mathscr{B}$ de E telle que : $\mathcal{L} \subset \mathscr{B}$.

Corollaire 8.2:

Soit E un $\mathbb{K}$-espace vectoriel de dimension finie. De toute système générateur de E, on peut extraire une base.

Corollaire 8.3:

Tout $\mathbb{K}$-espace vectoriel de dimension finie possède une base.
(*Rem :* si $E = \{0_E\}$, une base de E est $\{\varnothing\}$).

Théorème 9: de la dimension

Soit E un $\mathbb{K}$-espace vectoriel de dimension finie. Alors toutes les bases de E ont même cardinal.

Déf 14:

Le nombre d'éléments commun à toutes les bases de E s'appelle la <u>dimension</u> de E, notée $\dim_{\mathbb{K}}(E)$ ou $\dim(E)$.

Exemples

1. $\dim(\{0\}) = 0$
2. $\dim_{\mathbb{C}}(\mathbb{C}) = 1$
3. $\dim_{\mathbb{R}}(\mathbb{C}) = 2$
4. $\dim_{\mathbb{K}}(\mathbb{K}^n) = n$

5. $\dim_{\mathbb{K}}(\mathbb{K}_n[X]) = n+1$

Théorème 10:

Soit E un $\mathbb{K}$-espace vectoriel de dimension n.

1. Toute famille libre de E a moins de n éléments ; et si elle en a exactement n, c'est une base de E.
2. Toute famille génératrice de E a plus de n éléments ; et si elle en a exactement n, c'est une base de E.

Exemples importants

1. Toute famille de polynômes de degrés échelonnés de 0 à n est une base de $\mathbb{K}_n[X]$.
2. Plus généralement, si $(P_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est une famille de polynômes tels que $\deg P_n = n$ pour tout n, c'est une base de $\mathbb{K}[X]$.
3. Toute famille de polynômes de $\mathbb{K}_n[X]$ de valuations échelonnées de 0 à n est une base de $\mathbb{K}_n[X]$.

Théorème 11: dimension d'un espace vectoriel produit :

Soient $E_1, E_2, \ldots, E_n$ n $\mathbb{K}$-espaces vectoriels de dimensions finies.
Alors l'espace vectoriel produit $E = E_1 \times E_2 \times \ldots \times E_n$ est de dimension finie et $\dim(E) = \sum_{i=1}^{n} \dim(E_i)$.

VIII. Sous-espaces vectoriels d'un espace vectoriel de dimension finie

Théorème 12:

Soit E un $\mathbb{K}$-espace vectoriel de dimension finie, et F un sous-espace vectoriel de E.

1. F est de dimension finie, et $\dim(F) \leqslant \dim(E)$.
2. On a $\dim(E) = \dim(F)$ si et seulement si $E = F$.

Théorème 13:

Soit E un $\mathbb{K}$-espace vectoriel de dimension finie.

1. Tout sous-espace vectoriel de E possède (au moins) un supplémentaire.
2. Si $E = E_1 \oplus E_2$, $\dim(E)=\dim(E_1)+\dim(E_2)$.

Rappelons également un résultat déjà vu mais important :

$E = E_1 \oplus E_2$ si et seulement si la réunion d'une base de E_1 et d'une base de E_2 est une base de E.

Théorème 14: formule de Grassmann

Soit E un $\mathbb{K}$-espace vectoriel, et E_1, E_2 deux sous-espaces vectoriels de dimensions finies de E.
Alors $E_1 + E_2$ est de dimension finie et :

$$\dim(E_1 + E_2) = \dim(E_1) + \dim(E_2) - \dim(E_1 \cap E_2) .$$

Corollaire 14.1:

Soit E un $\mathbb{K}$-espace vectoriel de dimension finie, et E_1, E_2 deux sous-espaces vectoriels de E.
Pour que E_1 et E_2 soient supplémentaires, il faut et il suffit que :

$$E_1 + E_2 = E \quad \text{et} \quad \dim(E_1) + \dim(E_2) = \dim(E)$$

ou :

$$E_1 \cap E_2 = \{0_E\} \quad \text{et} \quad \dim(E_1) + \dim(E_2) = \dim(E).$$

Corollaire 14.2:

Si $E_1, \ldots, E_n$ sont des sous-espaces vectoriels de dimensions finies d'un $\mathbb{K}$-espace vectoriel E, alors $\sum\limits_{i=1}^{n} E_i$ est de dimension finie et :

$$\dim\left(\sum_{i=1}^{n} E_i\right) \leqslant \sum_{i=1}^{n} \dim E_i.$$

Une application importante

Soit E un $\mathbb{K}$-espace vectoriel de dimension finie $n \geqslant 2$, et H_1, H_2 deux hyperplans distincts de E (on rappelle qu'un hyperplan est un sous-espace vectoriel de dimension $n-1$).

Alors $\dim(H_1 \cap H_2) = n - 2$.

Généralisation

Théorème 15:

Soit E un $\mathbb{K}$-espace vectoriel de dimension finie, et $(E_i)_{1\leqslant i\leqslant n}$ une famille finie de n sous-espaces vectoriels de E telle que *la somme* $\sum\limits_{i=1}^{n} E_i$ *est directe*. Alors :

$$\dim\left(\bigoplus_{i=1}^{n} E_i\right) = \sum_{i=1}^{n} \dim(E_i).$$

Prop 11:

Soit E un $\mathbb{K}$-espace vectoriel de dimension finie, et $(E_i)_{1\leqslant i\leqslant n}$ une famille finie de sous-espaces vectoriels de E telle que *la somme* $\sum\limits_{i=1}^{n} E_i$ *est directe*. Alors *dans ce cas* :

$$E = \bigoplus_{i=1}^{n} E_i \iff \dim E = \sum_{i=1}^{n} \dim(E_i).$$

Prop 12:

Soit E un $\mathbb{K}$-espace vectoriel de dimension finie, et $(E_i)_{1\leqslant i\leqslant n}$ une famille finie de sous-espaces vectoriels de E *telle que* $E = \sum\limits_{i=1}^{n} E_i$. Alors *dans ce cas* :

$$E = \bigoplus_{i=1}^{n} E_i \iff \dim E = \sum_{i=1}^{n} \dim(E_i).$$

Rang d'une famille de vecteurs

Déf 15:

Soit E un $\mathbb{K}$-espace vectoriel, et $(x_i)_{i\in I}$ une famille d'éléments de E.
Si $\dim\big(\mathrm{Vect}((x_i)_{i\in I})\big)$ est finie, elle s'appelle le rang de la famille $(x_i)_{i\in I}$, noté $\mathrm{rg}\big((x_i)_{i\in I}\big)$.

Propriétés:

1. Si $(x_i)_{i\in I}$ est une famille d'éléments d'un $\mathbb{K}$-espace vectoriel E de dimension finie, alors :
$$\mathrm{rg}\big((x_i)_{i\in I}\big) \leqslant \dim(E).$$
2. Si $(x_1, x_2, \ldots, x_p)$ est une famille finie, alors : $\mathrm{rg}(x_1, x_2, \ldots, x_p) \leqslant p$.