APPLICATIONS LINÉAIRES

Dans tout le chapitre, $\mathbb{K}$ désigne $\mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$.

I. Définitions

Déf 1:

Soient E et F deux $\mathbb{K}$-espaces vectoriels. Une application $u : E \to F$ est dite linéaire si :

$$\forall (\lambda,\mu) \in \mathbb{K}^2 \, , \, \forall (x,y) \in E^2 \, , \, u(\lambda x + \mu y) = \lambda u(x) + \mu u(y)$$

(on dit aussi que u est un morphisme de l'espace vectoriel E dans l'espace vectoriel F).

On peut remplacer cette définition par :

$$\forall \lambda \in \mathbb{K} \, , \, \forall (x,y) \in E^2 \, , \, u(\lambda x + y) = \lambda u(x) + u(y)$$

ou par :

$$\forall \lambda \in \mathbb{K} \, , \, \forall (x,y) \in E^2 \, , \, u(x+y) = u(x) + u(y) \text{ et } u(\lambda x) = \lambda u(x)$$

Un isomorphisme de E dans F est une application linéaire bijective de E dans F.
Un endomorphisme de E est une application linéaire de E dans lui-même.
Un automorphisme de E est un endomorphisme bijectif.

On note :

$\mathscr{L}(E,F)$ l'ensemble des applications linéaires de E dans F.
$\mathscr{L}(E)$ l'ensemble des endomorphismes de E.
$\mathrm{GL}(E)$ l'ensemble des automorphismes de E.

Rem: L'apparente simplicité de la définition masque une subtilité. En effet, pour des raisons de commodité, les lois dans E et dans F sont notées de la même façon.
Mais, par exemple, dans l'expression $u(x+y)$ le + est l'addition dans E alors que dans l'expression $u(x)+u(y)$, le + représente l'addition de F.

Exemples

1. L'application nulle $\begin{array}{ccc} E & \longrightarrow & F \\ x & \longmapsto & 0_F \end{array}$.
2. L'*homothétie de rapport* $\lambda \in \mathbb{K}$: $h_\lambda : \begin{array}{ccc} E & \longrightarrow & E \\ x & \longmapsto & \lambda.x \end{array}$.
3. L'application $P \mapsto P'$ de $\mathbb{K}[X]$ dans $\mathbb{K}[X]$.
4. L'application *évaluation en un point* : $f \mapsto f(a)$ de $\mathcal{A}(D,E)$ dans E, avec $a \in D$, D ensemble quelconque, E espace vectoriel.
5. L'application $f \mapsto \displaystyle\int_a^b f(t)\,\mathrm{d}t$ de $\mathscr{C}([a\,;b],\mathbb{R})$ dans $\mathbb{R}$.
6. L'application $p_i : \displaystyle\prod_{k=1}^{n} E_k \longrightarrow E_i$ (où les E_k sont des $\mathbb{K}$-espaces vectoriels), qui à $(x_1,\dots,x_n)$ associe x_i.

Propriétés:

1. Si $u \in \mathscr{L}(E,F)$, $u(0_E) = 0_F$.
2. Si $u \in \mathscr{L}(E,F)$, pour tout $x \in E$, $u(-x) = -u(x)$.
3. L'application identique de E, notée Id_E, est un automorphisme de E.

Déf 2:

Si $u \in \mathscr{L}(E)$, un sous-espace vectoriel F de E est dit stable par u si $u(F) \subset F$ (c'est-à-dire : $\forall x \in F$, $u(x) \in F$).

Dans ce cas, la restriction de u à F sera un endomorphisme de F, noté u_F et appelé endomorphisme induit par u sur F.

Rem : Ne pas confondre les notions d'endomorphisme induit et de restriction.

– La notion d'endomorphisme induit n'a de sens que si F est : 1°) un sous-espace vectoriel 2°) stable par u (pour pouvoir parler d'*endomorphisme* de F).

– La notion de restriction est beaucoup plus générale :
Si f est une application d'un ensemble A vers un ensemble B, et si A' est une partie non vide de A, on définit la restriction de f à A' comme étant l'application $f|_{A'} : \begin{array}{ccc} A' & \longrightarrow & B \\ x & \longmapsto & f(x) \end{array}$.

II. Image. Noyau

Théorème 1:

Soit $u \in \mathscr{L}(E,F)$. Alors :

1. Si E' est un sous-espace vectoriel de E, son image par u :
$$u(E') = \{u(x) \mid x \in E'\}$$
est un sous-espace vectoriel de F.
2. Si F' est un sous-espace vectoriel de F, son image réciproque par u :
$$u^{-1}(F') = \{x \in E \mid u(x) \in F'\}$$
est un sous-espace vectoriel de E.

Déf 3:

1. Soit $u \in \mathscr{L}(E,F)$. L'ensemble image de E par u est un sous-espace vectoriel de F, appelé image de u, et noté $\operatorname{Im} u$. Ainsi :
$$\operatorname{Im} u = u(E) = \{u(x) \mid x \in E\}.$$
2. L'image réciproque de 0_F par u est un sous-espace vectoriel de E, appelé noyau de u, et noté $\operatorname{Ker} u$. Ainsi :
$$\operatorname{Ker} u = u^{-1}(\{0_F\}) = \{x \in E \mid u(x) = 0_F\}.$$

Théorème 2:

Soit $u \in \mathscr{L}(E,F)$.

1. u surjective $\iff \operatorname{Im} u = F$.
2. u injective $\iff \operatorname{Ker} u = \{0_E\}$.

Exemple (lien avec les sommes de sous-espaces vectoriels)

Soient $E_1, \dots, E_n$ des sous-espaces vectoriels de E. On peut alors considérer l'application :
$$u : \left\{ \begin{array}{ccc} E_1 \times \dots \times E_n & \longrightarrow & E \\ (x_1, \dots, x_n) & \longmapsto & x_1 + \dots + x_n \end{array} \right.$$
Alors :

– u est linéaire ; en effet, on peut soit faire une démonstration directe en écrivant la définition, soit, plus astucieusement, remarquer que $u = \sum\limits_{i=1}^{n} p_i$ où $p_i \colon (x_1, \dots, x_n) \mapsto x_i$; puisque les p_i sont linéaires, il en est de même de leur somme (cf. théorème 4)

– $\operatorname{Im} u = \sum\limits_{i=1}^{n} E_i$. Donc u surjective $\iff E = \sum\limits_{i=1}^{n} E_i$.

– u est injective si et seulement si la somme $\sum\limits_{i=1}^{n} E_i$ est directe.
(En effet, $\operatorname{Ker} u = \{0_{E_1 \times \dots \times E_n}\}$ équivaut à
$$\forall (x_1, \dots, x_n) \in E_1 \times \dots \times E_n,\ x_1 + \dots + x_n = 0 \Longrightarrow x_1 = \dots = x_n = 0,$$
ce qui est bien la caractérisation d'une somme directe).

– En conclusion : u bijective $\iff E = \bigoplus_{i=1}^{n} E_i$. Dans ce cas, et si E est de dimension finie, on retrouve à l'aide de la proposition 2 le résultat :

$$\dim \bigoplus_{i=1}^{n} E_i = \dim \prod_{i=1}^{n} E_i = \sum_{i=1}^{n} \dim E_i \,.$$

Théorème 3: d'isomorphisme (fondamental)

Soit $u \in \mathscr{L}(E,F)$.
La restriction de u à tout supplémentaire de $\operatorname{Ker} u$ est un isomorphisme de ce supplémentaire sur $\operatorname{Im} u$.

III. Opérations sur les applications linéaires

Théorème 4:

Soient E et F deux $\mathbb{K}$-espaces vectoriels. $\mathscr{L}(E,F)$ est un sous-espace vectoriel de $\mathcal{A}(E,F)$.

Théorème 5:

Soient E, F, G trois $\mathbb{K}$-espaces vectoriels.

1. Si $u \in \mathscr{L}(E,F)$ et $v \in \mathscr{L}(F,G)$, alors $v \circ u \in \mathscr{L}(E,G)$.
2. Si $u \in \mathscr{L}(E,F)$ et $v \in \mathscr{L}(F,G)$, alors, pour tout $\lambda \in \mathbb{K}$, $\lambda(v \circ u) = (\lambda v) \circ u = v \circ (\lambda u)$.
3. Si $u_1, u_2 \in \mathscr{L}(E,F)$ et $v \in \mathscr{L}(F,G)$, alors : $v \circ (u_1 + u_2) = v \circ u_1 + v \circ u_2$.
4. Si $u \in \mathscr{L}(E,F)$ et $v_1, v_2 \in \mathscr{L}(F,G)$ alors : $(v_1 + v_2) \circ u = v_1 \circ u + v_2 \circ u$.

Prop 1: image et noyau d'une composée

Soient E, F, G trois $\mathbb{K}$-espaces vectoriels et $u \in \mathscr{L}(E,F)$, $v \in \mathscr{L}(F,G)$. Alors :

1. $\operatorname{Im}(v \circ u) \subset \operatorname{Im} v$ et $\operatorname{Ker}(v \circ u) \supset \operatorname{Ker} u$.
2. $v \circ u = 0_{\mathscr{L}(E,G)} \iff \operatorname{Im} u \subset \operatorname{Ker} v$.

Théorème 6:

Soit E un $\mathbb{K}$-espace vectoriel. $(\mathscr{L}(E), +, ., \circ)$ est une $\mathbb{K}$-algèbre.
(cette algèbre n'est ni commutative, ni intègre dès que $\dim E \geqslant 2$).

Théorème 7:

Soient E et F deux $\mathbb{K}$-espaces vectoriels. Si u est un isomorphisme de E dans F, u^{-1} est un isomorphisme de F dans E.

Théorème 8:

Soit E un $\mathbb{K}$-espace vectoriel. L'ensemble des automorphismes de E, muni de la loi $\circ$, est un groupe pour la loi $\circ$, appelé groupe linéaire de E, et noté $\mathrm{GL}(E)$.

Remarques

1. On adopte souvent, dans $\mathscr{L}(E)$, la *notation multiplicative*, c'est-à-dire que l'on écrit uv au lieu de $u \circ v$.
2. Soit $u \in \mathscr{L}(E)$. On posera alors : $u^0 = \mathrm{Id}_E$ et, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u^{n+1} = u^n \circ u = u \circ u^n$ (itérés n-ièmes).

Ainsi, pour $n \in \mathbb{N}^*$, $u^n = u \circ u \circ \cdots \circ u \quad (n \text{ fois})$.

3. $(\mathscr{L}(E), +, ., \circ)$ étant une algèbre, les règles de calcul permettent de montrer que :

- $\forall n \in \mathbb{N}^*$, $u^n - \mathrm{Id}_E = (u - \mathrm{Id}_E)(u^{n-1} + \cdots + \mathrm{Id}_E)$.
- si u et v commutent : $u^n - v^n = (u-v)(u^{n-1} + u^{n-2}v + \cdots + uv^{n-2} + v^{n-1})$.
- si u et v commutent : $(u+v)^n = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} u^k v^{n-k}$ (formule du binôme).

4. Lorsque u est un isomorphisme, on peut également définir u^n pour tout $n \in \mathbb{Z}$, en posant :

$$\forall n \in \mathbb{N},\ u^{-n} = \left(u^{-1}\right)^n .$$

Rem: Le résultat utilisé dans la démonstration précédente, à savoir :

si u et v commutent, il en est de même de toutes leurs puissances

est important à connaître.

Lorsque u (ou v) est inversible, cela s'étend aussi aux puissances négatives, puisque, si u et v commutent et u inversible, alors u^{-1} et v commutent aussi car, en utilisant l'associativité de la loi $\circ$:

$$u^{-1}v = u^{-1}v(uu^{-1}) = u^{-1}(vu)u^{-1} = u^{-1}(uv)u^{-1} = (u^{-1}u)vu^{-1} = vu^{-1}.$$

IV. Projecteurs. Symétries

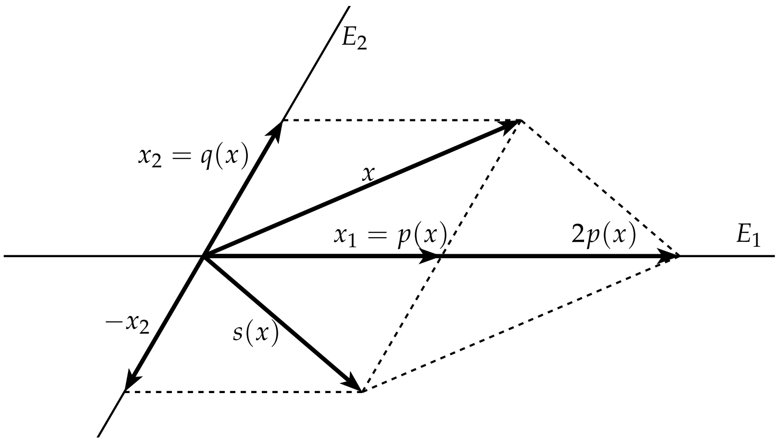
Déf 4:

Soit E un $\mathbb{K}$-espace vectoriel, et E_1 et E_2 deux sous-espaces vectoriels supplémentaires de E $(E = E_1 \oplus E_2)$.

Tout vecteur $x \in E$ s'écrit donc de manière unique sous la forme : $x = x_1 + x_2$ avec $(x_1, x_2) \in E_1 \times E_2$.

L'application $p : \begin{cases} E \to E \\ x \mapsto x_1 \end{cases}$ s'appelle la projection sur E_1 de direction E_2 (ou parallèlement à E_2).

L'application $s : \begin{cases} E \to E \\ x \mapsto x_1 - x_2 \end{cases}$ s'appelle la symétrie par rapport à E_1 de direction E_2 (ou parallèlement à E_2).



Propriétés: Si $u \in \mathscr{L}(E)$, on notera (provisoirement) :

$$\mathrm{Inv}(u) = \mathrm{Ker}(u - \mathrm{Id}_E) = \{x \in E \mid u(x) = x\} \text{ et } \mathrm{Opp}(u) = \mathrm{Ker}(u + \mathrm{Id}_E) = \{x \in E \mid u(x) = -x\}.$$

Ce sont des sous-espaces vectoriels de E (car noyaux d'un endomorphisme).

1. $s = 2p - \mathrm{Id}_E$.

2. s et p sont deux endomorphismes de E.

3. $p^2 = p \circ p = p$ (p est dit idempotent).

4. $s^2 = s \circ s = \mathrm{Id}_E$ (s est dit involutif).

5. $\mathrm{Inv}(p) = \mathrm{Im}\, p = E_1$ et $\mathrm{Ker}\, p = E_2$.

6. $\mathrm{Inv}(s) = E_1$ et $\mathrm{Opp}(s) = E_2$.

7. Si p est la projection sur E_1 de direction E_2, et q est la projection sur E_2 de direction E_1, $p + q = \mathrm{Id}_E$ et $p \circ q = q \circ p = 0_{\mathscr{L}(E)}$ (p et q sont dits associés).

Remarque : *les 5/2 auront évidemment reconnu dans les sous-espaces vectoriels $Inv(u)$ et $Opp(u)$ les sous-espaces propres de u associés respectivement aux (éventuelles) valeurs propres 1 et -1 ...*

Déf 5:

Soit E un $\mathbb{K}$-espace vectoriel et $u \in \mathscr{L}(E)$. u s'appelle un projecteur si $u^2 = u \circ u = u$.

Théorème 9:

Si p est un projecteur, alors :

$E = \mathrm{Im}\, p \oplus \mathrm{Ker}\, p$; $\mathrm{Im}\, p = \mathrm{Inv}(p)$; et p est la projection sur $\mathrm{Im}\, p$ de direction $\mathrm{Ker}\, p$.

Généralisation

Soit $(E_i)_{1 \leqslant i \leqslant p}$ une famille de sous-espaces vectoriels d'un $\mathbb{K}$-espace vectoriel E, telle que $E = \bigoplus_{i=1}^{p} E_i$.

Pour tout $x \in E$, il existe donc une unique famille $(x_i) \in \prod_{i=1}^{p} E_i$, telle que : $x = \sum_{i=1}^{p} x_i$;

on note alors, pour tout $i \in [\![1\,;p]\!]$, p_i l'application : $p_i \;:\; \begin{cases} E & \to & E \\ x & \mapsto & x_i \end{cases}$. On a alors :

- $\forall i \in [\![1\,;p]\!]$, $p_i \circ p_i = p_i$
- $\forall i \in [\![1\,;p]\!]$, p_i est la projection sur E_i de direction $\bigoplus_{\substack{j=1 \\ j \neq i}}^{p} E_j$.
- $\sum_{i=1}^{p} p_i = \mathrm{Id}_E$.
- $\forall (i,j) \in [\![1\,;p]\!]^2$, $i \neq j \Rightarrow p_i \circ p_j = 0_{\mathscr{L}(E)}$.

Déf 6:

On dit que $(p_i)_{1 \leqslant i \leqslant p}$ est la famille de projecteurs canoniquement associée à la décomposition de E en somme directe $E = \bigoplus_{i=1}^{p} E_i$.

Théorème 10:

Si s est un endomorphisme involutif de E ($s^2 = \mathrm{Id}_E$), alors :

$E = \mathrm{Inv}(s) \oplus \mathrm{Opp}(s)$; et s est la symétrie par rapport à $\mathrm{Inv}(s)$ de direction $\mathrm{Opp}(s)$.

Rem: La décomposition de $x \in E$ dans la somme directe $E = \mathrm{Inv}(s) \oplus \mathrm{Opp}(s)$ s'écrit :

$$x = \underbrace{\frac{x + s(x)}{2}}_{\in \mathrm{Inv}(s)} + \underbrace{\frac{x - s(x)}{2}}_{\in \mathrm{Opp}(s)}.$$

Exemples

1. Soit $E = \mathcal{A}(\mathbb{R},\mathbb{R})$ et s l'application de E dans E qui, à toute $f \in E$, associe l'application $\widetilde{f}\colon \begin{array}{rcl} \mathbb{R} & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ x & \longmapsto & f(-x). \end{array}$
   On vérifie facilement que s est linéaire et que $s^2 = \mathrm{Id}_E$. Ainsi, s est une symétrie et on a :
   - $f \in \mathrm{Inv}(s) \iff \forall\, x \in \mathbb{R},\ f(x) = f(-x) \iff f$ paire ;
   - $f \in \mathrm{Opp}(s) \iff \forall\, x \in \mathbb{R},\ -f(x) = f(-x) \iff f$ impaire.

   On retrouve ainsi le fait que l'ensemble des applications paires (resp. impaires) est un sous-espace vectoriel de E, et que ces deux sous-espaces vectoriels sont supplémentaires. De plus, la décomposition de $f \in E$ comme somme (de façon unique) d'une application paire et d'une application impaire est :
   $$f(x) = \underbrace{\frac{f(x)+f(-x)}{2}}_{\text{paire}} + \underbrace{\frac{f(x)-f(-x)}{2}}_{\text{impaire}}$$
2. Soit $E = \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ le $\mathbb{K}$-espace vectoriel des matrices carrées d'ordre n $(n \in \mathbb{N}^*)$ à coefficients dans $\mathbb{K}$, et soit $s\colon \begin{array}{rcl} E & \longrightarrow & E \\ A & \longmapsto & A^\top. \end{array}$
   On vérifie facilement que s est linéaire et que $s^2 = \mathrm{Id}_E$. Ainsi, s est une symétrie et on a :
   - $A \in \mathrm{Inv}(s) \iff A = A^\top \iff A$ symétrique ;
   - $A \in \mathrm{Opp}(s) \iff A = -A^\top \iff A$ antisymétrique.

   On obtient ainsi que l'ensemble $\mathcal{S}_n(\mathbb{K})$ des matrices symétriques d'ordre n et l'ensemble $\mathcal{A}_n(\mathbb{K})$ des matrices antisymétriques d'ordre n sont des sous-espaces vectoriels supplémentaires de E. De plus, la décomposition de $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ comme somme (de façon unique) d'une matrice symétrique et d'une matrice antisymétrique est :
   $$A = \underbrace{\frac{A+A^\top}{2}}_{\text{sym.}} + \underbrace{\frac{A-A^\top}{2}}_{\text{antisym.}}$$

V. Détermination d'une application linéaire

Théorème 11:

Soit $(E_i)_{1\leqslant i\leqslant n}$ une famille de sous-espaces vectoriels d'un $\mathbb{K}$-espace vectoriel E, telle que $E = \bigoplus_{i=1}^{n} E_i$, et F un $\mathbb{K}$-espace vectoriel.
Soit $(u_i)_{1\leqslant i\leqslant n}$ telle que $\forall\, i \in [\![1\,;n]\!]$, $u_i \in \mathscr{L}(E_i, F)$.
Alors il existe une et une seule application linéaire $u \in \mathscr{L}(E,F)$ telle que $\forall\, i \in [\![1\,;n]\!]$, $u_i = u|_{E_i}$.
(autrement dit, une application linéaire est entièrement déterminée par ses restrictions à des sous-espaces vectoriels supplémentaires).

Théorème 12:

Soient E et F deux $\mathbb{K}$-espaces vectoriels, $(e_i)_{i\in I}$ une base de E et $(b_i)_{i\in I}$ une famille de vecteurs de F. Alors :

1. Il existe une et une seule application linéaire $u \in \mathscr{L}(E,F)$ telle que $u(e_i) = b_i$ pour tout $i \in I$.
2. u injective $\iff$ $(b_i)_{i\in I}$ est une famille libre de F.
3. u surjective $\iff$ $(b_i)_{i\in I}$ est une famille génératrice de F.
4. u est un isomorphisme $\iff$ $(b_i)_{i\in I}$ est une base de F.

(autrement dit, une application linéaire est entièrement déterminée par les valeurs qu'elle prend sur une base).

Rem : On a démontré au passage un résultat **très utile :**

> Si $u \in \mathscr{L}(E,F)$ et si $(e_i)_{i\in I}$ est une base de E, $\mathrm{Im}\, u$ est le sous-espace vectoriel de F engendré par les $u(e_i)$.

VI. Cas de la dimension finie

Prop 2:

Si E et F sont deux $\mathbb{K}$-espaces vectoriels de dimensions finies :

$$\begin{cases} \text{il existe } u \text{ injective } \in \mathscr{L}(E,F) & \Longleftrightarrow \quad \dim E \leqslant \dim F \\ \text{il existe } u \text{ surjective } \in \mathscr{L}(E,F) & \Longleftrightarrow \quad \dim E \geqslant \dim F \\ \text{il existe un isomorphisme de } E \text{ sur } F & \Longleftrightarrow \quad \dim E = \dim F \end{cases}$$

Théorème 13: théorème du rang

Soient E et F deux $\mathbb{K}$-espaces vectoriels, avec E de dimension finie, et $u \in \mathscr{L}(E,F)$.
Alors $\operatorname{Im} u$ est de dimension finie et :

$$\dim(\operatorname{Im} u) + \dim(\operatorname{Ker} u) = \dim E.$$

Rem : Dans le cas $E = F$ et $u \in \mathscr{L}(E)$, $\operatorname{Ker} u$ et $\operatorname{Im} u$ sont deux sous-espaces vectoriels de E dont la somme des dimensions est égale à $\dim E$, *mais* $\operatorname{Ker} u$ *et* $\operatorname{Im} u$ *ne sont pas forcément supplémentaires !*

Exemple : Soit u l'endomorphisme de $\mathbb{R}^2$ dont la matrice dans la base canonique est $\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$.
On a ici $\operatorname{Ker} u = \operatorname{Im} u = \mathbb{R}e_1$ ...

Déf 7:

Soient E et F deux $\mathbb{K}$-espaces vectoriels, et $u \in \mathscr{L}(E,F)$.
Si $\operatorname{Im} u$ est de dimension finie, sa dimension est appelée le rang de u : $\operatorname{rg} u = \dim(\operatorname{Im} u)$.

Remarques

1. Si F est de dimension finie, alors $\operatorname{Im} u$ est de dimension finie.
2. Si E est de dimension finie, alors $\operatorname{Im} u$ est de dimension finie et $\operatorname{rg} u + \dim(\operatorname{Ker} u) = \dim E$ (cf. th. précédent).
3. Si $(e_i)_{i \in I}$ est une base de E, $\operatorname{rg} u$ est aussi le rang de la famille de vecteurs $\big(u(e_i)\big)_{i \in I}$.

Théorème 14:

Pour $u \in \mathscr{L}(E,F)$:

1. Si E est de dimension finie : u injective $\Longleftrightarrow$ $\operatorname{rg} u = \dim E$.
2. Si F est de dimension finie : u surjective $\Longleftrightarrow$ $\operatorname{rg} u = \dim F$.
3. Si E et F sont de dimensions finies et si $\dim E = \dim F$, on a :
$$u \text{ injective} \Longleftrightarrow u \text{ surjective} \Longleftrightarrow u \text{ bijective.}$$
4. Soient E et F de dimensions finies et $\dim E = \dim F$. Soit $u \in \mathscr{L}(E,F)$ et $v \in \mathscr{L}(F,E)$ tels que $v \circ u = \mathrm{Id}_E$. Alors u et v sont des isomorphismes, réciproques l'un de l'autre.
(On obtient le même résultat si l'on suppose $u \circ v = \mathrm{Id}_F$).

Rem : Les deux dernières propriétés *ne sont plus vraies* lorsque :

- $\dim E \neq \dim F$
par exemple, si $\dim E < \dim F$, il suffit de considérer une application linéaire u qui transforme une base de E en une famille libre mais non génératrice de F : u est injective, mais non surjective.
- Les espaces ne sont pas de dimensions finies (même si $E = F$)
par exemple, si $E = \mathscr{C}^\infty(\mathbb{R},\mathbb{R})$, si u est l'application qui à f associe sa dérivée f' et si v est l'application qui à f associe $\left(x \longmapsto \int_0^x f(t)\,\mathrm{d}t\right)$, on a $u \circ v = \mathrm{Id}_E$ mais $v \circ u \neq \mathrm{Id}_E$.

Prop 3:

Soit E un $\mathbb{K}$-espace vectoriel de dimension finie n, et $u \in \mathscr{L}(E)$.
Les propriétés suivantes sont équivalentes :

(a) u inversible.

(b) $\operatorname{rg} u = n$.

(c) u injectif.

(d) u surjectif.

(e) u inversible à droite.

(f) u inversible à gauche.

Rem : Ces résultats peuvent tomber en défaut si E n'est pas de dimension finie !
Considérer par ex. les applications $\begin{array}{ccc} \mathbb{K}[X] & \longrightarrow & \mathbb{K}[X] \\ P & \longmapsto & P' \end{array}$ et $\begin{array}{ccc} \mathbb{K}[X] & \longrightarrow & \mathbb{K}[X] \\ P & \longmapsto & XP \end{array}$.
La première est surjective mais non injective ; la seconde est injective mais non surjective.

Théorème 15: Invariance du rang par la composition avec un isomorphisme

Soient E, F, G trois $\mathbb{K}$-espaces vectoriels, E et F étant de dimensions finies.
Soient $u \in \mathscr{L}(E, F)$ et $v \in \mathscr{L}(F, G)$. Alors :

1. Si u est bijective, $\operatorname{rg}(v \circ u) = \operatorname{rg} v$.
2. Si v est bijective, $\operatorname{rg}(v \circ u) = \operatorname{rg} u$.

Ce théorème (celui qui figure dans le programme) est une simple conséquence du théorème suivant, beaucoup plus général :

Théorème 16:

Soient E, F, G trois $\mathbb{K}$-espaces vectoriels, E et F étant de dimensions finies.
Soient $u \in \mathscr{L}(E, F)$ et $v \in \mathscr{L}(F, G)$. Alors :

1. $\operatorname{rg}(v \circ u) \leqslant \operatorname{rg} v$ et, si u est surjective, il y a égalité.
2. $\operatorname{rg}(v \circ u) \leqslant \operatorname{rg} u$ et, si v est injective, il y a égalité.

Théorème 17:

Si E et F sont de dimensions finies, alors $\mathscr{L}(E, F)$ est de dimension finie et :
$$\dim(\mathscr{L}(E, F)) = \dim E \times \dim F.$$

VII. Les polynômes d'interpolation de Lagrange

Théorème 18:

Soit $n \in \mathbb{N}$ et soient $a_0, a_1, \dots, a_n$ $n+1$ scalaires *deux à deux distincts* et soit

$$u \;:\; \begin{cases} \mathbb{K}_n[X] & \to \mathbb{K}^{n+1} \\ P & \mapsto \big(P(a_0), P(a_1), \dots, P(a_n)\big) \end{cases}.$$

Alors :

1. u est un isomorphisme de $\mathbb{K}_n[X]$ sur $\mathbb{K}^{n+1}$.
2. Pour tout $(b_0, b_1, \dots, b_n) \in \mathbb{K}^{n+1}$, il existe un et un seul polynôme P de degré inférieur ou égal à n tel que $P(a_i) = b_i$ pour tout $i \in [\![0\,; n]\!]$.

   P s'appelle le polynôme interpolateur de Lagrange relatif aux points (a_i, b_i)

Détermination du polynôme interpolateur :

On conserve les notations du théorème précédent.
Soit $(e_0, \dots, e_n)$ la base canonique de $\mathbb{K}^{n+1}$. u étant un isomorphisme de $\mathbb{K}_n[X]$ sur $\mathbb{K}^{n+1}$, l'image réciproque par u de cette famille est une base de $\mathbb{K}_n[X]$.
Notons, pour tout $j \in [\![0\,;n]\!]$, $L_j = u^{-1}(e_j)$. Cela signifie que L_j est le polynôme de $\mathbb{K}_n[X]$ qui prend la valeur 1 en a_j et la valeur 0 en a_i si $i \neq j$, soit en abrégé : $L_j(a_i) = \delta_{i,j}$.

Donc L_j est divisible par $\prod\limits_{\substack{i=0\\i\neq j}}^{n}(X - a_i)$, et puisque ces deux polynômes sont de même degré n, il existe une constante λ telle que $L_j = \lambda \prod\limits_{\substack{i=0\\i\neq j}}^{n}(X - a_i)$. La condition $L_j(a_j) = 1$ donne alors $1 = \lambda \prod\limits_{\substack{i=0\\i\neq j}}^{n}(a_j - a_i)$.

Finalement, on a, pour tout $j \in [\![0\,;n]\!]$, $L_j = \prod\limits_{\substack{i=0\\i\neq j}}^{n}\left(\dfrac{X - a_i}{a_j - a_i}\right)$.

Les polynômes L_j pour $j \in [\![0\,;n]\!]$ forment une *base* de $\mathbb{K}_n[X]$; puisque, pour tout $P \in \mathbb{K}_n[X]$ on a, par définition, $u(P) = \big(P(a_0), P(a_1), \dots, P(a_n)\big) = \sum\limits_{j=0}^{n} P(a_j)e_j$, en appliquant u^{-1} on trouve : $P = \sum\limits_{j=0}^{n} P(a_j)L_j$, c'est-à-dire que dans cette base, les coordonnées de $P \in \mathbb{K}_n[X]$ sont les $P(a_j)$.
Ainsi, l'unique polynôme P de $\mathbb{K}_n[X]$ qui vérifie $P(a_j) = b_j$ pour tout $j \in [\![0\,;n]\!]$ est le polynôme $P = \sum\limits_{j=1}^{n} b_j L_j$.

Prop 4:

Avec les notations du théorème précédent, on a : $\sum\limits_{j=0}^{n} L_j = 1$.

Application : **Décomposition en éléments simples (cas simplifié)**

Théorème 19:

Soit $R = \dfrac{P}{Q}$ une fraction rationnelle de $\mathbb{K}(X)$.
On suppose que $Q = (X - a_0)...(X - a_n)$, où les a_i sont des scalaires distincts (*ainsi, Q est scindé à racines simples dans* $\mathbb{K}$).
Alors R s'écrit de manière unique sous la forme

$$R = E + \sum_{i=0}^{n} \frac{\lambda_i}{(X - a_i)}$$

où E appartient à $\mathbb{K}[X]$ et où les λ_i sont des éléments de $\mathbb{K}$.

Rem: Le polynôme E s'appelle la partie entière de la fraction rationnelle R, et les $\dfrac{\lambda_i}{X - a_i}$ sont des éléments simples de 1ère espèce

Détermination des coefficients λ_j

En reprenant les notations précédentes, on a, pour tout $j \in [\![0\,;n]\!]$:

$$(X - a_j)R = (X - a_j)E + \lambda_j + (X - a_j)\left(\sum_{i\neq j} \frac{\lambda_i}{X - a_i}\right).$$

Donc λ_j est égal à la valeur de la fraction rationnelle $(X - a_j)R$ évaluée en $X = a_j$ (les autres termes s'annulant en cette valeur). On note :

$$\lambda_j = (X - a_j)R\Big|_{X=a_j}.$$