EXERCICES : ESPACES VECTORIELS, AVEC CORRIGÉS

Sous-espaces vectoriels (ex. 1 à 7)

Exercice 1: (✍)

1. Les parties suivantes sont-elles des sous-espaces vectoriels de $\mathbb{R}^{\mathbb{N}}$?

a) $\left\{(u_n) \in \mathbb{R}^{\mathbb{N}} \mid (u_n) \text{ bornée}\right\}$ **b)** $\left\{(u_n) \in \mathbb{R}^{\mathbb{N}} \mid (u_n) \text{ monotone}\right\}$

c) $\left\{(u_n) \in \mathbb{R}^{\mathbb{N}} \mid (u_n) \text{ convergente}\right\}$ **d)** $\left\{(u_n) \in \mathbb{R}^{\mathbb{N}} \mid (u_n) \text{ arithmétique}\right\}$

2. Soit $F = \left\{(u_n) \in \mathbb{R}^{\mathbb{N}} \;\middle|\; \forall n \in \mathbb{N},\ u_{n+2} = nu_{n+1} + u_n\right\}$.
Montrer que F est un sous-espace vectoriel de $\mathbb{R}^{\mathbb{N}}$.

✎ *Solution:*

1. a) Oui. En effet, cet ensemble contient bien la suite nulle, et si u et v sont deux suites bornées, alors il existe des réels M_u et M_v tels que :

$$\forall n \in \mathbb{N},\ |u_n| \leqslant M_u \quad \text{et} \quad |v_n| \leqslant M_v$$

donc, si λ est un scalaire :

$$\forall n \in \mathbb{N},\ |\lambda u_n + v_n| \leqslant |\lambda|\,|u_n| + |v_n| \leqslant |\lambda|\,M_u + M_v\,,$$

ce qui prouve que la suite $\lambda u + v$ est bornée.

b) Non : contre exemple : les suites $n \mapsto n^2$ et $n \mapsto 2022n$ sont monotones mais leur différence ne l'est pas (étudier une fonction par exemple).

c) Oui : si u et v sont deux suites convergentes et λ un scalaire, la suite $\lambda u + v$ est convergente (cf. cours sur les suites).

d) Oui.

2.
- $F \subset \mathbb{R}^{\mathbb{N}}$.
- La suite nulle $0 = (0)_{n\in\mathbb{N}}$ appartient à F car $\forall n \in \mathbb{N},\ 0 = n.0 + 0$.
- Soient $\lambda, \mu \in \mathbb{R}$ et $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}, (v_n)_{n\in\mathbb{N}} \in F$. On a pour tout $n \in \mathbb{N}$,

$$\lambda u_{n+2} + \mu v_{n+2} = \lambda(nu_{n+1} + u_n) + \mu(nv_{n+1} + v_n) = n(\lambda u_{n+1} + \mu v_{n+1}) + \lambda u_n + \mu v_n$$

donc $\lambda(u_n) + \mu(v_n) \in F$.

Ainsi, F est un sous-espace vectoriel de $\mathbb{R}^{\mathbb{N}}$.

Exercice 2: (⋆)

Soit E un $\mathbb{K}$-espace vectoriel et F, G, H des sous-espaces vectoriels de E.

1. a) Comparer : $F + (G \cap H)$ et $(F + G) \cap (F + H)$.

b) Montrer que, si $F \subset G$, on a : $F + (G \cap H) = (F + G) \cap (F + H)$. Contre-exemple si $F \not\subset G$?

2. Comparer : $F \cap (G + H)$ et $(F \cap G) + (F \cap H)$.

3. Montrer que, si $F \subset G$, $F + H = G + H$ et $F \cap H = G \cap H$, alors $F = G$.

4. Montrer que, si $F \cap H \subset G$, $H \subset F + G$ et $G \subset H$, alors $G = H$.

5. Soient F, G, F', G' des sous-espaces vectoriels de E tels que $F \cap G = F' \cap G'$.
Montrer que :

$$(F + (G \cap F')) \cap (F + (G \cap G')) = F$$

✎ *Solution:*

1. a) Soit $x \in F + (G \cap H)$, on peut écrire $x = y + z$ avec $y \in F$ et $z \in G \cap H$. Comme $y \in F$ et $z \in G$ on a $x \in F + G$ et de même $x \in F + H$ donc $x \in (F + G) \cap (F + H)$.
On a donc l'inclusion $F + (G \cap H) \subset (F + G) \cap (F + H)$.
Il n'y a pas égalité en général : prendre l'exemple de trois droites 2 à 2 distinctes dans $\mathbb{R}^2$.

b) Il reste à montrer l'inclusion $F + (G \cap H) \supset (F + G) \cap (F + H)$.
Soit $x \in (F + G) \cap (F + H)$. On a $x \in F + G$ et puisque $F \subset G$, $F + G = G$ et $x \in G$. De plus, $x \in F + H$ donc $x = y + z$ avec $y \in F \subset G$ et $z \in H$.

$z = x - y \in G$ donc $z \in G \cap H$ puis $x \in F + (G \cap H)$.

2. Soit $z \in (F \cap G) + (F \cap H)$, on peut écrire $z = x + y$ avec $x \in F \cap G$ et $y \in F \cap H$.
On a donc $z = x + y \in F$ car $x, y \in F$ et $z = x + y \in G + H$ car $x \in G$ et $y \in H$.
Ainsi $z \in F \cap (G + H)$. On a donc : $(F \cap G) + (F \cap H) \subset F \cap (G + H)$.

Il n'y a pas égalité en général : prendre l'exemple de trois droites 2 à 2 distinctes dans $\mathbb{R}^2$.

5. – $\supset$: facile puisque si X est un sous-espace vectoriel quelconque de E on a toujours $F \subset F + X$.
– Soit $x \in (F + (G \cap F')) \cap (F + (G \cap G'))$.
On peut écrire $x = u + v$ avec $u \in F$ et $v \in G \cap F'$ et $x = u' + v'$ avec $u' \in F$ et $v' \in G \cap G'$.
$u - u' = v' - v \in F \cap G = F' \cap G'$.
Donc $v = -(v' - v) + v' \in G'$ puis $v \in G \cap F' \cap G' = F \cap G \subset F$ puis $x = u + v \in F$.
Ainsi $(F + (G \cap F')) \cap (F + (G \cap G')) \subset F$ puis l'égalité.

Exercice 3: ($\star$)

Soit H l'ensemble des polynômes de la forme $aX^3 + (b - 2a)X^2 - 2bX + 3a$ avec a et b réels.
Montrer que, muni des lois usuelles, il s'agit d'un plan vectoriel et en donner une base.

✎ *Solution:*

Il faut bien sûr démontrer que H est un **sous-espace vectoriel** de $\mathbb{R}[X]$ (ou de $\mathbb{R}_3[X]$).
Or H est l'ensemble des polynômes de la forme

$$a(X^3 - 2X^2 + 3) + b(X^2 - 2X) \quad , \quad (a, b) \in \mathbb{R}^2$$

il s'agit donc du sous-espace vectoriel engendré par les deux polynômes $X^3 - 2X^2 + 3$ et $X^2 - 2X$. Ces deux polynômes étant linéairement indépendants (car de degrés distincts), ils forment une base de H.

Exercice 4: ($\star$)

Soient $F = \left\{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \mid x + y - z = 0\right\}$ et $G = \{(a - b, a + b, a - 3b) \mid a, b \in \mathbb{R}\}$.

a) Montrer que F et G sont des sous-espaces vectoriels de $\mathbb{R}^3$.

b) Déterminer $F + G$ et $F \cap G$.

✎ *Solution:*

a) • Méthode barbare :
– $F \subset \mathbb{R}^3$.
– $0_{\mathbb{R}^3} = (0, 0, 0) \in F$ car $0 + 0 - 0 = 0$.
– Pour tous $\lambda, \mu \in \mathbb{R}$ et $u, v \in F$, on peut écrire $u = (x, y, z)$ et $v = (x', y', z')$ avec $x + y - z = 0$ et $x' + y' - z' = 0$. On a alors $\lambda u + \mu v = (\lambda x + \mu x', \lambda y + \mu y', \lambda z + \mu z')$ avec $(\lambda x + \mu x') + (\lambda y + \mu y') - (\lambda z + \mu z') = \lambda(x + y -$
donc $\lambda u + \mu v \in F$.

Ce qui précède montre que F est bien un sous-espace vectoriel de $\mathbb{R}^3$.

• **Mieux :** il est bien plus rapide de dire que F est le noyau de la forme linéaire $\varphi : \left\{\begin{array}{ccc} \mathbb{R}^3 & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ (x, y, z) & \longmapsto & x + y - z \end{array}\right.$!

• **Ou aussi :** On peut aussi dire que

$$F = \left\{(x, y, x + y) \;\middle|\; (x, y) \in \mathbb{R}^2\right\} = \left\{x(1, 0, 1) + y(0, 1, 1) \;\middle|\; (x, y) \in \mathbb{R}^2\right\}$$

donc, directement, il s'agit du sous-espace vectoriel de $\mathbb{R}^3$ engendré par les vecteurs $(1, 0, 1)$ et $(0, 1, 1)$.

• $G = \left\{a(1, 1, 1) + b(-1, 1, -3) \mid (a, b) \in \mathbb{R}^2\right\}$ donc, directement, G est le sous-espace vectoriel de $\mathbb{R}^3$ engendré par les vecteurs $(1, 4, 4)$ et $(-1, 1, -3)$.

b) • Il est facile de vérifier que les vecteurs $(1, 0, 1)$, $(0, 1, 1)$ et $(1, 1, 1)$ sont linéairement indépendants (car, par exemple, $\begin{vmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{vmatrix} = -1 \neq 0$).
On en déduit que F (engendré par les deux premiers de ces vecteurs) et la droite de base $(1, 1, 1)$ sont supplémentaires (théorème cours). Donc $\mathbb{R}^3 = F \oplus \text{Vect}\big((1, 1, 1)\big)$, et puisque $(1, 1, 1)$ appartient à G on en déduit $\mathbb{R}^3 \subset F + G$ donc $F + G = \mathbb{R}^3$.

• On peut en déduite $\dim(F \cap G) = 1$ à l'aide de la formule de Grassmann, mais pour déterminer explicitement $F \cap G$ il faut faire un petit calcul.

$u = (x,\ y,\ z) \in F \cap G$ si et seulement si il existe $a, b \in \mathbb{R}$ tels que

$$\begin{cases} x + y - z = 0 \\ x = a - b \\ y = a + b \\ z = a - 3b \end{cases} \text{soit} \begin{cases} a + 3b = 0 \\ x = a - b \\ y = a + b \\ z = a - 3b \end{cases} \text{soit} \begin{cases} x = -4b \\ y = -2b \\ z = -6b \\ a = -3b \end{cases}$$

Ainsi $F \cap G = \{(-4b,\ -2b,\ -6b) | b \in \mathbb{R}\} = \{(2c,\ c,\ 3c) | c \in \mathbb{R}\} = \mathrm{Vect}((2,1,3))$.

Exercice 5: (✍)

On considère les quatre vecteurs de $\mathbb{R}^3$:

$$u = (2,3,-1) \quad , \quad v = (1,-1,-2) \quad , \quad w = (3,7,0) \quad , \quad x = (5,0,-7)\,.$$

Montrer que $\mathrm{Vect}(u,v) = \mathrm{Vect}(w,x)$.

✎ *Solution:*

Les familles (u,v) et (w,x) étant libres, les deux sous-espaces vectoriels considérés sont de dimension 2. Donc pour montrer leur égalité, il suffit par exemple de montrer l'inclusion $\mathrm{Vect}(w,x) \subset \mathrm{Vect}(u,v)$.

Pour cela, il suffir de montrer que les vecteurs w et x appartiennent à $\mathrm{Vect}(u,v)$.

Et pour cela, on peut montrer que $\det(u,v,w) = \det(u,v,x) = 0$, ou bien directement « remarquer » que $w = 2u - v$ et $x = u + 3v$.

Exercice 6: (⋆)

On considère dans $\mathbb{R}^4$ le sous-espace L engendré par les vecteurs $(1,1,1,1)$, $(1,-1,1,-1)$, $(1,3,1,3)$ et le sous-espace M engendré par $(1,2,0,2)$, $(1,2,1,2)$, $(3,1,3,1)$.

Calculer les dimensions de L et de M et montrer que $L \subset M$.

✎ *Solution:*

Notons : $u = (1,1,1,1)$, $v = (1,-1,1,-1)$ et $w = (1,3,1,3)$, et $a = (1,2,0,2)$, $b = (1,2,1,2)$ et $c = (3,1,3,1)$.

En écrivant la matrice de ces vecteurs dans la base canonique de $\mathbb{R}^4$ il est facile de vérifier que $\mathrm{rg}(u,v,w) = 2$, donc $\dim L = 2$, et que $\mathrm{rg}(a,b,c) = 3$, donc $\dim M = 3$.

De plus, toujours en utilisant les matrices, on voit que $\mathrm{rg}(a,b,c,u) = \mathrm{rg}\begin{pmatrix} 1 & 1 & 3 & 1 \\ 2 & 2 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 3 & 1 \\ 2 & 2 & 1 & 1 \end{pmatrix} = 3$, donc la famille (a,b,c,u) est liée, et puisque (a,b,c) est libre, cela montre que u est combinaison linéaire de a,b,c donc appartient à M.

On montre de même que v appartient à M donc $\mathrm{Vect}(u,v) \subset M$ soit $L \subset M$.

Exercice 7: (⋆)

Soit E un espace vectoriel de dimension finie $n \geqslant 1$.

a) Soient F et G deux sous-espaces vectoriels de E tels que $\dim F + \dim G > n$. Montrer que $F \cap G$ n'est pas réduit au vecteur nul.

b) Soient F, G et H trois sous-espaces vectoriels de E tels que $\dim F + \dim G + \dim H > 2n$. Que peut-on dire de $F \cap G \cap H$?

✎ *Solution:*

a) Par l'absurde, si $F \cap G$ était égal à $\{0\}$, on aurait $\dim(F+G) = \dim F + \dim G$ d'après Grassmann, donc $\dim(F+G) > n$, ce qui est absurde puisque $F + G$ est inclus dans E.

b) On sait que : $\dim(F+G) = \dim F + \dim G - \dim(F \cap G)$ (Grassmann), donc l'hypothèse de l'énoncé peut se réécrire :

$$\dim(F+G) + \dim(F \cap G) + \dim H > 2n.$$

On en déduit :

$$\dim(F \cap G) + \dim H > 2n - \dim(F+G) \quad \text{d'où} \quad \dim(F \cap G) + \dim H > n \quad \text{puisque } \dim(F+G) \leqslant n\,,$$

et on applique le résultat de la 1ère question pour en déduire $F \cap G \cap H = \{0\}$.

Familles de vecteurs (ex. 8 à 20)

Exercice 8: ($\star$)

Soit E un $\mathbb{K}$-espace vectoriel de dimension finie n, et $(e_1, e_2, \dots, e_n)$ une base de E. On pose, pour tout $i \in [\![1\,;n]\!]$, $f_i = \sum_{j \neq i} e_j$.

Que peut-on dire de la famille $(f_i)_{1 \leqslant i \leqslant n}$?

Solution:

La famille (f_i) est formée de n éléments, et elle est libre ; en effet :
si $\sum_{i=1}^{n} \lambda_i f_i = 0$ alors $\sum_{i=1}^{n} \mu_i e_i = 0$, où on a posé $\mu_i = \sum_{j \neq i} \lambda_j$. On a donc $\mu_i = 0$ pour tout i. Or, si on note $L = \sum_{i=1}^{n} \lambda_i$, $\mu_i = L - \lambda_i$, d'où $0 = \sum_{i=1}^{n} \mu_i = (n-1)L$ d'où $L = 0$ puis $\lambda_i = 0$ pour tout i.

La famille $(f_i)_{1 \leqslant i \leqslant n}$ est donc une base de E.

Autre solution : on peut aussi écrire la matrice de la famille (f_j) dans la base (e_i) et montrer que cette matrice est inversible.

Exercice 9: ($\star$)

Soit E un $\mathbb{K}$-espace vectoriel et $(e_1, \dots, e_p)$ une famille libre de vecteurs de E.
Montrer que si $a \in E$ est tel que $a \notin \mathrm{Vect}(e_1, \dots, e_p)$ alors la famille $(e_1 + a, \dots, e_p + a)$ est libre.

Solution:

Si par l'absurde la famille était liée, l'un des $e_i + a$ serait combinaison linéaire des autres. Par exemple :

$$e_1 + a = \sum_{i=2}^{p} \lambda_i (e_i + a)$$

d'où

$$\left(1 - \sum_{i=2}^{p} \lambda_i\right) a = \sum_{i=2}^{p} \lambda_i e_i - e_1.$$

Or $1 - \sum_{i=2}^{p} \lambda_i$ ne peut pas être nul car cela donnerait une relation de dépendance linéaire entre les e_i. Donc en divisant par ce scalaire on obtient a combinaison linéaire des e_i, contradiction.

Autre solution : considérer le sous-espace vectoriel F de E engendré par les vecteurs $(e_1, \dots, e_p, a)$, qui est une base de F compte tenu de l'hypothèse ; il est alors facile de vérifier que la matrice de la famille de vecteurs $(e_1 + a, \dots, e_p + a)$ dans cette base est de rang p.

Exercice 10: (✍)

Soient $f_1, f_2, f_3, f_4 \colon [0\,;2\pi] \to \mathbb{R}$ les applications définies par :

$$\forall\, x \in \mathbb{R}, \quad f_1(x) = \cos x,\ f_2(x) = x \cos x,\ f_3(x) = \sin x \ \text{ et } \ f_4(x) = x \sin x.$$

Montrer que la famille (f_1, f_2, f_3, f_4) est libre.

Solution:

On se place bien sûr dans l'espace vectoriel $\mathcal{A}([0\,;2\pi], \mathbb{R})$.
Supposons qu'il existe $(a, b, c, d) \in \mathbb{R}^4$ tel que :

$$a\, f_1 + b f_2 + c f_3 + d f_4 = 0.$$

On a alors :

$$\forall\, x \in [0\,;2\pi],\ (a + bx) \cos x + (c + dx) \sin x = 0$$

Pour $x = 0$ et $x = \pi$ on obtient le système : $\begin{cases} a = 0 \\ a + b\pi = 0 \end{cases}$, d'où $a = b = 0$.

Pour $x = \frac{\pi}{2}$ et $x = \frac{3\pi}{2}$ on obtient le système : $\begin{cases} c + d\frac{\pi}{2} = 0 \\ c + 3d\frac{\pi}{2} = 0 \end{cases}$, d'où $c = d = 0$.

Finalement, la famille étudiée est libre.

Exercice 11: ($\star$)

Dans le $\mathbb{R}$-espace vectoriel E des applications de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$ on note f_n la fonction définie sur $\mathbb{R}$ pour $n \in \mathbb{N}$ par : $\forall x \in \mathbb{R},\ f_n(x) = \sin(x+n)$.

Déterminer la dimension de $\mathrm{Vect}(f_0, \ldots, f_n)$.

✎ *Solution:*

Puisque $\sin(x+n) = \sin x \cos n + \sin n \cos x$, il est facile de montrer que, pour $n \geqslant 1$, $\mathrm{Vect}(f_0, \ldots, f_n) = \mathrm{Vect}(\{\sin, \cos\})$ (une inclusion puis dimensions, ou double inclusion).

Exercice 12: ($\star\star$)

Dans le $\mathbb{R}$-espace vectoriel des applications de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$, étudier l'indépendance linéaire des familles de fonctions suivantes :

a) $(x \mapsto \sin nx)_{n \in \mathbb{N}^*}$ **b)** $(x \mapsto \mathrm{ch}^n\, x)_{n \in \mathbb{N}}$.

✎ *Solution:*

On rappelle que dire qu'une famille est libre équivaut à dire que toute sous-famille finie est libre.

a) Soit $f_n : x \mapsto \sin nx$ pour $n \in \mathbb{N}^*$. On démontre par récurrence sur N que la famille $(f_1, \ldots, f_N)$ est libre :

- C'est immédiat pour $N = 1$.
- Supposons à l'ordre $N-1$ la famille $(f_1, \ldots, f_{N-1})$ libre.
  Si l'on a $\sum\limits_{k=1}^{N} \lambda_k f_k = 0 \quad (1)$ alors en dérivant deux fois on obtient $\sum\limits_{k=1}^{N} k^2 \lambda_k f_k = 0 \quad (2)$. En effectuant $(1) \times N^2 - (2)$ on se ramène à l'ordre $N-1$ etc...

b) Soit $f_n : x \mapsto \mathrm{ch}^n\, x$. Supposons que l'on ait $\sum\limits_{k=0}^{n} \lambda_k f_k = 0$. Alors, pour tout $x \in \mathbb{R}$, $\sum\limits_{k=0}^{n} \lambda_k \,\mathrm{ch}^k\, x = 0$ donc, pour tout $y \in [1, +\infty[$, $\sum\limits_{k=0}^{n} \lambda_k y^k = 0$. Ainsi, le polynôme $\sum\limits_{k=0}^{n} \lambda_k X^k$ est un polynôme qui s'annule sur $[1, +\infty[$, donc qui possède une infinité de racines. C'est donc le polynôme nul, i.e les λ_k sont tous nuls.

Exercice 13: ($\star\star\star$)

Dans le $\mathbb{R}$-espace vectoriel des applications de $]1, +\infty[$ dans $\mathbb{R}$, étudier si la famille de fonctions $\left\{x \mapsto x^\alpha (\ln x)^\beta\right\}_{(\alpha,\beta) \in \mathbb{R}^2}$ est libre.

✎ *Solution:*

Soit $\varphi_{(\alpha,\beta)} : x \mapsto x^\alpha (\ln x)^\beta$. Supposons que l'on ait $\sum\limits_{i=1}^{n} \lambda_i \varphi_{(\alpha_i,\beta_i)} = 0$. On peut supposer que les (α_i, β_i) sont strictement ordonnés suivant l'ordre lexicographique dans $\mathbb{R}^2$ (défini par : $(x,y) \preccurlyeq (x',y') \iff (x < x')$ ou $(x = x'$ et $y \leqslant y')$).
En divisant l'égalité précédente par $\varphi_{(\alpha_n,\beta_n)}$, on obtient :

$$\forall x \in]1, +\infty[\ ,\ \lambda_n + \sum_{i=1}^{n-1} x^{\alpha_i - \alpha_n} (\ln x)^{\beta_i - \beta_n} = 0$$

d'où, en faisant $x \to +\infty$, $\lambda_n = 0$. Il ne reste plus alors qu'à faire une récurrence sur n.

Exercice 14: ($\star$)

Soient A et B deux polynômes de $\mathbb{C}[X]$, non constants et sans racine commune.

Montrer que les polynômes $P_k = A^k B^{n-k}$ ($k \in [\![0\,;n]\!]$) forment une famille libre.

✎ *Solution:*

Procédons par récurrence sur n.

- Pour $n = 0$ la famille est formée d'un seul polynôme non nul, donc est libre.
- Supposons le résultat acquis à l'ordre $n-1$ et montrons que la famille des polynômes $P_k = A^k B^{n-k}$ pour $k \in [\![0\,;n]\!]$ est libre.
  Si l'on a

$$\sum_{k=0}^{n} \lambda_k A^k B^{n-k} = \lambda_0 B^n + \lambda_1 A B^{n-1} + \cdots + \lambda_{n-1} A^{n-1} B + \lambda_n A^n = 0,$$

en évaluant alors cette expression en β racine de B (qui existe dans $\mathbb{C}$!) on obtient $\lambda_n A^n(\beta) = 0$ d'où $\lambda_n = 0$ puisque β n'est pas racine de A par hypothèse.

On a donc : $\sum\limits_{k=0}^{n-1} \lambda_k A^k B^{n-k} = 0$ et en divisant cette égalité par le polynôme B non nul on obtient :

$$\sum_{k=0}^{n-1} \lambda_k A^k B^{n-1-k} = 0\,.$$

D'après l'hypothèse de récurrence à l'ordre $n-1$ tous les λ_k pour $k \in [\![0\,;n-1]\!]$ sont également nuls, ce qui démontre le résultat à l'ordre n et achève la récurrence.

Exercice 15: (⋆⋆)

Soit, pour $0 \leqslant k \leqslant n$, $P_k = X^k(1-X)^{n-k}$.

a) Montrer que la famille $(P_k)_{0\leqslant k \leqslant n}$ est une base de $\mathbb{K}_n[X]$.

b) Donner dans cette base les coordonnées de $1, X, X^2, \dots, X^n$ (*on pourra calculer* $\sum\limits_{k=0}^{n} \binom{n}{k} P_k$, $\sum\limits_{k=0}^{n} k\binom{n}{k} P_k$ *etc...*).

✎ *Solution:*

a) Puisqu'il s'agit d'une famille de $n+1$ polynômes dans $\mathbb{R}_n[X]$ de dimension $n+1$, pour montrer que c'estune base il suffit de montrer que la famille est libre.

Supposons par l'absurde qu'il existe $(\lambda_0, \dots, \lambda_n) \in \mathbb{R}^{n+1}$, différent de $(0, 0, \dots, 0)$, tel que $\sum\limits_{k=0}^{n} \lambda_k P_k = 0$.

Les λ_k n'étant pas tous nuls, on peut considérer le plus grand indice k_0 tel que λ_{k_0} soit non nul.

Il reste donc : $\sum\limits_{k=0}^{k_0} \lambda_k P_k = 0$ avec $\lambda_{k_0} \neq 0$. Mézalor, en simplifiant cette expression par $(1-X)^{n-k_0}$ puis en évaluant pour $X = 1$ on obtient $\lambda_{k_0} = 0$, contradiction.

La famille est donc libre, cqfd.

b)
- La relation :

$$\sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} P_k = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} X^k (1-X)^{n-k} = [X + (1-X)]^n = 1$$

  prouve que les coordonnées de 1 dans la base (P_k) sont les $\binom{n}{k}$.
- On connaît la relation : $\forall k \in \mathbb{Z}$, $k\binom{n}{k} = n\binom{n-1}{k-1}$, avec les conventions habituelles sur les coefficients binomiaux ($\binom{n}{k} = 0$ si $k < 0$ ou $k > n$). Donc :

$$\begin{aligned}\sum_{k=0}^{n} k\binom{n}{k} P_k &= n\sum_{k=0}^{n} \binom{n-1}{k-1} X^k(1-X)^{n-k} = nX\sum_{k=1}^{n} \binom{n-1}{k-1} X^{k-1}(1-X)^{(n-1)-(k-1)} \\ &= nX\sum_{k=0}^{n-1} \binom{n-1}{k} X^k(1-X)^{n-1-k} = nX[X+(1-X)]^{n-1} = nX\end{aligned}$$

  (en supposant $n \geqslant 1$), donc les coordonnées de X dans la base (P_k) sont les $\frac{k}{n}\binom{n}{k} = \binom{n-1}{k-1}$.
- Pour obtenir les coordonnées de X^2 on peut calculer de même la somme $\sum\limits_{k=0}^{n} k(k-1)\binom{n}{k} P_k$ etc... (à finir).

Solution plus rapide :

Pour $i \in [\![0\,;n]\!]$ écrire $X^i = X^i\big(X + (1-X)\big)^{n-i}$ et développer...

Exercice 16: (⋆⋆)

Soit $(P_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite de polynômes de $\mathbb{K}[X]$ tels que : $\forall n \in \mathbb{N}$, $\deg(P_{n+1}) > \deg(P_n)$.

Montrer que $(P_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est une base de $\mathbb{K}[X]$ si et seulement si : $\forall n \in \mathbb{N}$, $\deg(P_n) = n$.

✎ *Solution:*

- Supposons déjà $\deg(P_n) = n$ pour tout $n \in \mathbb{N}$.
  - Cette famille étant formée de polynômes de degrés distincts est libre.
  - Pour tout $N \in \mathbb{N}$, la famille $(P_0, \dots, P_N)$ est une famille libre de $N+1$ vecteurs de $\mathbb{K}_N[X]$ espace vectoriel de dimension $N+1$, donc en est une base.

    Par suite tout polynôme $P \in \mathbb{K}_N[X]$ est combinaison linéaire de $(P_0, \dots, P_N)$ donc de la famille $(P_n)_{n\in\mathbb{N}}$.

Et puisque tout polynôme $P \in \mathbb{K}[X]$ appartient à un certain $\mathbb{K}_N[X]$, tout polynôme de $\mathbb{K}[X]$ est combianaison linéaire de la famille $(P_n)_{n\in\mathbb{N}}$; cette famille est donc génératrice de $\mathbb{K}[X]$, et finalement c'en est une base.

- Réciproquement supposons $\forall n \in \mathbb{N}$, $\deg(P_{n+1}) > \deg(P_n)$, et $(P_n)_{n\in\mathbb{N}}$ base de $\mathbb{K}[X]$.
  Si, par l'absurde, on n'avait pas $\deg(P_n) = n$ pour tout n, soit k le plus petit entier tel que $\deg(P_k) \neq k$. On a ainsi :

$$\deg(P_0) = 0,\ \deg(P_1) = 1, \dots, \deg(P_{k-1}) = k-1, \deg(P_k) \geqslant k+1, \deg(P_{k+1}) > \deg(P_k) \text{ etc...}$$

  La famille $(P_0, \dots, P_{k-1}, X^k, P_k, P_{k+1}, \dots)$ étant formée de polynômes de degrés distincts serait donc libre, ce qui est absurde car par hypothèse X^k est combinaison linéaire de la famille $(P_n)_{n\in\mathbb{N}}$ car c'est une base de $\mathbb{K}[X]$.
  On a donc prouvé le résultat demandé par l'absurde.

Exercice 17: (⋆⋆)

Soient $a_0, a_1, \dots, a_n$ $(n+1)$ éléments distincts de $\mathbb{K}$.

Montrer que la famille $\{(X-a_i)^n\}_{0\leqslant i\leqslant n}$ est une base de $\mathbb{K}_n[X]$ (*on pourra procéder par récurrence en utilisant la dérivation*).

✎ *Solution:*

Nous donnons deux démonstrations du résultat demandé (sachant que, là encore, il suffit de montrer que la famille est libre).

1) *Par récurrence sur n*

• Pour $n = 0$ le résultat est immédiat car la famille est alors formée d'un seul polynôme non nul.
• Supposons le résultat démontré à l'ordre $n-1$ $(n \geqslant 2)$, et soient $a_0, \dots, a_n$ $n+1$ réels distincts. Soient $\lambda_0, \dots, \lambda_n$ des réels tels que :

$$\sum_{i=0}^{n} \lambda_i (X-a_i)^n = 0 \quad (1).$$

En dérivant cette relation on obtient :

$$\sum_{i=0}^{n} \lambda_i (X-a_i)^{n-1} = 0 \quad (2),$$

et en calculant $(1) - (X-a_n) \times (2)$, ce qui permet d'éliminer le terme $(X-a_n)^n$, on trouve :

$$\sum_{i=0}^{n-1} \lambda_i [(X-a_i)^n - (X-a_n)(X-a_i)^{n-1}] = 0$$

soit :

$$\sum_{i=0}^{n-1} \lambda_i (a_n - a_i)(X-a_i)^{n-1} = 0.$$

La propriété au rang $n-1$ implique alors $\lambda_i(a_n - a_i) = 0$ pour tout $i \in [\![0\,;n-1]\!]$ d'où $\lambda_i = 0$ puisque $a_n \neq a_i$.
Enfin, en remplaçant dans (1) on obtient $\lambda_n = 0$. Finalement, tous les coefficients λ_i sont nuls, ce qui montre que la famille $\big((X-a_i)^n\big)_{0\leqslant i\leqslant n}$ est libre, et achève la récurrence.

2) *À l'aide d'un déterminant*

D'après la formule du binôme, pour tout $j \in [\![0\,;n]\!]$:

$$(X-a_j)^n = \sum_{i=0}^{n} \binom{n}{i} (-a_j)^i X^{n-i}$$

donc la matrice de la famille des vecteurs $(X-a_j)^n$ dans la base $\left(X^n, X^{n-1}, \dots, X, 1\right)$ de $\mathbb{R}_n[X]$, qui est une matrice de type $(n+1, n+1)$, s'écrit :

$$A = \begin{pmatrix} 1 & \dots & 1 \\ & \dots & \\ \binom{n}{i}(-a_0)^i & \dots & \binom{n}{i}(-a_n)^i \\ & \dots & \\ (-a_1)^n & \dots & (-a_n)^n \end{pmatrix}.$$

Le déterminant de cette matrice est égal à $\left(\prod_{i=0}^{n} \binom{n}{i}\right) V(-a_1, \dots, -a_n)$ où V désigne le déterminant de Vandermonde.
Les a_i étant distincts, ce déterminant est non nul, ce qui démontre que la famille des $n+1$ polynômes $(X-a_i)^n$ est une base de $\mathbb{K}_n[X]$.

Exercice 18: (⋆⋆⋆)

Soient P et Q deux polynômes non constants de $\mathbb{C}[X]$. On pose : $a = \deg P$ et $b = \deg Q$.
Démontrer que les trois propositions suivantes sont équivalentes :

(i) la famille $(P, XP, \dots, X^{b-1}P, Q, XQ, \dots, X^{a-1}Q)$ est libre ;

(ii) il existe $U, V \in \mathbb{C}[X]^2$ avec $\deg U < \deg Q$ et $\deg V < \deg P$ tels que $UP + VQ = 1$;

(iii) P et Q n'ont pas de racine commune.

✎ *Solution:*

$(i) \Rightarrow (ii)$
La famille donnée est une famille formée de $a+b$ éléments de $\mathbb{C}_{a+b-1}[X]$, qui est un espace vectoriel de dimension $a+b$. Étant libre, c'est donc une base de $\mathbb{C}_{a+b-1}[X]$.
En particulier, il existe des scalaires $(\lambda_0, \dots, \lambda_{b-1})$ et $(\mu_0, \dots, \mu_{a-1})$ tels que

$$1 = \lambda_0 P + \lambda_1 XP + \ldots + \lambda_{b-1} X^{b-1} P + \mu_0 + \mu_1 XQ + \ldots + \mu_{a-1} X^{a-1} Q$$

ce qui donne le résultat avec $U = \sum\limits_{i=0}^{b-1} \lambda_i X^i$ et $V = \sum\limits_{i=0}^{a-1} \mu_i X^i$.

$(ii) \Rightarrow (iii)$
Si (ii) est vérifiée, P et Q ne peuvent avoir de racine commune α car on aurait alors
$1 = (UP + VQ)(\alpha) = U(\alpha)P(\alpha) + V(\alpha)Q(\alpha) = 0$.

$(iii) \Rightarrow (i)$
Supposons donc que P et Q n'ont pas de racine commune, et montrons que la famille donnée est libre.
S'il existe des scalaires $(\lambda_0, \dots, \lambda_{b-1})$ et $(\mu_0, \dots, \mu_{a-1})$ tels que

$$\lambda_0 P + \lambda_1 XP + \ldots + \lambda_{b-1} X^{b-1} P + \mu_0 + \mu_1 XQ + \ldots + \mu_{a-1} X^{a-1} Q = 0$$

alors en posant $U = \sum\limits_{i=0}^{b-1} \lambda_i X^i$ et $V = \sum\limits_{i=0}^{a-1} \mu_i X^i$, on a $UP + VQ = 0$. Pour toute racine α de P, d'ordre de multiplicité k, on a $(X-\alpha)^k$ divise P donc divise UP donc divise VQ. α n'étant pas racine de Q, cela implique que $(X-\alpha)^k$ divise V. Cela étant vrai pour toutes les racines de P, et P étant scindé, on en déduit que P divise V. Mais $\deg V < \deg P$, d'où $V = 0$. On en déduit que tous les μ_i sont nuls, et idem pour les λ_i.

Exercice 19: (⋆⋆)

Dans un $\mathbb{K}$-espace vectoriel E, on considère une famille de n vecteurs, de rang r. On extrait de cette famille une sous-famille de n' vecteurs, de rang r'.
Montrer que : $n - r \geqslant n' - r'$ (*utiliser la formule de Grassmann*).

✎ *Solution:*

Soit $(e_1, \dots, e_n)$ de rang r, telle que $(e_1, \dots, e_{n'})$ soit de rang r'. Notons $F = \text{Vect}(e_1, \dots, e_n)$, $G = \text{Vect}(e_1, \dots, e_{n'})$ et $H = \text{Vect}(e_{n'+1}, \dots, e_n)$, de sorte que $F = G + H$.
Or $\dim F = r$ et $\dim G = r'$,donc, d'après la formule de Grassmann, $r = r' + \dim H - \dim(G \cap H)$, donc $r \leqslant r' + \dim H$. Mais H est engendré par $n - n'$ vecteurs, donc $\dim H \leqslant n - n'$, et l'inégalité demandée en résulte.

Exercice 20: (⋆⋆⋆)

On se donne une subdivision $x_0 = a < x_1 < x_2 < \ldots < x_n = b$ du segment $[a\,;b]$.
Soit F (respectivement G) l'ensemble des applications (respectivement l'ensemble des applications continues) $f\colon [a\,;b] \to \mathbb{R}$ qui sont affines sur chaque intervalle $]x_k\,;x_{k+1}[$.
Montrer que F et G sont des espaces vectoriels pour les lois usuelles et en donner la dimension.

✎ *Solution:*

a) – Commençons par démontrer que F est un sous-espace vectoriel du $\mathbb{R}$-espace vectoriel $\mathcal{A}(I, \mathbb{R})$ des applications de I dans $\mathbb{R}$:

– F est inclus dans $\mathcal{A}(I, \mathbb{R})$ par définition ;

– l'application nulle appartient à E, donc E est non vide ;

  – si f et g sont dans E et si $\lambda \in \mathbb{R}$, f et g sont affines sur chaque intervalle $]x_i\,;x_{i+1}[$ donc $\lambda f + g$ l'est aussi, ce qui prouve que $\lambda f + g$ appartient à E.

– Soit $f \in E$. f est entièrement déterminée par :

  – sa restriction aux intervalles de la subdivision : il existe des réels a_i et b_i pour $0 \leqslant i \leqslant n-1$ tels que pour tout $x \in]x_i\,;x_{i+1}[$ l'on ait $f(x) = a_i x + b_i$.

  – et sa valeur aux points de cette subdivision : notons $c_i = f(x_i)$ pour tout $i \in [\![0\,;n]\!]$.

  Cela suggère d'introduire les applications suivantes :

  – pour tout $i \in [\![0\,;n-1]\!]$, soit $\alpha_i \colon x \in [a\,;b] \mapsto \begin{cases} x & \text{si } x \in]x_i\,;x_{i+1}[\\ 0 & \text{sinon} \end{cases}$ et $\beta_i \colon x \in [a\,;b] \mapsto \begin{cases} 1 & \text{si } x \in]x_i\,;x_{i+1}[\\ 0 & \text{sinon}. \end{cases}$

  – pour tout $i \in [\![0\,;n]\!]$ soit $\gamma_i \colon x \in [a\,;b] \mapsto \begin{cases} 1 & \text{si } x = x_i \\ 0 & \text{sinon}. \end{cases}$

  Ces applications sont bien des éléments de E, et l'application f précédente peut s'écrire :

$$f = \sum_{i=0}^{n-1} a_i \alpha_i + \sum_{i=0}^{n-1} b_i \beta_i + \sum_{i=0}^{n} c_i \gamma_i\,.$$

  Donc la famille des applications α_i, β_i, γ_i est génératrice de E.

– Cette famille est libre puisque, en reprenant les notations précédentes, si

$$\sum_{i=0}^{n-1} a_i \alpha_i + \sum_{i=0}^{n-1} b_i \beta_i + \sum_{i=0}^{n} c_i \gamma_i = 0\,,$$

  alors, en prenant la valeur de cette application en chaque point x_i on obtient $c_i = 0$ puis sur chaque intervalle on aura $a_i x + b_i = 0$ pour tout $x \in]x_i\,;x_{i+1}[$ ce qui entraîne $a_i = b_i = 0$.

– Par conséquent, la famille formée des applications α_i, β_i pour $i \in [\![0\,;n-1]\!]$ et γ_i pour $i \in [\![0\,;n]\!]$ est une base de E ; E est donc un espace vectoriel de dimension finie, et $\dim E = n + n + (n+1) = 3n+1$.

b) Déjà, $G = F \cap \mathscr{C}(I,\mathbb{R})$ étant l'intersection de deux sous-espaces vectoriels est un sous-espace vectoriel de $\mathcal{A}(I,\mathbb{R})$.

En reprenant les notations précédentes, G est l'ensemble des applications de F dont la limite à droite et à gauche en tout point x_i (à droite seulement en a et à gauche seulement en b) sont égales à $f(x_i)$.

Si $f = \sum\limits_{i=0}^{n-1} a_i \alpha_i + \sum\limits_{i=0}^{n-1} b_i \beta_i + \sum\limits_{i=0}^{n} c_i \gamma_i$, cela se traduit par les équations :

$$\begin{cases} \alpha_0 x_0 + \beta_0 & & = c_0 \\ \alpha_0 x_1 + \beta_0 & = \alpha_1 x_1 + \beta_1 & = c1 \\ \alpha_1 x_2 + \beta_1 & = \alpha_2 x_2 + \beta_2 & = c_2 \\ \vdots & & \\ \alpha_{n-2} x_{n-1} + \beta_{n-2} & = \alpha_{n-1} x_{n-1} + \beta_{n-1} & = c_{n-1} \\ \alpha_{n-1} x_n + \beta_{n-1} & & = c_n \end{cases}$$

Chaque système $\begin{cases} \alpha_i x_i + \beta_i = c_i \\ \alpha_i x_{i+1} + \beta_i = c_{i+1} \end{cases}$ est de déterminant non nul, ce qui permet d'exprimer les α_i et les β_i de façon unique en fonction de c_i et c_{i+1} (faire éventuellement les calculs...) ce qui permet donc d'exprimer f en fonction seulement de $n+1$ fonctions indépendantes et donc $\dim G = n+1$.

Autre solution : le système précédent est en fait formé de $2n$ équations d'hyperplans indépendantes, donc la dimension de l'espace vectoriel des solutions est $3n+1-2n = n+1$ (voir cours sur les hyperplans).

Solution encore plus simple : pour tout $i \in [\![1\,;n]\!]$ notons δ_i l'unique fonction continue et affine par morceaux sur $[a\,;b]$ telle que

$$\delta_i(x_i) = 1 \quad \text{et} \quad \delta_i(x_j) = 0 \text{ si } j \neq i\,.$$

Alors toute fonction $f \in G$ s'écrit $f = \sum\limits_{i=0}^{n} f(x_i)\delta_i$, donc $(\delta_i)_{0 \leqslant i \leqslant n}$ forme un systeme générateur de G et est facilement libre, donc c'en est une base.

Somme de sous-espaces, supplémentaires (ex. 21 à 27)

Exercice 21: ($\star$)

Soients $F = \{f \in \mathscr{C}^1(\mathbb{R},\mathbb{R}) \mid f(0) = f'(0) = 0\}$ et $G = \{x \mapsto ax+b,\ (a,b) \in \mathbb{R}^2\}$.

Montrer que F et G sont deux sous-espaces vectoriels supplémentaires de $\mathscr{C}^1(\mathbb{R},\mathbb{R})$.

✎ *Solution:*

- Ne pas oublier de démontrer que F et G sont bien des **sous-espaces vectoriels** de $\mathscr{C}^1(\mathbb{R},\mathbb{R})$! Ce n'est pas bien difficile...
- Pour démontrer que $\mathscr{C}^1(\mathbb{R},\mathbb{R}) = F \oplus G$ on peut procéder par analyse/synthèse.
  - Soit $h \in \mathscr{C}^1(\mathbb{R},\mathbb{R})$. S'il existe $f \in F$ et $g \in G$ avec $g(x) = ax + b$ telles que $h = f + g$ alors pour tout $x \in \mathbb{R}$ on a $h(x) = f(x) + ax + b$ d'où nécessairement $b = h(0) - f(0)$ et, après avoir dérivé, $a = h'(0) - f'(0)$.

    a et b sont donc déterminés de façon unique, d'où l'unicité de la décomposition. Cela prouve que la somme $F + G$ est directe.
  - Soit maintenant $h \in \mathscr{C}^1(\mathbb{R},\mathbb{R})$. Posons $g : x \mapsto (h'(0) - f'(0))x + h(0) - f(0)$ et $f = h - g$. Alors clairement g appartient à G, et on vérifie aisément que f appartient à F.
    On a donc trouvé $f \in F$ et $g \in G$ telles que $h = f + g$, ce qui montre que $E = F + G$, et achève la démonstration.

Exercice 22: ($\star$)

Soit $F = \{f \in \mathcal{A}(\mathbb{R},\mathbb{R}) \mid f(0) + f(1) = 0\}$.

a) Montrer que F est un sous-espace vectoriel de $\mathcal{A}(\mathbb{R},\mathbb{R})$.

b) En déterminer un supplémentaire.

✎ *Solution:*

a) L'application nulle appartient à F, et si $f,\ g \in F$ alors pour tout scalaire λ :

$$(\lambda f + g)(0) + (\lambda f + g)(1) = \lambda(f(0) + f(1)) + g(0) + g(1) = \lambda \times 0 + 0 = 0$$

donc $\lambda f + g$ appartient à F.

b) Un supplémentaire en est (par exemple) le sous-espace vectoriel formé des applications constantes (même genre de démonstration que dans l'exercice précédent).

Exercice 23: ($\star$)

Dans $\mathbb{R}^4$ soient :

$$E = \text{Vect}\big((0,1,0,2)\big)\ ,\ F = \text{Vect}\big((1,2,-1,0)\big)$$
$$\text{et}\ \ G = \left\{(x,y,z,t) \in \mathbb{R}^4 \ \middle|\ x + 2y - z - t = x - y + 3z + 2t = 0\right\}.$$

A-t-on : $\mathbb{R}^4 = E \oplus F \oplus G$?

✎ *Solution:*

Soit $e_1 = (0,1,0,2)$ et $e_2 = (1,2,-1,0)$ des vecteurs de base de E et F resp.
On montre d'abord, par les moyens habituels, que G est le sous-espace vectoriel de $\mathbb{R}^4$ engendré par les vecteurs $e_3 = (-5,4,3,0)$ et $e_4 = (-1,1,0,1)$ (ce qui prouve en même temps que c'est bien un sous-espace vectoriel).
E, F, G sont supplémentaires si et seulement si (e_1,e_2,e_3,e_4) est une base de $\mathbb{R}^4$ ce qui équivaut à $\text{rg}(e_1,e_2,e_3,e_4) = 4$ ou $\det(e_1,e_2,e_3,e_4) \neq 0$: à faire.

Exercice 24: ($\star$)

Soit $E = \mathscr{C}([0\,;1],\mathbb{R})$ et $H = \left\{f \in E \ \middle|\ \int_0^1 f(t)\,\mathrm{d}t = 0\right\}$.

Montrer que H est un sous-espace vectoriel de E et en donner un supplémentaire.

✎ *Solution:*

La vérification de H sous-espace vectoriel est triviale (soit en revenant à la définition, soit, mieux, en disant que H est le noyau de la forme linéaire $f \mapsto \int_0^1 f$).
On vérifie ensuite qu'un supplémentaire de H est, par exemple, formé de la droite des applications constantes.

Exercice 25: ($\star\star$)

Soit $E = \mathscr{C}(\mathbb{R},\mathbb{R})$, E_0 l'ensemble des applications constantes sur $\mathbb{R}$, E_- l'ensemble des applications de E qui sont nulles sur $\mathbb{R}_-$ et E_+ l'ensemble des applications de E qui sont nulles sur $\mathbb{R}_+$.
Montrer qu'il s'agit de trois sous-espaces vectoriels supplémentaires de E.

✎ *Solution:*

• La vérification du fait qu'il s'agit de sous-espaces vectoriels est quasi immédiate : les trois ensembles sont bien inclus dan sE, contiennent la fonction nulle et sont stables pas combinaisons linéaires.

• On procède par analyse-synthèse.

- *Analyse*

  Si $f \in E$ s'écrit $f = f_0 + f_+ + f_-$ (avec des notations claires) alors :

$$\forall\, x \geqslant 0,\ f(x) = f_-(x) + f_0(x) \quad \text{et} \quad \forall\, x \leqslant 0,\ f(x) = f_+(x) + f_0(x).$$

  En particulier $f(0) = f_0(0)$ ce qui donne f_0 puisque cette application est constante, et les deux autres égalités permettent de déterminer f_+ et f_-.
  Cela prouve l'unicité de l'écriture, donc que la somme des trois sous-espaces vectoriels est directe.

- *Synthèse*

  Soit $f \in E$. On définit alors les trois applications :

$$f_0 \colon x \in \mathbb{R} \mapsto f(0) \quad , \quad f_+ \colon x \in \mathbb{R} \mapsto \begin{cases} f(x) - f(0) & \text{si } x \leqslant 0 \\ 0 & \text{si } x \geqslant 0 \end{cases} \quad \text{et} \quad f_- \colon x \in \mathbb{R} \mapsto \begin{cases} 0 & \text{si } x \leqslant 0 \\ f(x) - f(0) & \text{si } x \geqslant 0 \end{cases}$$

  Ces applications sont bien continues (il suffit de vérifier la continuité de f_+ et de f_- en 0). Elles appartiennent à E_0, E_+ et E_- respectivement, et sont telles que $f = f_0 + f_+ + f_-$.
  Cela prouve que $E = E_0 + E_+ + E_-$, et achève la démonstration.

Exercice 26: (⋆⋆)

Soit $E = \mathbb{R}_n[X]$ ($n \in \mathbb{N}^*$). Pour tout $i \in [\![1\,;n]\!]$ on note

$$F_i = \{P \in E \mid \forall\, j \in [\![0\,;n]\!] \setminus \{i\}\,,\ P(j) = 0\}\,.$$

Montrer que les F_i pour $0 \leqslant i \leqslant n$ sont des sous-espaces vectoriels supplémentaires de E.

✎ *Solution:*

Chaque F_i est une droite vectorielle, de base $L_i = \prod_{j \neq i}(X - j)$.

On vérifie alors que la famille (L_i) est libre. Par suite c'est une base de E ($n+1$ vecteurs en dimension $n+1$), et comme la réunion de bases des F_i forme une base de E, on a le résultat.

Exercice 27: (⋆⋆⋆)

Soit E un $\mathbb{K}$-espace vectoriel de dimension finie n, et F, G deux sous-espaces vectoriels de E tels que $\dim(F) = \dim(G)$. Montrer qu'il existe un sous-espace vectoriel H de E tel que $F \oplus H = G \oplus H = E$ (*on pourra procéder par récurrence sur* $n - \dim(F)$).

✎ *Solution:*

Comme le suggère l'énoncé, procédons par récurrence (finie) sur $p = n - \dim F$.

– Si $p = 0$, $F = G = E$ et un supplémentaire commun à F et G est $\{0\}$.

– Supposons la propriété démontrée à l'ordre $p - 1 \geqslant 0$, et soient F et G deux sous-espaces vectoriels de dimension $n - p < n$.
  D'après un résultat vu en cours, $F \cup G$ ne peut être égal à E (car $F \cup G = E \Rightarrow F = E$ ou $G = E$ ce qui est exclu ici). Il existe donc $x \in E$ tel que $x \notin F$ et $x \notin G$. Les sommes $F + \mathbb{K}x$ et $G + \mathbb{K}x$ sont donc directes ; si on pose $F' = F \oplus \mathbb{K}x$ et $G' = G \oplus \mathbb{K}x$, alors F' et G' sont des sous-espaces vectoriels de E de dimension $n - p + 1 = n - (p-1)$.
  D'après le résultat à l'ordre $p - 1$, il existe un sous-espace vectoriel H' de E tel que $E = F' \oplus H' = G' \oplus H'$.
  En posant $H = H' \oplus \mathbb{K}x$, on a bien $E = F \oplus H = G \oplus H$, ce qui achève la récurrence.

⋆ ⋆ ⋆ ⋆
⋆ ⋆ ⋆
⋆ ⋆
⋆