EXERCICES : DÉRIVABILITÉ

Fonctions dérivables (ex. 1 à 6)

Exercice 1: (⋆)

Déterminer toutes les fonctions f dérivables de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$ telles que

$$\forall (x,y) \in \mathbb{R}^2, f(x+y) = f(x)f(y).$$

Exercice 2: (⋆)

Soit $f : [a\,;b] \to \mathbb{R}$, dérivable, telle que $f(a) = 0$. On suppose qu'il existe $k \geqslant 0$ tel que :

$$\forall x \in [a\,;b] \ , \ |f'(x)| \leqslant k|f(x)|.$$

Montrer que $f = 0$.

Indication : on pourra considérer la fonction $g\colon x \mapsto \big(f(x)\big)^2 e^{-2kx}$.

Exercice 3: (⋆⋆)

Trouver toutes les fonctions $f\colon [0\,;1] \to [0\,;1]$, dérivables, telles que $f \circ f = f$.

Indication : si f n'est pas constante, soit $[a\,;b] = f([0\,;1])$. Montrer que pour tout $x \in [a\,;b]$, $f(x) = x$, puis en raisonnant par l'absurde, montrer que $a = 0$ et $b = 1$.

Exercice 4: (⋆⋆)

Soit $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, dérivable en 0, et telle que $f(0) = 0$. Déterminer :

$$\lim_{n\to\infty} \sum_{k=0}^{n} f\left(\frac{k}{n^2}\right) \quad \text{et} \quad \lim_{n\to\infty} \sum_{k=n}^{2n} f\left(\frac{1}{k}\right).$$

Applications :

a) Calculer $\lim\limits_{n\to\infty} \left(\left(\sum\limits_{k=1}^{n} e^{\frac{1}{n+k}}\right) - n\right)$.

b) Donner un équivalent quand n tend vers $+\infty$ de $\prod\limits_{k=1}^{n} (n^2 + k)$.

Exercice 5: (⋆⋆⋆)

Soit $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, continue en 0, telle que $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{f(kx) - f(x)}{x} = \ell$, où k est un réel appartenant à $]0,1[$.

Montrer que f est dérivable en 0, et calculer $f'(0)$ en fonction de ℓ et k.

Traiter le cas $k > 1$.

Exercice 6: (⋆⋆)

Soit $M\colon \mathbb{R} \to \mathcal{M}_{2n+1}(\mathbb{R})$ une application de classe $\mathscr{C}^1$ vérifiant

$$\forall t \in \mathbb{R}, \, {}^tM(t)M(t) = I_n.$$

Montrer que, pour tout réel t, la matrice $M'(t)$ n'est pas inversible.

Dérivées successives (ex. 7 à 9)

Exercice 7: ($\star$)

Calculer la dérivée n-ième en 0 de $f : x \mapsto \dfrac{1}{x^2 - 2x\cos\alpha + 1}$.

Exercice 8: ($\star\star$)

Montrer que, si $f_n(x) = x^{n-1}\ln(1+x)$ $(n \in \mathbb{N}^*)$, alors : $f_n^{(n)}(x) = (n-1)!\displaystyle\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{(1+x)^k}$.

Exercice 9: ($\star\star$)

Soit $f(x) = e^{-x^2}$.

a) Montrer que $f^{(n)}(x) = e^{-x^2}P_n(x)$, où P_n est un polynôme de degré n.

b) En remarquant $f'(x) = -2xf(x)$, établir que :

$$\forall\, n \geqslant 1\ ,\ P_{n+1}(x) = -2xP_n(x) - 2nP_{n-1}(x) \ \text{ et } \ P_n'(x) = -2nP_{n-1}(x).$$

c) En déduire une équation différentielle du second ordre vérifiée par P_n, puis ($\star\star\star$) une expression de P_n.

Th. de Rolle. Th. des accroissements finis. Formule de Taylor-Young (ex. 10 à 19)

Exercice 10: *Th. de Rolle généralisé* ($\star$)

Soit f continue sur $[a\,;+\infty[$, dérivable sur $]a\,;+\infty[$, telle que $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)$ existe et est égale à $f(a)$.
Montrer qu'il existe $c \in]a\,;+\infty[$ tel que $f'(c) = 0$.
(*Indication : considérer la fonction g définie sur $\left[0\,;\frac{\pi}{2}\right[$ par $g(x) = f(a+\tan x)$).*

Exercice 11: ($\star$)

En utilisant le théorème des accroissements finis, calculer : $\lim\limits_{x\to+\infty} x^2\left(\mathrm{e}^{\frac{1}{x}} - \mathrm{e}^{\frac{1}{x+1}}\right)$.
Donnez une autre méthode pour calculer cette limite.

Exercice 12: ($\star$)

Soit f dérivable sur $[0\,;1]$ telle que : $f(0) = 0$ et $f'(x) \neq 0$ pour tout $x \in [0\,;1]$.
Montrer que f garde un signe constant sur $[0\,;1]$. (*Rem :* on ne suppose pas nécessairement f' continue).

Exercice 13: ($\star$)

Soit f dérivable sur $\mathbb{R}_+$. On suppose f' croissante et on pose $g(x) = xf'(x) - f(x)$.
Montrer que g est croissante.

Exercice 14: ($\star\star$)

Soit $P \in \mathbb{R}[X]$. Montrer que, si, P est scindé sur $\mathbb{R}$, il en est de même de P'.

Exercice 15: ($\star\star\star$)

Soit $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, dérivable, telle que $\lim\limits_{t\to+\infty} f'(t) = \ell \in \mathbb{R}$.

Montrer que : $\lim\limits_{t\to+\infty} \dfrac{f(t)}{t} = \ell$. Réciproque ?

Exercice 16: ($\star\star\star$)

Soit $f \in \mathscr{C}^1(\mathbb{R}_+, \mathbb{R})$, telle que $\lim\limits_{t\to+\infty} \big(f(t) + f'(t)\big) = \ell$.

Montrer que $\lim\limits_{t\to+\infty} f(t) = \ell$ (on pourra s'inspirer des méthodes de résolution d'une équation différentielle du premier ordre).

Exercice 17: *Formule des trapèzes* ($\star\star$)

Soit f de classe $\mathscr{C}^3$ sur $[a\,;b]$, à valeurs réelles. Montrer qu'il existe $c \in \,]a\,;b[$ tel que :

$$f(b) = f(a) + \frac{b-a}{2}\big(f'(a) + f'(b)\big) - \frac{(b-a)^3}{12} f^{(3)}(c).$$

Indication : considérer la fonction $g\colon x \mapsto f(x) - f(a) - \dfrac{x-a}{2}(f'(a) + f'(x)) + \lambda \dfrac{(x-a)^3}{12}$, où λ est un réel bien choisi.

Exercice 18: ($\star\star$)

Soit f de classe $\mathscr{C}^5$ sur $[a\,;b]$, à valeurs dans $\mathbb{R}$. Montrer qu'il existe $c \in \,]a\,;b[$ tel que :

$$f(b) = f(a) + \frac{b-a}{2}\big(f'(a) + f'(b)\big) - \frac{(b-a)^2}{12}\big(f''(b) - f''(a)\big) + \frac{(b-a)^5}{720} f^{(5)}(c).$$

Exercice 19: ($\star\star$)

Soient n réels $a_1 < a_2 < \ldots < a_n$ et f de classe $\mathscr{C}^n$ sur $[a_1\,;a_n]$ à valeurs dans $\mathbb{R}$, telle que $f(a_i) = 0$ pour tout i.

Montrer que, pour tout $x \in [a_1\,;a_n]$, il existe $c \in \,]a_1\,;a_n[$ tel que :

$$f(x) = \frac{(x-a_1)(x-a_2)\ldots(x-a_n)}{n!} f^{(n)}(c).$$

Indication : considérer $g\colon t \mapsto f(t) - \lambda(t-a_1)(t-a_2)\ldots(t-a_n)$ où λ est choisie telle que $g(x) = 0$ lorsque cela est possible.