EXERCICES : SUITES NUMÉRIQUES

Étude de suites réelles (ex. 1 à 9)

Exercice 1: (⋆)

Soit $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite à valeurs dans $\mathbb{Z}$.
Montrer que (u_n) converge si et seulement si (u_n) est stationnaire.

Exercice 2: Limite de la partie entière (⋆)

Soit $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite réelle convergent vers $\ell \in \mathbb{R}$. La suite $(\lfloor u_n \rfloor)_{n\in\mathbb{N}}$ est-elle convergente ?

Exercice 3: Règle de d'Alembert pour les suites (⋆)

a) Soit $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite à valeurs réelles strictement positives. On suppose qu'il existe $k \in [0;1[$ tel que, à partir d'un certain rang, on a $\dfrac{u_{n+1}}{u_n} \leqslant k$. Montrer que $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = 0$.

b) Soit $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite à valeurs réelles strictement positives telle que $\lim\limits_{n\to+\infty} \dfrac{u_{n+1}}{u_n} = \ell \in [0;1[$. Montrer que $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = 0$.

Exercice 4: Somme de parties entières (⋆)

a) Soit $x \in \mathbb{R}$. Étudier la limite de la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ de terme général :

$$u_n = \frac{\lfloor x \rfloor + \lfloor 2x \rfloor + \cdots + \lfloor nx \rfloor}{n^2}.$$

b) En déduire que tout nombre réel est limite d'une suite de nombres rationnels.

Exercice 5: (⋆⋆)

Pour $n \in \mathbb{N}^*$ on pose $u_n = \dfrac{1 \times 3 \times 5 \times \ldots \times (2n-1)}{2 \times 4 \times 6 \times \ldots \times (2n)}$.

a) Exprimer u_n à l'aide de factorielles.

b) Montrer que la suite (u_n) est convergente.

c) Soit $v_n = (n+1)u_n^2$. Montrer que la suite (v_n) converge. Que peut-on en déduire pour $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n$?

d) On note $\alpha = \lim\limits_{n\to+\infty} v_n$. En étudiant la suite (nu_n^2), montrer que $\alpha > 0$.

Exercice 6: (⋆)

a) Montrer que pour tout entier $n \in \mathbb{N}^*$: $\dfrac{1}{n+1} \leqslant \ln(n+1) - \ln(n) \leqslant \dfrac{1}{n}$.

b) En déduire que la suite de terme général : $u_n = \displaystyle\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k} - \ln(n)$ est convergente.

La limite de cette suite se note traditionnellement γ, et s'appelle la constante d'Euler.

Exercice 7: (⋆)

Soit $k \in \mathbb{N}$, $k \geqslant 2$. En utilisant une comparaison à une intégrale, montrer que la suite de terme général $u_n = \dfrac{1}{n+1} + \dfrac{1}{n+2} + \cdots + \dfrac{1}{kn}$ est convergente et donner sa limite.

Exercice 8: Encore des sommes ($\star\star$)

Pour tout $n \in \mathbb{N}$, on pose : $S_n = \sum\limits_{k=1}^{n} \dfrac{1}{n+k}$ et $S'_n = \sum\limits_{k=1}^{n} \dfrac{(-1)^{k-1}}{k}$.

a) Établir que pour tout $p > 1$,

$$\int_p^{p+1} \frac{\mathrm{d}x}{x} \leqslant \frac{1}{p} \leqslant \int_{p-1}^{p} \frac{\mathrm{d}x}{x}.$$

En déduire la limite de (S_n).

b) Établir que $S'_{2n} = S_n$. En déduire la limite de (S'_n).

Exercice 9: Théorème de Cesàro ($\star\star\star$)

Soit (u_n) une suite de nombres réels convergeant vers $\ell \in \mathbb{R}$.

Soit (a_n) une suite de réels *strictement positifs* telles que $\lim\limits_{n\to+\infty} \left(\sum\limits_{k=1}^{n} a_k\right) = +\infty$ (autrement dit, la série de terme général a_n diverge).

Montrer que la suite (v_n) définie par : $v_n = \dfrac{\sum\limits_{k=1}^{n} a_k u_k}{\sum\limits_{k=1}^{n} a_k}$ converge aussi vers ℓ.

En déduire que la suite (w_n) définie par : $w_n = \dfrac{\sum\limits_{k=1}^{n} u_k}{n}$ converge aussi vers ℓ.

Suites définies par une relation de récurrence (ex. 10 à 12)

Exercice 10: ($\star\star$)

Étudier les suites réelles (u_n) définies par :

a) $u_{n+1} = \sqrt{5+4u_n}$ **b)** $u_{n+1} = \sqrt{5-4u_n}$ **c)** $u_{n+1} = \dfrac{4-u_n^2}{3}$

d) $u_{n+1} = \dfrac{1-u_n^2}{1+u_n^2}$ **e)** $u_{n+1} = \sin(2u_n)$ **f)** $u_{n+2} = \sqrt{u_n u_{n+1}}$

Exercice 11: ($\star$)

On considère la suite réelle $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ définie par :

$$u_0 > 0 \qquad \text{et} \qquad \forall\, n \in \mathbb{N},\ u_{n+1} = \sqrt{\sum_{k=0}^{n} u_k}.$$

a) Trouver une relation de récurrence simple entre u_n et u_{n+1}.

b) Montrer que $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = +\infty$.

c) Montrer que $\lim\limits_{n\to+\infty} \dfrac{u_{n+1}}{u_n} = 1$ puis que $\lim\limits_{n\to+\infty} (u_{n+1} - u_n) = \dfrac{1}{2}$.

d) ($\star\star$) En utilisant le théorème de Cesàro, donner un équivalent de u_n lorsque $n \to +\infty$.

Exercice 12: (⋆⋆)

Étudier les suites réelles (u_n) et (v_n) définies par :

1. $u_{n+1} = \dfrac{u_n^2}{u_n + v_n} \quad , \quad v_{n+1} = \dfrac{v_n^2}{u_n + v_n} \qquad (0 < u_0 < v_0)$.
   En déduire : $\lim\limits_{n\to\infty} \Big(\prod\limits_{p=0}^{n} (1 + k^{2^p}) \Big) \quad (0 < k < 1)$.

2. $u_{n+1} = \dfrac{u_n + v_n}{2} \qquad v_{n+1} = \sqrt{u_n v_n} \quad (0 < u_0 < v_0)$.

3. $u_{n+1} = \dfrac{u_n + v_n}{2} \qquad v_{n+1} = \sqrt{u_{n+1} v_n} \quad (0 < u_0 < v_0)$.
   On montrera que les deux suites convergent vers la même limite ℓ, que l'on exprimera à l'aide de $\theta = \arccos\left(\dfrac{u_0}{v_0}\right)$.

4. $u_{n+1} = \sqrt{u_n v_n} \qquad v_{n+1} = \dfrac{u_n + v_n}{2} \quad (0 < u_0 \leqslant v_0)$

5. $u_{n+1} = \dfrac{2u_n + v_n}{3} \qquad v_{n+1} = \dfrac{u_n + 2v_n}{3} \quad (0 < u_0 < v_0)$.

6. $u_{n+1} = \dfrac{u_n}{2} + \dfrac{2}{v_n} \qquad v_{n+1} = \dfrac{1}{2u_n} + 2v_n \quad (u_0, v_0 > 0)$

Suites complexes (ex. 13 à 17)

Exercice 13: (⋆⋆)

Soit $a \in \mathbb{C}$, $|a| \neq 1$. Étudier la suite de terme général $u_n = \dfrac{a^n}{(1+a)(1+a^2)\cdots(1+a^n)}$.

Exercice 14: (⋆⋆)

Étudier la suite complexe (z_n) définie par la relation de récurrence : $z_{n+1} = \dfrac{1}{2}\big(z_n + |z_n|\big)$.

Exercice 15: (⋆)

a) Montrer que la suite $(z_n)_{n\in\mathbb{N}} \in \mathbb{C}^{\mathbb{N}}$ définie par : $\forall\, n \in \mathbb{N}$, $z_n = \mathrm{e}^{in}$, diverge.

b) En utilisant la formule donnant $\cos(n+1)$ montrer que si la suite $(\cos n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge, il en est de même de la suite $(\sin n)_{n\in\mathbb{N}}$.
Montrer de même que si la suite $(\sin n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge, il en est de même de la suite $(\cos n)_{n\in\mathbb{N}}$.

c) En déduire que les deux suites $(\cos n)_{n\in\mathbb{N}}$ et $(\sin n)_{n\in\mathbb{N}}$ divergent.

d) Généraliser aux suites $(\cos n\theta)_{n\in\mathbb{N}}$ et $(\sin n\theta)_{n\in\mathbb{N}}$ où $\theta \in \mathbb{R}$ (on sera amené à distinguer le cas particulier $\theta \equiv 0 \pmod{\pi}$).

Exercice 16: (⋆⋆)

a) Étudier la suite réelle définie par $a_0 = 0$ et $a_{n+1} = \frac{1}{4} + a_n^2$ pour tout $n \in \mathbb{N}$.

b) On note maintenant v la suite complexe définie par $v_0 = 0$ et $v_{n+1} = A + v_n^2$ où $A \in \mathbb{C}$ et $|A| \leqslant \frac{1}{4}$.

  i) Montrer que : $\forall\, n \in \mathbb{N}, \quad |v_n| \leqslant |a_n|$.

  ii) Établir que $\forall\, n \in \mathbb{N}$ $|v_{n+1} - v_n| \leqslant |a_{n+1} - a_n|$.

  iii) En déduire que (v_n) est convergente. Déterminer sa limite.

Exercice 17: (⋆⋆)

Soit $z \in \mathbb{C}^*$. Calculer $\lim\limits_{n\to\infty}\left(1+\dfrac{z}{n}\right)^n$.

Étude de racines d'équations. (ex. 18 à 21)

Exercice 18: (⋆⋆⋆)

a) Montrer que l'équation $\tan x = x$ possède pour tout entier $n \in \mathbb{Z}$ une unique solution notée x_n dans l'intervalle $\left]n\pi\,;n\pi+\frac{\pi}{2}\right[$.

b) Former le développement asymptotique de x_n lorsque $n \to +\infty$, à la précision $\dfrac{1}{n^3}$.

Exercice 19: (⋆⋆⋆)

On désigne par x_n la racine réelle de l'équation : $x + \ln x = n$ $(n \in \mathbb{N}^*)$.
Justifier l'existence de x_n, et donner un développement asymptotique à deux termes de x_n quand $n \to +\infty$.

Exercice 20: (⋆⋆⋆)

On désigne par x_n $(n \geqslant 3)$ la racine de l'équation : $x^n - nx + 1 = 0$, $x \in]0\,;1[$.
Justifier l'existence de x_n, et donner un équivalent de x_n quand $n \to +\infty$.

Exercice 21: (⋆⋆⋆)

Montrer que l'équation $x^n + x - 1 = 0$ $(n \in \mathbb{N}^*)$ admet une et une seule solution positive, noté u_n.
Montrer que $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = 1$ et que $1 - u_n \underset{n\to+\infty}{\sim} \dfrac{\ln(n)}{n}$.