

EXERCICES : ESPACES VECTORIELS NORMÉS, AVEC CORRIGÉS**Normes** (ex. 1 à 12)**Exercice 1: (★)**

Soit $(E, \|\cdot\|)$ un espace vectoriel normé, et soient $x, y \in E$.

Montrer que : $\|x\| + \|y\| \leq \|x + y\| + \|x - y\|$.

 **Solution:**

On écrit $2x = (x + y) + (x - y)$ et $2y = (x + y) - (x - y)$, on applique l'inégalité triangulaire à chacune de ces relations puis on additionne les résultats obtenus.

Exercice 2: (★)

Soient $a_1, \dots, a_n$ des réels. Pour tout $x = (x_1, \dots, x_n) \in \mathbb{R}^n$ on pose :

$$N(x) = \sum_{i=1}^n a_i |x_i|.$$

Déterminer une condition nécessaire et suffisante portant sur les a_i pour que N soit une norme sur $\mathbb{R}^n$.

 **Solution:**

En calculant $N(e_i)$ où les e_i sont les vecteurs de la base canonique, on montre que, nécessairement, les a_i doivent être strictement positifs.

Réciproquement, si les a_i sont strictement positifs, il est facile de montrer que N est une norme sur $\mathbb{R}^n$ (exactement comme en cours pour la norme $\|\cdot\|_1$).

Exercice 3: (★★)

Soit A une partie non vide de $\mathbb{R}$. Quelle(s) condition(s) doit vérifier A pour que l'application :

$$N: P \mapsto \|P\|_A = \sup_{t \in A} |P(t)|$$

soit une norme sur $\mathbb{R}[X]$?

 **Solution:**

La condition est : « A est une partie infinie et bornée. » En effet :

- Si A n'est pas bornée, pour $P = X$ par exemple, l'ensemble $\{|P(t)| \mid t \in A\}$ n'est pas borné et le sup n'existe pas.
- Si A est finie, par exemple $A = \{a_1, \dots, a_n\}$, en prenant $P = \prod_{i=1}^n (X - a_i)$ on obtient un polynôme P non nul tel que $N(P) = 0$.
- Réciproquement, si la condition ci-dessus est vérifiée, il est facile de vérifier que N est bien une norme sur $\mathbb{R}[X]$ (un peu comme la norme $\|\cdot\|_\infty$ dans le cours, et en utilisant aussi le fait que si un polynôme s'annule pour une infinité de valeurs c'est le polynôme nul).

Exercice 4: (★★)

Montrer que l'on définit une norme sur $\mathbb{R}^2$ par : $N(x, y) = \sup_{t \in \mathbb{R}} \left| \frac{x + ty}{1 + t + t^2} \right|$. Dessiner la boule unité pour cette norme.

 **Solution:**

– Existence

Il s'agit de montrer que la définition de $N(x, y)$ a bien un sens.

Soit, pour $(x, y) \in \mathbb{R}^2$ donné, $A = \left\{ \left| \frac{x+ty}{1+t+t^2} \right|, t \in \mathbb{R} \right\}$.

L'ensemble A est non vide. De plus, la fonction $t \mapsto \frac{|x+ty|}{1+t+t^2}$ est continue sur $\mathbb{R}$ et tend vers 0 quand t tend vers $\pm\infty$, donc est bornée (exercice classique). Donc $\sup A$ existe.

– N est une norme

– $\forall (x, y) \in \mathbb{R}^2, N(x, y) \geq 0$ (car c'est la borne sup d'un ensemble de réels positifs).

– Soit $(x, y) \in \mathbb{R}^2$ tel que $N(x, y) = 0$. Alors $|x+ty| = 0$ pour tout $t \in \mathbb{R}$, d'où $x = y = 0$.

– Soit $(x, y) \in \mathbb{R}^2$ et $\lambda \in \mathbb{R}$.

$$N(\lambda(x, y)) = N(\lambda x, \lambda y) = \sup_{t \in \mathbb{R}} \frac{|\lambda(x+ty)|}{1+t+t^2} = \sup_{t \in \mathbb{R}} \frac{|\lambda| |x+ty|}{1+t+t^2} = |\lambda| \sup_{t \in \mathbb{R}} \frac{|x+ty|}{1+t+t^2} = |\lambda| N(x, y)$$

– Inégalité triangulaire : Soient $u = (x, y), v = (x', y') \in \mathbb{R}^2$. Pour tout $t \in \mathbb{R}$:

$$\frac{|(x+x') + t(y+y')|}{1+t+t^2} \leq \frac{|x+ty| + |x'+ty'|}{1+t+t^2} = \frac{|x+ty|}{1+t+t^2} + \frac{|x'+ty'|}{1+t+t^2} \leq N(u) + N(v)$$

L'inégalité ayant lieu pour tout $t \in \mathbb{R}$, on obtient, en prenant la borne sup : $N(u+v) \leq N(u) + N(v)$.

– Boule unité

Soit $B = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2, N(x, y) \leq 1\}$.

$$(x, y) \in B \iff \forall t \in \mathbb{R}, \frac{|x+ty|}{1+t+t^2} \leq 1 \iff \forall t \in \mathbb{R}, -1 \leq \frac{x+ty}{1+t+t^2} \leq 1$$

$$\iff \forall t \in \mathbb{R}, \begin{cases} t^2 + t(1-y) + 1 - x \geq 0 \\ t^2 + t(1+y) + 1 + x \geq 0 \end{cases} \iff (1-y)^2 - 4(1-x) \leq 0 \text{ et } (1+y)^2 - 4(1+x) \leq 0$$

(on a utilisé le fait qu'un trinôme est de signe constant si et seulement si son discriminant est négatif).

La boule cherchée est donc la portion de plan comprise entre les deux paraboles d'équations $(1-y)^2 = 4(1-x)$ et $(1+y)^2 = 4(1+x)$ (faites le dessin).

Exercice 5: Norme matricielle subordonnée (***)

Pour toute matrice $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ on pose :

$$N(A) = \sup \left\{ \|AX\|_\infty \mid X \in \mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R}), \|X\|_\infty \leq 1 \right\}.$$

a) Montrer que N est une norme sur $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$.

b) Montrer que :

$$\forall A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R}), \forall X \in \mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R}), \|AX\|_\infty \leq N(A) \|X\|_\infty$$

et en déduire que :

$$\forall A, B \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R}), N(AB) \leq N(A)N(B).$$

c) Si $A = (a_{ij})_{1 \leq i, j \leq n}$, montrer que $N(A) = \max_{i \in \llbracket 1; n \rrbracket} \sum_{j=1}^n |a_{ij}|$.

 Solution:

a) – La première chose à faire (et à ne pas oublier) est de justifier l'existence de la borne supérieure mentionnée.

Soit $A = (a_{ij})_{1 \leq i, j \leq n}$, $X = {}^t(x_1 \dots x_n)$ et $AX = Y = {}^t(y_1 \dots y_n)$. on a :

$$\forall i \in \llbracket 1; n \rrbracket, y_i = \sum_{j=1}^n a_{ij}x_j$$

$$\text{d'où } |y_i| = \left| \sum_{j=1}^n a_{ij}x_j \right| \leq \sum_{j=1}^n |a_{ij}| |x_j| \leq n \|A\|_\infty \|X\|_\infty$$

donc l'ensemble $\left\{ \|AX\|_\infty \mid X \in \mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R}), \|X\|_\infty \leq 1 \right\}$ est majoré par $n \|A\|_\infty$ (où $\|A\|_\infty = \max |a_{ij}|$).
D'où l'existence de la borne supérieure.

Ainsi la fonction $A \mapsto N(A)$ est bien définie, et elle est évidemment à valeurs dans $\mathbb{R}_+$.

- Si $N(A) = 0$ alors pour tout vecteur colonne X tel que $\|X\|_\infty = 1$ on a $AX = 0$. Or si Y est un vecteur colonne non nul quelconque, le vecteur $X = \frac{1}{\|Y\|_\infty} Y$ est de norme 1 donc $AX = 0$ puis $AY = 0$.

On a donc $\forall Y \in \mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R})$, $AY = 0$ ce qui signifie que l'application linéaire canoniquement associée à A est nulle donc $A = 0$.

- Soit $\lambda \in \mathbb{R}$ et $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$. Pour tout $X \in \mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R})$ tel que $\|X\|_\infty = 1$ on a

$$\|\lambda AX\|_\infty = |\lambda| \|AX\|_\infty \leq |\lambda| N(A)$$

donc $N(\lambda A) \leq |\lambda| N(A)$.

On en déduit, pour $\lambda \neq 0$, $N(A) = N\left(\frac{1}{\lambda}(\lambda A)\right) \leq \frac{1}{|\lambda|} N(\lambda A)$ donc $N(\lambda A) \geq |\lambda| N(A)$ et finalement l'égalité.

- Soient $A, B \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$. Alors, pour tout $X \in \mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R})$ tel que $\|X\|_\infty = 1$ on a :

$$\|(A+B)X\|_\infty = \|AX + BX\|_\infty \leq \|AX\|_\infty + \|BX\|_\infty \leq N(A) + N(B),$$

donc $N(A+B) \leq N(A) + N(B)$.

Ce qui précède montre que N est bien une norme sur $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$.

- b)** Soit maintenant $Y \in \mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R})$ non nul. Le vecteur $X = \frac{1}{\|Y\|_\infty} Y$ est de norme 1 donc $\|AX\|_\infty \leq N(A)$ et

l'on en déduit $\|AY\|_\infty \leq N(A) \|Y\|_\infty$, cette inégalité restant vraie pour $Y = 0$.

Enfin, si $A, B \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$, on a pour tout $X \in \mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R})$ tel que $\|X\|_\infty = 1$:

$$\|(AB)X\|_\infty = \|A(BX)\|_\infty \leq N(A) \|BX\|_\infty \leq N(A) N(B) \|X\|_\infty = N(A) N(B),$$

donc $N(AB) \leq N(A) N(B)$.

- c)** Il s'agit de comparer $\|AX\|_\infty$ avec $\|X\|_\infty$.

Soit $A = (a_{ij})_{1 \leq i, j \leq n}$, $X = {}^t(x_1 \dots x_n)$ et $AX = Y = {}^t(y_1 \dots y_n)$.

$$\forall i \in \llbracket 1; n \rrbracket \quad y_i = \sum_{j=1}^n a_{ij} x_j$$

$$\text{donc } |y_i| \leq \sum_{j=1}^n |a_{ij}| |x_j| \leq \sum_{j=1}^n |a_{ij}| \|X\|_\infty$$

$$\text{donc } \|Y\|_\infty \leq \left(\max_{i \in \llbracket 1; n \rrbracket} \sum_{j=1}^n |a_{ij}| \right) \|X\|_\infty$$

$$\text{d'où } N(A) \leq \max_{i \in \llbracket 1; n \rrbracket} \sum_{j=1}^n |a_{ij}|.$$

D'autre part, soit i_0 l'indice tel que $\sum_{j=1}^n |a_{i_0 j}|$ soit le maximum des $\sum_{j=1}^n |a_{ij}|$ lorsque i décrit $\llbracket 1; n \rrbracket$. Si on

considère le vecteur X tel que $x_j = \begin{cases} \frac{|a_{i_0 j}|}{a_{i_0 j}} & \text{si } a_{i_0 j} \neq 0 \\ 1 & \text{sinon} \end{cases}$, on a alors $\|X\|_\infty = 1$ et $y_{i_0} = \max_{i \in \llbracket 1; n \rrbracket} \sum_{j=1}^n |a_{ij}|$, d'où

dans ce cas

$$\|Y\|_\infty = \max_{i \in \llbracket 1; n \rrbracket} \sum_{j=1}^n |a_{ij}| \cdot \|X\|_\infty \text{ et finalement :}$$

$$N(A) = \max_{i \in \llbracket 1; n \rrbracket} \sum_{j=1}^n |a_{ij}|.$$

Exercice 6: (★★★)

1. Soit $\| \cdot \|$ une norme sur $\mathcal{M}_n(\mathbb{C})$. Démontrer qu'il existe un réel $k > 0$ tel que :

$$\forall A, B \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C}), \|AB\| \leq k \|A\| \|B\|.$$

2. Démontrer que, pour $n \geq 2$, il n'existe pas de norme sur $\mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ telle que $\|AB\| = \|BA\|$ pour toutes matrices A, B de $\mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ (on pourra, dans le cas $n = 2$, considérer les matrices $\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$ et $\begin{pmatrix} 0 & 2 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$ et remarquer que ces deux matrices sont semblables).

 Solution:

1. – On commence par démontrer la relation pour la norme $\| \cdot \|_\infty$. En revenant à la définition du produit matriciel, et avec des notations évidentes, si $C = AB$:

$$\forall (i, k) \in \llbracket 1; n \rrbracket^2, |c_{ik}| = \left| \sum_{j=1}^n a_{ij} b_{jk} \right| \leq \sum_{j=1}^n |a_{ij}| |b_{jk}| \leq n \|A\|_\infty \|B\|_\infty$$

d'où $\|C\|_\infty \leq n \|A\|_\infty \|B\|_\infty$.

- puis on généralise à une norme quelconque, en écrivant qu'elle est équivalente à $\| \cdot \|_\infty$ (puisque $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ est de dimension finie).

2. Si on avait la relation donnée, alors, pour toute matrice $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ et toute matrice inversible $P \in \text{GL}_n(\mathbb{K})$, on aurait $\|P^{-1}AP\| = \|APP^{-1}\| = \|A\|$, donc deux matrices semblables auraient même norme.

Dans le cas $n = 2$, si $A = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$ et $B = \begin{pmatrix} 0 & 2 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$, A et B sont semblables puisque, si A est la matrice d'un endomorphisme u dans une base (e_1, e_2) , B est celle de u dans la base $(e_1, 2e_2)$. On devrait donc avoir $\|B\| = \|A\|$, ce qui est impossible puisque $B = 2A$.

Je vous laisse vous inspirer de cet exemple pour généraliser au cas n quelconque (considérer par exemple des matrices par blocs).

Exercice 7: (★)

Soit $E = \mathcal{C}([0; 1], \mathbb{R})$. On pose, pour $f \in E$, $N(f) = \int_0^1 e^x |f(x)| dx$.

Montrer que N est une norme, et la comparer à la norme $\| \cdot \|_\infty$ (on pourra considérer la suite (f_n) telle que $f_n(x) = 1 - nx$ si $0 \leq x \leq \frac{1}{n}$ et $f_n(x) = 0$ si $\frac{1}{n} \leq x \leq 1$), ainsi qu'à la norme $\| \cdot \|_1$ et à la norme $\| \cdot \|_2$.

 Solution:

- Montrer que N est une norme est facile.

- $\forall f \in E$, $N(f) = \int_0^1 e^x |f(x)| dx \leq \int_0^1 e^x \|f\|_\infty dx = (e - 1) \|f\|_\infty$. Ainsi, le rapport $\frac{N}{\| \cdot \|_\infty}$ est majoré sur $E \setminus \{0\}$, mais le rapport $\frac{\| \cdot \|_\infty}{N}$ ne l'est pas (donc les deux normes ne sont pas équivalentes). En effet, soit f_n comme dans l'énoncé, alors $\|f_n\|_\infty = 1$ et un calcul d'intégrales rapide montre que $\lim_{n \rightarrow \infty} N(f_n) = 0$, donc $\frac{\|f_n\|_\infty}{N(f_n)}$ tend vers ∞ avec n .

- $\forall f \in E$, $\|f\|_1 = \int_0^1 |f(x)| dx \leq \int_0^1 e^x |f(x)| dx \leq e \int_0^1 |f(x)| dx = e \|f\|_1$, donc les normes N et $\| \cdot \|_1$ sont équivalentes.

- D'après l'inégalité de Cauchy-Schwarz, on a pour toute $f \in E$:

$$N(f) = \int_0^1 e^x |f(x)| dx \leq \sqrt{\int_0^1 e^{2x} dx} \sqrt{\int_0^1 |f(x)|^2 dx}$$

soit $N(f) \leq \alpha \|f\|_2$ avec $\alpha > 0$.

Mais, si on considère, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, l'application $f_n : x \mapsto e^{-nx}$, on trouve, après un calcul rapide d'intégrales élémentaires : $N(f_n) \sim \frac{1}{n}$ et $\|f_n\|_2 \sim \frac{1}{\sqrt{2n}}$, donc $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\|f_n\|_2}{N(f_n)} = +\infty$, donc les deux normes ne sont pas équivalentes.

Remarque : on pouvait aussi conclure par transitivité ; en effet, si N et $\| \cdot \|_2$ étaient équivalentes, $\| \cdot \|_1$ et $\| \cdot \|_2$ le seraient aussi...

Exercice 8: (★)

Soit $F = \{f \in \mathcal{C}^1([0;1], \mathbb{R}) \mid f(0) = 0\}$. On pose, pour $f \in F$, $N(f) = \|f'\|_\infty$.
Montrer que N est une norme sur F . Est-elle équivalente à la norme $\|\cdot\|_\infty$?

 *Solution:*

- Pour tout $f \in F$, f' est continue sur $[0;1]$ qui est compact, donc par théorème est bornée, ce qui justifie l'existence de $N(f)$, et clairement $N(f) \geq 0$.
- Soit $(f, g) \in F^2$, alors $N(f+g) = \|f' + g'\|_\infty \leq \|f'\|_\infty + \|g'\|_\infty$ d'où $N(f+g) \leq N(f) + N(g)$.
- Soit $f \in F$, soit $\lambda \in \mathbb{R}$, alors $N(\lambda f) = \|\lambda f'\|_\infty = |\lambda| \cdot \|f'\|_\infty$ d'où $N(\lambda f) = |\lambda|N(f)$.
- Soit $f \in F$ telle que $N(f) = 0$, alors $\|f'\|_\infty = 0$ d'où $f' = 0$, donc f est constante, et comme $f(0) = 0$, $f = 0$.
Conclusion : N est une norme sur F .
- Posons, pour $n \in \mathbb{N}^*$, $f_n : x \mapsto x^n$, alors clairement $\forall n \in \mathbb{N}^*$, $f_n \in F$, et $\|f_n\|_\infty = 1$, $N(f) = n$, d'où $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\|f_n\|_\infty}{N(f_n)} = 0$, on conclut : N et $\|\cdot\|_\infty$ ne sont pas équivalentes.

Exercice 9: (★★)

Dans $E = \mathbb{R}[X]$, on pose, si $P = \sum_i a_i X^i$: $N_1(P) = \max\{|a_i|\}$, $N_2(P) = \sum_i |a_i|$ et $N_3(P) = \sup_{t \in [0;1]} |P(t)|$.
Montrer que N_1, N_2 et N_3 sont des normes sur E et qu'elles sont deux à deux non équivalentes.

 *Solution:*

- Le fait que N_1 et N_2 sont bien des normes sur $\mathbb{R}[X]$ est facile (même genre de démonstration que pour les normes usuelles dans $\mathbb{R}^n$. N_3 est la norme $\|\cdot\|_\infty$ usuelle.
- Comparaison de N_1 et N_2 :
Pour tout $P \in \mathbb{R}[X]$, on a $N_1(P) \leq N_2(P)$ (car le max des $|a_i|$ figure dans la somme $\sum |a_i|$).
Cependant, N_1 et N_2 ne sont pas équivalentes : si on considère la suite de polynômes (P_n) définis par $P_n = 1 + X + \dots + X^n$, on a $N_2(P_n) = n+1$ et $N_1(P_n) = 1$, donc la suite (P_n) est bornée pour la norme N_1 mais ne l'est pas pour N_2 ...
- Comparaison de N_3 et N_2 :
Si $P = \sum a_i X^i$, alors, pour tout $t \in [0;1]$, $|P(t)| \leq \sum |a_i| t^i \leq \sum |a_i|$, donc $N_3(P) \leq N_2(P)$.
Pour $P_n = (1-X)^n$, $N_2(P_n) = \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} = 2^n$, et $N_3(P_n) = 1$, donc N_2 et N_3 ne sont pas équivalentes (même argument qu'auparavant).
- Comparaison de N_3 et N_1 :
Pour $P_n = 1 + X + \dots + X^n$, $N_1(P_n) = 1$ et $N_3(P_n) = n+1$ (le sup est obtenu pour $t = 1$), donc le rapport N_3/N_1 n'est pas borné sur $\mathbb{R}[X] \setminus \{0\}$.
Soit T_n le n -ième polynôme de Tchebychev. On a $T_n(\cos \theta) = \cos(n\theta)$, donc $N_3(T_n) = 1$. On sait aussi que, pour $n \geq 1$, on a la relation de récurrence $T_{n+1} = 2X T_n - T_{n-1}$, ce qui permet de démontrer que le coefficient dominant de T_n est 2^{n-1} pour $n \geq 1$, donc $N_1(T_n) \geq 2^{n-1}$. Le rapport N_1/N_3 n'est donc pas borné sur $\mathbb{R}[X] \setminus \{0\}$.

Exercice 10: (★★★)

Dans $E = \mathcal{C}^2([0;1], \mathbb{R})$, on pose, pour $f \in E$:

$$N_1(f) = \sup_{t \in [0;1]} |f(t)|, \quad N_2(f) = |f(0)| + \sup_{t \in [0;1]} |f'(t)| \quad \text{et} \quad N_3(f) = |f(0)| + |f'(0)| + \sup_{t \in [0;1]} |f''(t)|.$$

Montrer que ce sont des normes sur E et les comparer.

 *Solution:*

- Normes
 N_1 est la norme $\|\cdot\|_\infty$ sur $[0;1]$ donc c'est une norme d'après le cours.
Pour démontrer que N_2 est une norme, remarquer que $N_2(f) = |f(0)| + N_1(f')$, cela permet de vérifier plus facilement les propriétés d'une norme (je ne détaille pas, il suffit de vérifier la définition).
De même remarquer que $N_3(f) = |f(0)| + N_2(f')$.
- Comparaison

- Soit $f \in E$. Pour tout $t \in [0; 1]$ on a :

$$f(t)f(0) = \int_0^t f(u) \, du,$$

donc

$$\begin{aligned} |f(t)| &\leq |f(0)| + \left| \int_0^t f(u) \, du \right| \leq |f(0)| + \int_0^t |f(u)| \, du \leq |f(0)| + \int_0^1 |f(u)| \, du \\ &\leq |f(0)| + \int_0^1 N_1(f) \, du = |f(0)| + N_1(f) = N_2(f), \end{aligned}$$

donc $N_1(f) \leq N_2(f)$.

Cependant N_1 et N_2 ne sont pas équivalentes comme le montre l'exemple de la suite de fonctions (f_n) avec $f_n(t) = t^n$: cette suite est bornée pour N_1 et ne l'est pas pour N_2 .

- On a donc aussi pour toute $f \in E$ $N_1(f') \leq N_2(f')$ d'où $N_2(f) \leq N_3(f)$. Le même exemple que ci-dessus montre que N_2 et N_3 ne sont pas équivalentes puisque $\frac{N_3(f_n)}{N_2(f_n)} \sim n \xrightarrow{n \rightarrow \infty} +\infty$.

Exercice 11: (★★)

Dans $\mathbb{R}[X]$ on pose, si $P = \sum_{k=0}^{+\infty} a_k X^k$ (où les a_k sont nuls à partir d'un certain rang) :

$$N_\infty(P) = \max_{k \in \mathbb{N}} |a_k| \quad \text{et} \quad N(P) = \sum_{k=0}^{+\infty} \frac{|a_k|}{2^k}.$$

Montrer qu'il s'agit de normes sur $\mathbb{R}[X]$ et les comparer.

 *Solution:*

- Montrer qu'il s'agit de normes ne devrait pas poser de problème...
- Puisque la série géométrique $\sum_k \frac{1}{2^k}$ converge, on a :

$$\forall P \in \mathbb{R}[X], \quad N(P) \leq N_\infty(P) \sum_{k=0}^{+\infty} \frac{1}{2^k} = \frac{1}{2} N_\infty(P).$$

- Cependant les deux normes ne sont pas équivalentes. En effet, si l'on considère pour tout $n \in \mathbb{N}$ le polynôme $P_n = X^n$, on a $N_\infty(P_n) = 1$ et $N(P_n) = \frac{1}{2^n}$, donc la suite (P_n) tend vers 0 au sens de la norme N mais pas au sens de la norme N_∞ .

Exercice 12: (★★★)

On note L le $\mathbb{R}$ -espace vectoriel des applications lipschitziennes de $[0; 1]$ dans $\mathbb{R}$, et E le $\mathbb{R}$ -espace vectoriel $\mathcal{C}^1([0; 1], \mathbb{R})$.

1. Dire pourquoi E est un sous-espace vectoriel de L .
2. Montrer que l'application $N : L \rightarrow \mathbb{R}$ définie par

$$\forall f \in L, \quad N(f) = |f(0)| + \sup_{\substack{(x,y) \in [0;1]^2 \\ x \neq y}} \frac{|f(x) - f(y)|}{|x - y|}$$

est une norme sur L , et qu'elle n'est pas équivalente à la norme $\| \cdot \|_\infty$.

3. Montrer que $N_1 : E \rightarrow \mathbb{R}$ définie par :

$$\forall f \in E, \quad N_1(f) = |f(0)| + \sup_{t \in [0;1]} |f'(t)|$$

est une norme sur E et qu'elle coïncide avec N sur E .

 *Solution:*

1. D'après l'inégalité des accroissements finis, si f est de classe $\mathcal{C}^1$ sur $[0; 1]$, f' est bornée (car continue sur un segment) et l'on a

$$\forall (x, y) \in [0; 1]^2, \quad |f(x) - f(y)| \leq \|f'\|_\infty |x - y|$$

donc f est lipschitzienne.

Ainsi $E \subset L$ et le fait qu'il s'agisse aussi d'un espace vectoriel est connu.

2. • Il ne faut pas oublier de vérifier que la définition de N a un sens! Cela découle du fait que, si f est lipschitzienne, le rapport $\frac{|f(x) - f(y)|}{|x - y|}$ est majorée, d'où l'existence de la borne supérieure.
- De plus, N est évidemment à valeurs réelles positives.
- *Séparation* : Si $N(f) = 0$ alors $f(0) = 0$ et $f(x) = f(y)$ pour tous $x, y \in [0; 1]$ tels que $x \neq y$, donc $f = 0$.
 - *Inégalité triangulaire* : Soient $f, g \in L$. Alors pour tous $x, y \in [0; 1]$

$$|(f+g)(x) - (f+g)(y)| \leq |f(x) - f(y)| + |g(x) - g(y)|$$

et il est facile d'en déduire $N(f+g) \leq N(f) + N(g)$.

- *Homogénéité* : facile
- *Comparaison*

Soit $f \in L$. Pour tout $x \in]0; 1]$ on a $|f(x)| \leq |f(0)| + |f(x) - f(0)| \leq |f(0)| + \frac{|f(x) - f(0)|}{|x - 0|} \leq N(f)$ donc $\|f\|_\infty \leq N(f)$.

Cependant N et $\|\cdot\|_\infty$ ne sont pas équivalentes : si $f_n : x \mapsto x^n$ pour $n \in \mathbb{N}^*$, on a $\|f_n\|_\infty = 1$ et $N(f_n) = \|f'_n\|_\infty = n$, ce qui montre que le rapport $\frac{N}{\|\cdot\|_\infty}$ n'est pas borné.

Un peu de topologie (ex. 13 à 17)

Exercice 13: (★★)

Soit E un espace vectoriel normé.

- a) Soient $a, a' \in E$ et $r, r' > 0$. Montrer que $B(a, r) + B(a', r') = B(a + a', r + r')$.
- b) Soit $a \in E$, $r > 0$ et $\lambda \neq 0$. Montrer que $\lambda B(a, r) = B(\lambda a, |\lambda| r)$.

 *Solution:*

- a) – Soit $x \in B(a + a', r + r')$. On considère alors le vecteur y tel que $y - (a + a') = \frac{r}{r + r'}(x - (a + a'))$ (faire un dessin pour comprendre «d'où ça sort»). On a donc $\|y - (a + a')\| < r$, donc en posant $u = y - a'$, $u \in B(a, r)$, puis, en posant $v = x - u$, $\|v - a'\| = \|x - y\| = \frac{r'}{r + r'} \|x - (a + a')\| < r'$, donc $v \in B(a', r')$. Ainsi, $x = u + v$ avec $u \in B(a, r)$ et $v \in B(a', r')$, soit $x \in B(a, r) + B(a', r')$, ce qui démontre l'inclusion $B(a + a', r + r') \subset B(a, r) + B(a', r')$.
- Montrons l'inclusion réciproque. Soit $x \in B(a, r) + B(a', r')$. Alors $x = u + v$ avec $u \in B(a, r)$ et $v \in B(a', r')$, donc $\|x - (a + a')\| = \|(u - a) + (v - a')\| \leq \|u - a\| + \|v - a'\| < r + r'$, ce qui établit le résultat.
- b) On procède ici encore par double inclusion (facile).

Exercice 14: (★★)

Soit $(E, \|\cdot\|)$ un espace vectoriel normé, $a, a' \in E$ et $r, r' \in \mathbb{R}_+$. Montrer que :

$$\mathcal{B}_f(a, r) \subset \mathcal{B}_f(a', r') \iff \|a' - a\| \leq r' - r \quad \text{et} \quad \mathcal{B}(a, r) \subset \mathcal{B}(a', r') \iff \|a' - a\| \leq r' - r$$

 *Solution:*

- Faisons déjà la démonstration pour les boules fermées.
- $\Rightarrow$ Supposons $\mathcal{B}_f(a, r) \subset \mathcal{B}_f(a', r')$. Soit alors $b = a + \frac{r}{\|a - a'\|}(a - a')$. On a $\|b - a\| = r$, donc $b \in \mathcal{B}_f(a, r)$ et par suite $b \in \mathcal{B}_f(a', r')$. On a donc $\|b - a'\| \leq r'$. Or $b - a' = \left(1 + \frac{r}{\|a - a'\|}\right)(a - a')$ donc $\left(1 + \frac{r}{\|a - a'\|}\right)\|a - a'\| \leq r'$ ce qui donne bien $\|a' - a\| \leq r' - r$. (Rem : faire un dessin pour interpréter géométriquement le choix de b ...).
- $\Leftarrow$ Supposons $\|a' - a\| \leq r' - r$. Soit alors $x \in \mathcal{B}_f(a, r)$, i.e $\|x - a\| \leq r$. On a alors $\|x - a'\| = \|x - a + a - a'\| \leq \|x - a\| + \|a - a'\| \leq r + r' - r = r'$, ce qui prouve que $x \in \mathcal{B}_f(a', r')$. On a donc bien l'inclusion voulue.
- Cas des boules ouvertes.

- ⇒ Il suffit de remarquer que si $B(a, r) \subset B(a', r')$ alors $B_f(a, r - \varepsilon) \subset B_f(a', r')$ pour $\varepsilon > 0$ assez petit, puis d'appliquer le résultat précédent et de faire tendre ε vers 0.
- ⇐ Même démo que ci dessus avec $<$ à la place de $\leq$ là où il faut.

Exercice 15: (★★)

Montrer que l'ensemble $A = \{(\lambda_1, \dots, \lambda_n) \in \mathbb{R}^n \text{ tq } \lambda_i \neq \lambda_j \text{ pour tout } i \neq j\}$ est un ouvert de $\mathbb{R}^n$.

 *Solution:*

On utilise la norme $\|\cdot\|_\infty$ dans $\mathbb{R}^n$.

Soit $x \in A$, on pose $r = \frac{1}{2} \max_{i \neq j} |x_i - x_j|$, et si $y \in B(x, r)$, on a

$$\begin{aligned} |y_i - y_j| &= |y_i - x_i + x_i - x_j + x_j - y_j| \\ &\geq \left| |x_i - x_j| - |y_i - x_i - (y_j - x_j)| \right| > 0 \end{aligned}$$

car le premier terme est $\geq 2r$ et le second $< 2r$. Donc $y \in A$, i.e $B(x, r) \subset A$.

Exercice 16: (★★)

Soit F un sous-espace vectoriel d'un espace vectoriel normé E .

a) Montrer que son adhérence $\bar{F}$ est un sous-espace vectoriel de E .

b) Montrer que, si $\overset{\circ}{F} \neq \emptyset$, alors $F = E$.

 *Solution:*

a) $F \subset \bar{F}$ donc $\bar{F} \neq \emptyset$.

Si x et y appartiennent à $\bar{F}$, il existe deux suites d'éléments de F , (x_n) et (y_n) telles que $\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = x$ et $\lim_{n \rightarrow \infty} y_n = y$. Alors, pour tout $\lambda \in \mathbb{K}$, la suite $(\lambda x_n + y_n)$ est une suite d'éléments de F qui converge vers $\lambda x + y$, ce qui prouve que $\lambda x + y \in \bar{F}$.

b) Soit $a \in \overset{\circ}{F}$. Il existe donc $r > 0$ tel que $B(a, r) \subset F$. Si x est un vecteur quelconque de E , différent de a , alors le vecteur $a + \frac{r}{2\|x-a\|}(x-a)$ appartient à $B(a, r)$ donc à F . Par suite, $x \in F$ puisque F est un sous-espace vectoriel, ce qui prouve $F = E$.

Exercice 17: (★★)

Soit A une partie convexe d'un espace vectoriel normé E . Montrer que $\overset{\circ}{A}$ et $\bar{A}$ sont des parties convexes de E .

 *Solution:*

– Soient $x, y \in \bar{A}$, et $\lambda \in [0; 1]$. Alors il existe des suites (x_n) et (y_n) d'éléments de A telles que $x = \lim x_n$ et $y = \lim y_n$. Par convexité de A , les éléments $\lambda x_n + (1 - \lambda)y_n$ appartiennent à A , et, d'après les théorèmes usuels, $\lim(\lambda x_n + (1 - \lambda)y_n) = \lambda x + (1 - \lambda)y$, donc $\lambda x + (1 - \lambda)y \in \bar{A}$.
Donc $\bar{A}$ est convexe.

– Soient $x, y \in \overset{\circ}{A}$, et $\lambda \in [0; 1]$. On pose $z = \lambda x + (1 - \lambda)y$. Montrons que $z \in \overset{\circ}{A}$:

Il existe une boule ouverte $\mathcal{B}(x, r) \subset A$ et une boule ouverte $\mathcal{B}(y, r') \subset A$. Soit $\rho = \min(r, r')$. On montre que $\mathcal{B}(z, \rho) \subset A$, ce qui prouvera que $z \in \overset{\circ}{A}$ et $\overset{\circ}{A}$ est convexe :

Soit $u \in \mathcal{B}(z, \rho)$. Posons $x' = x + (u - z)$ et $y' = y + (u - z)$ (faire un dessin pour comprendre...). Alors $\|x' - x\| = \|u - z\| < \rho \leq r$ donc $x' \in \mathcal{B}(x, r)$ et, de même, $y \in \mathcal{B}(y, r')$. Enfin, $u = \lambda x' + (1 - \lambda)y'$ donc par convexité, $u \in A$ et finalement $\mathcal{B}((\cdot), z, \rho) \subset A$, cqfd.

Suites dans un espace vectoriel normé (ex. 18 à 23)

Exercice 18: (★★)

Soit E un espace vectoriel normé de dimension finie, et $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$, $(v_n)_{n \in \mathbb{N}}$ deux suites de vecteurs telles que :

$$\forall n \in \mathbb{N}, u_n \text{ est colinéaire à } v_n, \quad \lim_{n \rightarrow +\infty} u_n = \ell_u, \quad \lim_{n \rightarrow +\infty} v_n = \ell_v.$$

Montrer que les vecteurs ℓ_u et ℓ_v sont colinéaires.

(on pourra raisonner par l'absurde et compléter alors (ℓ_u, ℓ_v) en une base de E .)

 Solution:

Le résultat étant évident si ℓ_u ou ℓ_v est le vecteur nul, on peut se limiter au cas où ils ne sont pas nuls. Dans ce cas, en revenant à la définition de la limite, on obtient que $u_n \neq 0$ et $v_n \neq 0$ à partir d'un certain rang.

Bref, quitte à décaler les indices, on peut supposer les u_n et v_n non nuls, de sorte que leur colinéarité s'écrit simplement : $\forall n \in \mathbb{N}, \exists k_n \in \mathbb{K} \text{ tq } v_n = k_n u_n$.

Si ℓ_u et ℓ_v n'étaient pas colinéaires, il existerait, d'après le théorème de la base incomplète, des vecteurs $e_3, \dots, e_p$ tels que $(\ell_u, \ell_v, e_3, \dots, e_p)$ soit une base de E . On pourrait donc écrire, pour tout n :

$$u_n = \alpha_n \ell_u + \beta_n \ell_v + \sum_{i=3}^p \lambda_{i,n} e_i \quad \text{et} \quad v_n = \alpha'_n \ell_u + \beta'_n \ell_v + \sum_{i=3}^p \mu_{i,n} e_i$$

D'après les résultats du cours, puisque $\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n = \ell_u$ on a $\lim_{n \rightarrow +\infty} \alpha_n = 1$ et $\lim_{n \rightarrow +\infty} \beta_n = 0$ et de même $\lim_{n \rightarrow +\infty} \alpha'_n = 0$ et $\lim_{n \rightarrow +\infty} \beta'_n = 1$.

Mais la relation $v_n = k_n u_n$ implique $\alpha'_n = k_n \alpha_n$ donc on doit avoir $\lim_{n \rightarrow +\infty} k_n = 0$, mais aussi $\beta'_n = k_n \beta_n$, d'où une contradiction !

Exercice 19: (★★)

Soient $A, P \in \mathcal{M}_p(\mathbb{C})$ telles que : $\lim_{n \rightarrow +\infty} A^n = P$. Montrer que $AP = PA = P$ et que $P^2 = P$.

 Solution:

- Tout l'exercice repose sur le résultat suivant, vu en cours :

Si (A_n) et (B_n) sont deux suites de matrices qui convergent resp. vers des matrices A et B , alors la suite $(A_n B_n)$ converge vers AB .

(cela découle de la continuité de l'application « produit matriciel » : $(A, B) \mapsto AB$, qui est bilinéaire sur des espaces vectoriels de dimensions finies).

- Le résultat précédent donne alors $\lim_{n \rightarrow +\infty} A^{n+1} = \lim_{n \rightarrow +\infty} (A^n A) = (\lim_{n \rightarrow +\infty} A^n) A = PA$ d'où $P = PA$ puisque (A^{n+1}) étant une suite extraite de (A^n) converge aussi vers P .

On démontre de même $P = AP$.

Enfin, on a de même $\lim_{n \rightarrow +\infty} (A^{2n}) = \lim_{n \rightarrow +\infty} (A^n \cdot A^n) = (\lim_{n \rightarrow +\infty} A^n)(\lim_{n \rightarrow +\infty} A^n) = P^2$ et aussi $\lim_{n \rightarrow +\infty} (A^{2n}) = P$ puisque (A^{2n}) est une suite extraite de (A^n) . Donc $P^2 = P$.

- Une autre solution possible consiste à utiliser la continuité des applications $M \mapsto AM$, $M \mapsto MA$ et $M \mapsto M^2$, de $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ dans $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$.

Pour démontrer que ces applications sont continues, on peut dire à chaque fois que les fonctions coordonnées (c'est-à-dire les composantes de la matrice image) sont des fonctions polynomiales en les coordonnées de M donc elles sont continues. Pour les 2 premières applications, on peut dire aussi qu'il s'agit d'applications linéaires sur un espace vectoriel de dimension finie.

Exercice 20: (★★)

Soit $B \in \mathcal{M}_p(\mathbb{R})$ une matrice antisymétrique, telle que la suite $(B^n)_{n \in \mathbb{N}}$ converge vers une matrice C . Que peut-on dire de C ?

 Solution:

Tout l'exercice repose sur le résultat suivant :

Si (A_n) est une suite de matrices qui converge vers une matrice A et B , alors la suite $({}^t A_n)$ converge vers ${}^t A$.

Ce résultat est facile à démontrer en considérant les coefficients, ou en utilisant la continuité de l'application $M \mapsto {}^t M$, qui est linéaire sur un espace vectoriel de dimension finie.

Ici, si la suite $(B^n)_{n \in \mathbb{N}}$ converge vers une matrice C , la suite $({}^t B^n)_{n \in \mathbb{N}}$ converge donc vers ${}^t C$. Donc les deux suites extraites $({}^t B^{2n})_{n \in \mathbb{N}}$ et $({}^t B^{2n+1})_{n \in \mathbb{N}}$ convergent vers ${}^t C$.

Mais ${}^t B^{2n} = ({}^t B)^{2n} = (-B)^{2n} = B^{2n} \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} C$ et ${}^t B^{2n+1} = ({}^t B)^{2n+1} = (-B)^{2n+1} = -B^{2n+1} \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} -C$.

Donc ${}^t C = C = -C$ et finalement C est la matrice nulle.

Exercice 21: (★★)

Soient $A, B \in \mathcal{M}_p(\mathbb{C})$.

- Montrer que si la suite $((AB)^n)$ tend vers 0, il en est de même de la suite $((BA)^n)$.
- Montrer que, si A et B commutent, si la suite (A^n) tend vers P et la suite (B^n) vers Q , alors P et Q commutent.
- Montrer que si (A_n) est une suite de matrices inversibles qui converge vers A et si la suite (A_n^{-1}) converge vers B , alors A et B sont inversibles et inverses l'une de l'autre.
- Est-il possible de trouver une suite (A_n) de matrices inversibles qui converge et telle que la suite (A_n^{-1}) diverge?

 **Solution:**

- Tout l'exercice repose sur le résultat suivant, démontré lors d'un exercice précédent :
Si (A_n) et (B_n) sont deux suites de matrices qui convergent resp. vers des matrices A et B , alors la suite $(A_n B_n)$ converge vers AB .
- Pour $n \geq 1$ on a $(BA)^n = \underbrace{BABABA \dots BA}_{n \text{ fois } BA} = B(AB)^{n-1}A$.
Donc si la suite $(AB)^n$ tend vers 0 (matrice nulle), il en est de même du produit $B(AB)^{n-1}A$ en vertu de la propriété rappelée au début.
- Si A et B commutent il en est de même de toutes leurs puissances (propriété à connaître!, vue en classe), donc A^n et B^n commutent et il suffit de passer à la limite, toujours à l'aide de la propriété rappelée au début.
- Là encore on passe à la limite dans la relation $A_n A_n^{-1} = I_p$.
- Oui. Considérer $A_n = \frac{1}{n} I_p$.

Exercice 22: (★★)

Soit $(E, \|\cdot\|)$ un espace vectoriel normé de dimension finie, et u un endomorphisme de E tel que :

$$\forall x \in E, \|u(x)\| \leq \|x\|.$$

Pour tout $n \in \mathbb{N}$ on pose : $v_n = \frac{1}{n+1} \sum_{k=0}^n u^k$.

- Simplifier $v_n \circ (u - \text{Id}_E)$.
- Montrer que $A = \text{Ker}(u - \text{Id}_E) \oplus \text{Im}(u - \text{Id}_E)$.
- En déduire que, pour tout $x \in E$: $\lim_{n \rightarrow +\infty} v_n(x) = p(x)$, où p est la projection sur $\text{Ker}(u - \text{Id}_E)$ parallèlement à $\text{Im}(u - \text{Id}_E)$.
- Soit $\mathcal{B} = (e_1, \dots, e_n)$ une base de E ; on note, pour $x = \sum_{i=1}^n x_i e_i$, $\|x\|_\infty = \max_i |x_i|$, puis on définit :

$$\forall f \in \mathcal{L}(E), N(f) = \sum_{i=1}^n \|f(e_i)\|_\infty.$$

Montrer que l'on définit ainsi une norme sur $\mathcal{L}(E)$, et que la suite $(v_n)_{n \in \mathbb{N}}$ converge vers p au sens de cette norme.

 **Solution:**

- Il suffit de développer :

$$v_n \circ (u - \text{Id}_E) = \frac{1}{n+1} \left(\sum_{k=0}^n u^{k+1} - \sum_{k=0}^n u^k \right) = \frac{1}{n+1} (u^{n+1} - \text{Id}_E)$$

par télescope.

- b) Le théorème du rang donne $\dim \text{Ker}(u - \text{Id}_E) + \dim \text{Im}(u - \text{Id}_E) = \dim E$, donc pour montrer que ces deux sous-espaces vectoriels sont supplémentaires, il suffit de démontrer que leur intersection est réduite à $\{0\}$.

Soit donc $y \in \text{Ker}(u - \text{Id}_E) \cap \text{Im}(u - \text{Id}_E)$. Alors $u(y) = y$ et il existe $x \in E$ tel que $y = u(x) - x$.

On a alors, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $v_n(y) = \frac{1}{n+1}(u^{n+1}(x) - x)$ d'où $\|v_n(y)\| \leq \frac{\|u^{n+1}(x)\| + \|x\|}{n+1}$.

Or compte tenu de l'hypothèse, il est facile de vérifier par récurrence que, pour tout $x \in E$ et tout $k \in \mathbb{N}$ on a $\|u^k(x)\| \leq \|x\|$ donc ici on en déduit $\|v_n(y)\| \leq \frac{2\|x\|}{n+1}$ donc $\lim_{n \rightarrow +\infty} \|v_n(y)\| = 0$ c'est-à-dire $\lim_{n \rightarrow +\infty} v_n(x) = 0$.

Or $v_n(x) = \frac{1}{n+1} \sum_{k=0}^n u^k(x) = \frac{1}{n+1} \sum_{k=0}^n x = x$ (puisque $u(x) = x$) donc on en tire $x = 0$ puis le résultat annoncé.

- c) Soit $x \in E$. On écrit $x = y + z$ avec $y \in \text{Ker}(u - \text{Id}_E)$ et $z \in \text{Im}(u - \text{Id}_E)$.

$u(y) = y$ donc comme précédemment $v_n(y) = y$ pour tout $n \in \mathbb{N}$.

$z \in \text{Im}(u - \text{Id}_E)$ donc on montre comme précédemment que $\lim_{n \rightarrow +\infty} v_n(z) = 0$.

Finalement, $v_n(x) = v_n(y) + v_n(z) \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} y$ et $y = p(x)$, ce qui est le résultat voulu.

- d) N est une norme sur $\mathcal{L}(E)$: démonstration facile (il faut juste noter que, si $N(f) = 0$, alors f s'annule sur les vecteurs d'une base donc c'est l'endomorphisme nul).

On a ensuite

$$N(v_n - p) = \sum_{i=1}^n \|(v_n - p)(e_i)\|_{\infty}.$$

et puisque, pour tout $i \in \llbracket 1; n \rrbracket$, $v_n(e_i) \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} f(e_i)$ d'après la question précédente (a priori au sens de la norme initiale $\|\cdot\|$ sur E donc aussi au sens de la norme $\|\cdot\|_{\infty}$ puisqu'elles sont toutes équivalentes), on a bien $N(v_n - p) \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} 0$.

Exercice 23: Méthode de Jacobi (★★★)

Soit $A = (a_{ij}) \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$, à diagonale strictement dominante, c'est-à-dire :

$$\forall i \in \llbracket 1; n \rrbracket, |a_{ii}| > \sum_{j \neq i} |a_{ij}|.$$

On rappelle que la matrice A est inversible. En conséquence, pour tout $B \in \mathbb{R}^n$, l'équation $AX = B$ a une solution unique $X \in \mathbb{R}^n$.

On note $D = \text{diag}(a_{11}, a_{22}, \dots, a_{nn})$. Soit $X_0 \in \mathbb{R}^n$, et $(X_p)_{p \in \mathbb{N}}$ la suite de $\mathbb{R}^n$ définie par récurrence par :

$$\forall p \in \mathbb{N}, DX_{p+1} = (D - A)X_p + B.$$

Prouver que la suite (X_p) converge vers la solution de l'équation $AX = B$.

 **Solution:**

Notons $L \in \mathbb{R}^n$ (en confondant comme d'habitude $\mathbb{R}^n$ et $\mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R})$) la solution de l'équation $AX = B$. On a alors :

$$\forall p \in \mathbb{N}, D(X_{p+1} - L) = (D - A)X_p + B - DL = (D - A)(X_p - L) - AL + B = (D - A)(X_p - L)$$

d'où

$$X_{p+1} - L = D^{-1}(D - A)(X_p - L) = (I_p - D^{-1}A)(X_p - L)$$

(notons que la matrice D est bien inversible puisque que les a_{ii} sont forcément non nuls).

On munit alors $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ de la norme N définie par

$$\forall A = (a_{ij})_{1 \leq i, j \leq n} \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R}), N(A) = \max_{i \in \llbracket 1; n \rrbracket} \sum_{j=1}^n |a_{ij}|$$

On a vu dans l'exercice ?? que N est bien une norme et que pour toute $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ et tout $X \in \mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R})$ on a $\|AX\|_{\infty} \leq N(A) \|X\|_{\infty}$, donc :

$$\forall p \in \mathbb{N}, \|X_{p+1} - L\|_{\infty} \leq N(I_p - D^{-1}A) \|X_p - L\|_{\infty}$$

et par récurrence immédiate :

$$\forall p \in \mathbb{N}, \|X_p - L\|_{\infty} \leq [N(I_p - D^{-1}A)]^p \|X_0 - L\|_{\infty}.$$

Compte tenu de la définition de N , et puisque multiplier une matrice à gauche par D^{-1} revient à multiplier, pour tout i , sa i -ème ligne par $\frac{1}{a_{ii}}$, il est facile de voir que, A étant à diagonale strictement dominante, on a $N(I_p - D^{-1}A) < 1$.

Il en résulte : $\lim_{p \rightarrow +\infty} [N(I_p - D^{-1}A)]^p = 0$ et finalement : $\lim_{p \rightarrow +\infty} \|X_p - L\|_\infty = 0$ c'est-à-dire que la suite (X_p) converge vers L .

Limites et continuité dans un espace vectoriel normé (ex. 24 à 30)

Exercice 24: (★)

Étudier les limites en $(0,0)$ des fonctions suivantes :

$$\begin{array}{lll} \text{a) } f(x, y) = \frac{xy}{x^2 + y^2} & \text{b) } f(x, y) = \frac{x^2 y}{x^2 + y^2} & \text{c) } f(x, y) = \frac{x^3}{y} \\ \text{d) } f(x, y) = \frac{x^2 + y^2}{|x| + |y|} & \text{e) } f(x, y) = \frac{\sin xy}{\sqrt{x^2 + y^2}} \end{array}$$

 Solution:

- a) Pas de limite (fait en classe) : en effet, pour tout réel λ $\lim_{x \rightarrow 0} f(x, \lambda x) = \frac{\lambda}{1 + \lambda^2}$, alors que si $\lim_{(x,y) \rightarrow (0,0)} f(x, y) = \ell$ existait, on devrait avoir, d'après le théorème sur la limite d'une composée, $\lim_{x \rightarrow 0} f(x, \lambda x) = \ell$.
- b) En posant $x = r \cos \theta$ et $y = r \sin \theta$ on a $f(x, y) = r \cos^2 \theta \sin \theta$ donc $|f(x, y)| \leq r$.
Ainsi, $|f(x, y)| \leq \|(x, y)\|_2$ ce qui signifie que $\lim_{(x,y) \rightarrow (0,0)} f(x, y) = 0$.
- c) On a : $f(0, \frac{1}{n}) \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} 0$ avec $(0, \frac{1}{n}) \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} (0, 0)$.
Et aussi : $f(\frac{1}{n}, \frac{1}{n^3}) \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} 1$ avec $(\frac{1}{n}, \frac{1}{n^3}) \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} (0, 0)$.
Ces deux limites étant distinctes, la fonction f ne peut admettre de limite en $(0, 0)$.
- d) $0 \leq f(x, y) \leq \frac{x^2 + 2|x||y| + y^2}{|x| + |y|} = |x| + |y| = \|(x, y)\|_1 \xrightarrow{(x,y) \rightarrow (0,0)} 0$.
Par encadement, on conclut que f est de limite nulle.
- e) $|f(x, y)| \leq \frac{|xy|}{\sqrt{x^2 + y^2}} = r |\sin \theta \cos \theta| \xrightarrow{(x,y) \rightarrow (0,0)} 0$

Exercice 25: (★★)

Soit $f: \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ définie par

$$f(x, y) = \begin{cases} \frac{1}{2}x^2 + y^2 - 1 & \text{si } x^2 + y^2 > 1 \\ -\frac{1}{2}x^2 & \text{sinon.} \end{cases}$$

Montrer que f est continue.

 Solution:

Notons

$$D = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid x^2 + y^2 > 1\} \quad \text{et} \quad E = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid x^2 + y^2 < 1\}.$$

f est continue en chaque point de D et E .

Soit (x_0, y_0) tel que $x_0^2 + y_0^2 = 1$ (à la jonction de D et E).

Quand $(x, y) \rightarrow (x_0, y_0)$ avec $(x, y) \in D$, on a :

$$f(x, y) \rightarrow \frac{1}{2}x_0^2 + y_0^2 - 1 = -\frac{1}{2}x_0^2 = f(x_0, y_0).$$

Quand $(x, y) \rightarrow (x_0, y_0)$ avec $(x, y) \in E$, on a :

$$f(x, y) \rightarrow -\frac{1}{2}x_0^2 = f(x_0, y_0).$$

Finalement, d'après le résultat du cours rappelé dans l'exercice ??, $\lim_{(x,y) \rightarrow (x_0,y_0)} f(x, y) = f(x_0, y_0)$ et donc f est continue en (x_0, y_0) et finalement sur $\mathbb{R}^2$.

Exercice 26: (★★)

Soient $g: \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ continue et $\mathcal{C}$ un cercle de centre O et de rayon $R > 0$.

- Montrer qu'il existe deux points A et B de $\mathcal{C}$ diamétralement opposés tels que $g(A) = g(B)$.
- Montrer qu'il existe deux points C et D de $\mathcal{C}$, se déduisant l'un de l'autre par un quart de tour tels que $g(C) = g(D)$.

 **Solution:**

- Soit $f: t \in \mathbb{R} \mapsto g(R \cos t, R \sin t)$ puis $h: t \mapsto f(t + \pi) - f(t)$. h est continue et $h(0) + h(\pi) = f(2\pi) - f(0) = 0$ donc d'après le théorème des valeurs intermédiaires, h s'annule.
- Soit maintenant $h: t \in \mathbb{R} \mapsto f(t + \frac{\pi}{2}) - f(t)$. h est continue et $h(0) + h(\frac{\pi}{2}) + h(\pi) + h(3\frac{\pi}{2}) = 0$ donc h s'annule (car sinon, d'après le théorème des valeurs intermédiaires elle resterait < 0 ou > 0 sur $\mathbb{R}$).

Exercice 27: (★★)

Soit f une application continue de $\mathbb{R}^n$ dans $\mathbb{R}$ telle que : $\lim_{\|x\| \rightarrow +\infty} f(x) = +\infty$.

Montrer que f admet un minimum.

 **Solution:**

Par définition de la limite on a :

$$\exists M \in \mathbb{R}_+, \forall x \in E, \|x\| \geq M \Rightarrow f(x) \geq f(0).$$

f étant continue sur $B_f(0, M)$ qui est un fermé borné y admet un minimum m , qui est atteint en un point de $B_f(0, M)$.

m est évidemment aussi un minimum global de f sur $\mathbb{R}^n$.

Exercice 28: (★)

Soit $(E, \|\cdot\|)$ un espace vectoriel normé et f l'application définie sur E par :

$$\forall x \in E, f(x) = \frac{x}{1 + \|x\|^2}.$$

- Montrer que f est continue de E dans E pour la norme $\|\cdot\|$.
- Montrer que : $f(E) = B_f(0, \frac{1}{2})$.

 **Solution:**

- $x \mapsto \|x\|$ est continue car 1-lipschitzienne, puis théorèmes usuels.

- Pour tout $x \in E$ on a $\|f(x)\| = \frac{\|x\|}{1 + \|x\|^2} = \varphi(\|x\|)$ où l'on a posé pour tout $t \in \mathbb{R}_+$ $\varphi(t) = \frac{t}{1+t^2}$.

Une étude rapide permet de montrer que φ est surjective de $\mathbb{R}_+$ sur $[0; \frac{1}{2}]$ d'où le résultat.

Exercice 29: (★)

Soit E un espace vectoriel normé, et $a \in E$, non nul.

On note f l'application de E dans $\mathbb{R}$ définie par :

$$\forall x \in E, f(x) = \begin{cases} \|x - a\| & \text{si } \|x\| \leq \|a\| \\ 0 & \text{sinon.} \end{cases}$$

- Montrer que f est continue en a .
- Montrer que f n'est pas continue en $-a$ (considérer par exemple la suite (x_n) donnée par $x_n = -\left(1 + \frac{1}{n}\right)a$).

Exercice 30: (★)

On munit $\mathbb{R}^2$ de la norme $\| \cdot \|_1$ et on considère l'application f définie sur $\mathbb{R}^2$ par :

$$\forall (x, y) \in \mathbb{R}^2, f(x, y) = (ay, bx).$$

Montrer que f est lipschitzienne.

 **Solution:**

Soient (x, y) et (x', y') dans $\mathbb{R}^2$. Alors

$$f(x, y) - f(x', y') = (a(y - y'), b(x - x'))$$

donc

$$\|f(x, y) - f(x', y')\| = |a(y - y')| + |b(x - x')| \leq \max(|a|, |b|) \|(x, y) - (x', y')\|_1.$$

f est donc lipschitzienne de rapport $\max(|a|, |b|)$.

Applications linéaires continues. (ex. 31 à 34)**Exercice 31: (★★)**

Soient E et F deux espaces vectoriels normés et $u \in \mathcal{L}(E, F)$. Démontrer l'équivalence :

$$u \text{ continue} \iff \begin{cases} \text{pour toute suite } (x_n) \text{ d'éléments de } E \text{ qui converge vers } 0_E, \\ \text{la suite } (u(x_n)) \text{ est bornée.} \end{cases}$$

 **Solution:**

$\Rightarrow$ Supposons u continue et soit $(x_n) \in E^{\mathbb{N}}$ qui converge vers 0. Alors par continuité la suite $(u(x_n))$ converge vers $u(0) = 0$, donc est bornée.

$\Leftarrow$ Supposons que pour toute suite $(x_n) \in E^{\mathbb{N}}$ qui converge vers 0 la suite $(u(x_n))$ est bornée.

D'après le cours pour montrer que u est continue il suffit de montrer qu'elle l'est en 0. Pour cela, on raisonne par l'absurde, en supposons que u n'est pas continue en 0. Cela s'écrit, par négation de la définition :

$$\exists \varepsilon > 0, \forall \alpha > 0, \exists x \in E \text{ tq } \|x\| \leq \alpha \text{ et } \|u(x)\| \geq \varepsilon.$$

En appliquant cette relation avec $\alpha = \frac{1}{n}$ ($n \in \mathbb{N}^*$) on obtient l'existence d'un $x_n \in E$ tel que $\|x_n\| \leq \frac{1}{n}$ et $\|x_n\| \geq \varepsilon$.

Si l'on considère alors la suite (y_n) définie par $y_n = \sqrt{n} x_n$, alors $\|y_n\| \leq \frac{1}{\sqrt{n}}$ donc (y_n) tend vers 0 mais puisque $\|u(y_n)\| \geq \sqrt{n} \varepsilon$ la suite $(u(y_n))$ n'est pas bornée, d'où la contradiction cherchée.

Exercice 32: (★)

Soit $E = \mathcal{C}([0; 1], \mathbb{R})$, muni de la norme $\| \cdot \|_{\infty}$.

Soit T l'endomorphisme de E qui à toute $f \in E$ associe sa primitive $T(f)$ qui s'annule en 0.

Montrer que T est un endomorphisme continu de E .

 **Solution:**

Il faut déjà remarquer que T est bien un endomorphisme de E : en effet, T est bien à valeurs dans E puisque si f est continue, $T(f)$ est une primitive de f , et T est linéaire par linéarité de l'intégration.

Pour tout $x \in [0; 1]$ on a $T(f)(x) = \int_0^x f(t) dt$ donc :

$$\forall x \in [0; 1], |T(f)(x)| \leq \int_0^x |f(t)| dt \leq \int_0^x \|f\|_{\infty} dt = x \|f\|_{\infty} \leq \|f\|_{\infty},$$

d'où $\|T(f)\|_{\infty} \leq \|f\|_{\infty}$.

On a donc l'existence d'une constante k telle que pour toute $f \in E$ $\|T(f)\|_{\infty} \leq k \|f\|_{\infty}$, ce qui prouve, d'après le théorème du cours sur la caractérisation des applications linéaires continues, que T est continue.

Exercice 33: (★)

On note E l'espace vectoriel des suites réelles bornées muni de la norme $\|\cdot\|_\infty$ définie par :

$$\forall x \in E, \|x\|_\infty = \sup_{n \geq 0} |x_n|.$$

On définit l'opérateur de différence Δ sur E par :

$$\forall x \in E, \Delta(x) = y \quad \text{avec :} \quad \forall n \in \mathbb{N}, y_n = x_{n+1} - x_n.$$

Montrer que Δ est linéaire et continue pour $\|\cdot\|_\infty$

 Solution:

On vérifie facilement que Δ est bien un endomorphisme de E puis que :

$$\forall u \in E, \|\Delta(u)\|_\infty \leq 2\|u\|_\infty.$$

On a donc l'existence d'une constante k telle que, pour toute $u \in E$, $\|\Delta(u)\|_\infty \leq k\|u\|_\infty$, ce qui prouve, d'après le théorème du cours sur la caractérisation des applications linéaires continues, que Δ est continue.

Exercice 34: (★★)

On munit $\mathbb{R}[X]$ de la norme $\|\cdot\|_\infty$ ($\|\sum a_i X^i\|_\infty = \max(|a_i|)$). Étudier la continuité des applications linéaires :

$$\textbf{a)} f_0: P \mapsto P(x_0) \quad (x_0 \in \mathbb{R}) \quad ; \quad \textbf{b)} f_1: P \mapsto P' \quad ; \quad \textbf{c)} f_2: P \mapsto (X-1)P.$$

 Solution:

a) Soit $P = \sum_{k=0}^d a_k X^k$ où $d = \deg(P)$. On a alors, à l'aide de l'inégalité triangulaire :

$$|P(x_0)| \leq \sum_{k=0}^d |a_k| |x_0|^k \leq \left(\sum_{k=0}^d |x_0|^k \right) \|P\|_\infty.$$

On distingue alors plusieurs cas :

– si $|x_0| < 1$, la série de terme général $|x_0|^k$ converge et l'on a, pour tout $d \in \mathbb{N}$:

$$\sum_{k=0}^d |x_0|^k \leq \sum_{k=0}^{+\infty} |x_0|^k = \frac{1}{1-|x_0|}$$

donc il existe bien une constante $K = \frac{1}{1-|x_0|}$ telle que, pour tout $P \in \mathbb{R}[X]$ on ait $|f_0(P)| \leq \|P\|_\infty$, ce qui prouve, d'après le théorème du cours sur la caractérisation des applications linéaires continues, que f_0 est continue.

– si $x_0 \geq 1$, considérons la suite de polynômes $P_n = \frac{1}{n}(1 + X + \dots + X^n)$ pour $n \geq 1$. Alors $\|P_n\|_\infty = \frac{1}{n} \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} 0$, c'est-à-dire que la suite $(P_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$ tend vers 0 au sens de la norme $\|\cdot\|_\infty$, mais

$$P_n(x_0) \geq \sum_{k=1}^n \frac{1}{k}, \text{ et puisque la série harmonique diverge, on a } \lim_{n \rightarrow +\infty} f_0(P_n) = +\infty.$$

Par caractérisation séquentielle, on en déduit que f_0 n'est pas continue.

– si $x_0 \leq -1$, même raisonnement en considérant ici la suite de polynômes $P_n = \frac{1}{n}(1 - X + X^2 - \dots + (-1)^n X^n)$.

En conclusion, f_0 est continue si et seulement si $|x_0| < 1$.

b) Pour montrer que f_1 n'est pas continue, il suffit de considérer la suite de polynômes $(P_n)_{n \in \mathbb{N}}$ définis par $P_n = \frac{1}{n} X^n$. Alors la suite $(P_n)_{n \in \mathbb{N}}$ tend vers 0 au sens de la norme $\|\cdot\|_\infty$, mais la suite $(f_1(P_n))$ ne tend pas vers 0.

c) Pour tout $k \in \mathbb{N}$ notons e_k l'application qui à tout polynôme P de $\mathbb{R}[X]$ associe le polynôme $X^k P$. Il est clair que e_k est un endomorphisme de $\mathbb{R}[X]$ et :

$$\forall P \in \mathbb{R}[X], \|e_k(P)\|_\infty = \|P\|_\infty,$$

ce qui prouve d'après le théorème du cours sur la caractérisation des applications linéaires continues, que e_k est continue.

Puisqu'une combinaison linéaire d'applications continues est continue, si Q est un polynôme fixé, l'application $P \mapsto QP$ est un endomorphisme continu de $\mathbb{R}[X]$ (pour la norme $\|\cdot\|_\infty$), ce qui est un résultat plus général que celui demandé.