

EXERCICES : SUITES NUMÉRIQUES, AVEC CORRIGÉS**Étude de suites réelles** (ex. 1 à 9)**Exercice 1: (★)**

Soit $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ une suite à valeurs dans $\mathbb{Z}$.

Montrer que (u_n) converge si et seulement si (u_n) est stationnaire.

 *Solution:*

Notons $\ell = \lim_{n \rightarrow \infty} u_n$. Par définition de la limite avec $\varepsilon = \frac{1}{2}$: $\exists n_0 \in \mathbb{N}$ tel que $\forall n \geq n_0$, $|u_n - \ell| < \frac{1}{2}$, et comme u_n est entier et qu'il n'y a qu'un entier strictement compris entre $\ell - \frac{1}{2}$ et $\ell + \frac{1}{2}$: (u_n) est stationnaire.

Exercice 2: Limite de la partie entière (★)

Soit $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ une suite réelle convergent vers $\ell \in \mathbb{R}$. La suite $(\lfloor u_n \rfloor)_{n \in \mathbb{N}}$ est-elle convergente ?

 *Solution:*

La réponse est oui si $\lfloor \cdot \rfloor$ est continue en ℓ , c'est-à-dire si ℓ non entier. Cela peut être faux si ℓ est entier : considérer par exemple la suite donnée par $u_n = \frac{(-1)^n}{n+1}$.

Exercice 3: Règle de d'Alembert pour les suites (★)

- a) Soit $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ une suite à valeurs réelles strictement positives. On suppose qu'il existe $k \in [0; 1[$ tel que, à partir d'un certain rang, on a $\frac{u_{n+1}}{u_n} \leq k$. Montrer que $\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n = 0$.
- b) Soit $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ une suite à valeurs réelles strictement positives telle que $\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{u_{n+1}}{u_n} = \ell \in [0; 1[$. Montrer que $\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n = 0$.

 *Solution:*

- a) À partir de l'inégalité $\frac{u_{n+1}}{u_n} \leq k$ pour $n \geq n_0$, il est facile de déduire par récurrence que $u_n \leq k^{n-n_0} u_{n_0}$ pour $n \geq n_0$. Puisque $k \in [0; 1[$, $\lim_{n \rightarrow +\infty} k^{n-n_0} = 0$, d'où le résultat par le théorème d'encadrement.
- b) En appliquant la définition de la limite avec $\varepsilon = \frac{1-\ell}{2}$, on obtient qu'à partir d'un certain rang on a $\frac{u_{n+1}}{u_n} \leq \frac{\ell+1}{2} < 1$ et on applique le résultat précédent.

Exercice 4: Somme de parties entières (★)

- a) Soit $x \in \mathbb{R}$. Étudier la limite de la suite $(u_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$ de terme général :

$$u_n = \frac{\lfloor x \rfloor + \lfloor 2x \rfloor + \cdots + \lfloor nx \rfloor}{n^2}.$$

- b) En déduire que tout nombre réel est limite d'une suite de nombres rationnels.

 *Solution:*

Par un bête encadrement (en utilisant $a-1 < \lfloor a \rfloor \leq a$ pour tout réel a), et en utilisant la formule bien connue : $\sum_{k=1}^n k = \frac{n(n+1)}{2}$, on trouve : $\lim_{n \rightarrow \infty} u_n = \frac{x}{2}$.

Exercice 5: (★★)

Pour $n \in \mathbb{N}^*$ on pose $u_n = \frac{1 \times 3 \times 5 \times \dots \times (2n-1)}{2 \times 4 \times 6 \times \dots \times (2n)}$.

- Exprimer u_n à l'aide de factorielles.
- Montrer que la suite (u_n) est convergente.
- Soit $v_n = (n+1)u_n^2$. Montrer que la suite (v_n) converge. Que peut-on en déduire pour $\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n$?
- On note $\alpha = \lim_{n \rightarrow +\infty} v_n$. En étudiant la suite (nu_n^2) , montrer que $\alpha > 0$.

 **Solution:**

- Calcul classique à *savoir faire* : on multiplie numérateur et dénominateur par « ce qui manque » pour obtenir $(2n)!$ au numérateur :

$$u_n = \frac{1 \times 3 \times 5 \times \dots \times (2n-1)}{2 \times 4 \times 6 \times \dots \times (2n)} = \frac{1 \times 2 \times 3 \times 4 \times 5 \times \dots \times (2n-1) \times 2n}{(2 \times 4 \times 6 \times \dots \times (2n))^2}$$

Ensuite on remarque que

$$2 \times 4 \times 6 \times \dots \times (2n) = (2 \times 1) \times (2 \times 2) \times (2 \times 3) \times \dots \times (2 \times n) = (2 \times 2 \times \dots \times 2) \times (1 \times 3 \times \dots \times n)$$

et finalement :

$$u_n = \frac{(2n)!}{(2^n n!)^2} = \frac{(2n)!}{2^{2n} (n!)^2}.$$

- On calcule $\frac{u_{n+1}}{u_n}$ pour prouver que $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ est décroissante. Étant minorée par 0, elle converge.
- On calcule $\frac{v_{n+1}}{v_n}$ pour prouver que $(v_n)_{n \in \mathbb{N}}$ est décroissante. Étant minorée par 0, elle converge. Puisque $u_n^2 = \frac{v_n}{n+1}$ on en déduit $\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n^2 = 0$ puis $\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n = 0$.
- Si on pose $w_n = nu_n^2$ on trouve maintenant $\frac{w_{n+1}}{w_n} \geq 1$. La suite (w_n) est donc croissante; de plus, $\lim_{n \rightarrow +\infty} (v_n - w_n) = \lim_{n \rightarrow +\infty} u_n^2 = 0$, les suites v et w sont donc adjacentes. On en déduit : $\forall n \in \mathbb{N}, w_n \leq \alpha \leq v_n$, ce qui implique l'inégalité demandée.

Exercice 6: (★)

- Montrer que pour tout entier $n \in \mathbb{N}^*$: $\frac{1}{n+1} \leq \ln(n+1) - \ln(n) \leq \frac{1}{n}$.

- En déduire que la suite de terme général : $u_n = \sum_{k=1}^n \frac{1}{k} - \ln(n)$ est convergente.

La limite de cette suite se note traditionnellement γ , et s'appelle la constante d'Euler.

 **Solution:**

| Corrigé en classe, à savoir parfaitement.

Exercice 7: (★)

Soit $k \in \mathbb{N}, k \geq 2$. En utilisant une comparaison à une intégrale, montrer que la suite de terme général $u_n = \frac{1}{n+1} + \frac{1}{n+2} + \dots + \frac{1}{kn}$ est convergente et donner sa limite.

 **Solution:**

| Utiliser l'inégalité de l'exercice précédent, et sommer. La limite cherchée vaut $\ln 2$.

Exercice 8: Encore des sommes ()**

Pour tout $n \in \mathbb{N}$, on pose : $S_n = \sum_{k=1}^n \frac{1}{n+k}$ et $S'_n = \sum_{k=1}^n \frac{(-1)^{k-1}}{k}$.

a) Établir que pour tout $p > 1$,

$$\int_p^{p+1} \frac{dx}{x} \leq \frac{1}{p} \leq \int_{p-1}^p \frac{dx}{x}.$$

En déduire la limite de (S_n) .

b) Établir que $S'_{2n} = S_n$. En déduire la limite de (S'_n) .

 **Solution:**

a) • C'est un encadrement classique, à savoir faire proprement.

La fonction $x \mapsto \frac{1}{x}$ est décroissante sur $\mathbb{R}_+$, donc

$$\forall x \in [p; p+1], \frac{1}{x} \leq \frac{1}{p}$$

puis en intégrant cette inégalité sur le segment $[p; p+1]$ on obtient :

$$\int_p^{p+1} \frac{dx}{x} \leq \int_p^{p+1} \frac{1}{p} dx = \frac{1}{p}.$$

De même, pour tout $x \in [p-1; p]$ (avec $p > 1$) on a $\frac{1}{p} \leq \frac{1}{x}$ et en intégrant cette inégalité entre $p-1$ et p on obtient alors l'autre partie de l'inégalité demandée.

• Pour $n \in \mathbb{N}^*$ et $k \in \mathbb{N}^*$ on a donc

$$\int_{n+k}^{n+k+1} \frac{dx}{x} \leq \frac{1}{n+k} \leq \int_{n+k-1}^{n+k} \frac{dx}{x}$$

et en additionnant ces relations pour $1 \leq k \leq n$ et en utilisant la relation de Chasles :

$$\int_{n+1}^{2n+1} \frac{dx}{x} \leq S_n \leq \int_n^{2n} \frac{dx}{x}$$

soit :

$$\ln\left(\frac{2n+1}{n+1}\right) \leq S_n \leq \ln\left(\frac{2n}{n}\right)$$

et par théorème d'encadrement on en tire : $\lim_{n \rightarrow +\infty} S_n = \ln 2$.

b) En séparant les termes d'indices pair/impair on peut écrire :

$$S'_{2n} = \sum_{p=1}^n \frac{1}{2p-1} - \sum_{p=1}^{2n} \frac{1}{2p} = \sum_{p=1}^n \frac{1}{2p-1} - \frac{1}{2} \sum_{p=1}^n \frac{1}{p}$$

et on a aussi :

$$S_n = \sum_{k=1}^n \frac{1}{n+k} = \sum_{p=1}^{2n} \frac{1}{p} - \sum_{p=1}^n \frac{1}{p} = \left(\sum_{p=1}^n \frac{1}{2p-1} + \sum_{p=1}^{2n} \frac{1}{2p} \right) - \sum_{p=1}^n \frac{1}{p} = \left(\sum_{p=1}^n \frac{1}{2p-1} + \frac{1}{2} \sum_{p=1}^n \frac{1}{p} \right) - \sum_{p=1}^n \frac{1}{p}$$

donc on a bien $S'_{2n} = S_n$.

Il en résulte que $\lim_{n \rightarrow +\infty} S'_{2n} = \ln 2$, et puisque $S'_{2n+1} = S'_{2n} + \frac{1}{2n+1}$, on a aussi $\lim_{n \rightarrow +\infty} S'_{2n+1} = \ln 2$, et il résulte alors d'un résultat du cours que la suite (S'_{2n}) converge vers $\ln 2$.

Exercice 9: Théorème de Cesàro (★★)

Soit (u_n) une suite de nombres réels convergeant vers $\ell \in \mathbb{R}$.

Soit (a_n) une suite de réels *strictement positifs* telles que $\lim_{n \rightarrow +\infty} \left(\sum_{k=1}^n a_k \right) = +\infty$ (autrement dit, la série de terme général a_n diverge).

Montrer que la suite (v_n) définie par : $v_n = \frac{\sum_{k=1}^n a_k u_k}{\sum_{k=1}^n a_k}$ converge aussi vers ℓ .

En déduire que la suite (w_n) définie par : $w_n = \frac{\sum_{k=1}^n u_k}{n}$ converge aussi vers ℓ .

 **Solution:**

Soit ε un réel strictement positif fixé. Par hypothèse :

$$\exists n_0 \in \mathbb{N} \text{ tq } \forall n \in \mathbb{N}, n \geq n_0 \implies |u_n - \ell| < \frac{\varepsilon}{2}$$

$$\text{Pour } n \geq n_0, \text{ on a } v_n - \ell = \frac{\sum_{k=1}^n a_k u_k}{\sum_{k=1}^n a_k} - \ell = \frac{\sum_{k=1}^n a_k (u_k - \ell)}{\sum_{k=1}^n a_k} = \frac{\sum_{k=1}^{n_0-1} a_k (u_k - \ell)}{\sum_{k=1}^n a_k} + \frac{\sum_{k=n_0}^n a_k (u_k - \ell)}{\sum_{k=1}^n a_k}$$

d'où, en utilisant l'inégalité triangulaire et le fait que les a_k sont positifs :

$$|v_n - \ell| \leq \frac{\sum_{k=1}^{n_0-1} a_k |u_k - \ell|}{\sum_{k=1}^n a_k} + \frac{\sum_{k=n_0}^n a_k |u_k - \ell|}{\sum_{k=1}^n a_k} \leq \frac{\sum_{k=1}^{n_0-1} a_k |u_k - \ell|}{\sum_{k=1}^n a_k} + \frac{\sum_{k=n_0}^n a_k \frac{\varepsilon}{2}}{\sum_{k=1}^n a_k} \leq \frac{\sum_{k=1}^{n_0-1} a_k |u_k - \ell|}{\sum_{k=1}^n a_k} + \frac{\varepsilon}{2}.$$

Or le premier terme de cette dernière somme tend vers 0 quand $n \rightarrow \infty$, puisque le numérateur $\sum_{k=1}^{n_0-1} a_k |u_k - \ell|$ ne dépend pas de n et que le dénominateur $\sum_{k=1}^n a_k$ tend vers $+\infty$ par hypothèse. Il existe donc un entier n_1 (que l'on peut supposer $\geq n_0$) tel que, pour $n \geq n_1$, ce terme soit inférieur à $\frac{\varepsilon}{2}$.

Finalement, pour $n \geq n_1$ on aura $|v_n - \ell| < \varepsilon$, ce qui donne le résultat annoncé.

Suites définies par une relation de récurrence (ex. 10 à 12)**Exercice 10: (★★)**

Étudier les suites réelles (u_n) définies par :

$$\begin{array}{lll} \text{a) } u_{n+1} = \sqrt{5+4u_n} & \text{b) } u_{n+1} = \sqrt{5-4u_n} & \text{c) } u_{n+1} = \frac{4-u_n^2}{3} \\ \text{d) } u_{n+1} = \frac{1-u_n^2}{1+u_n^2} & \text{e) } u_{n+1} = \sin(2u_n) & \text{f) } u_{n+2} = \sqrt{u_n u_{n+1}} \end{array}$$

 **Solution:**

a) Il est clair qu'il faut supposer $u_0 \geq -\frac{5}{4}$; ensuite, si cette condition est respectée il est facile de montrer par récurrence sur n que u_n existe et est positif pour tout $n \in \mathbb{N}^*$.

Posons $f(x) = \sqrt{5+4x}$ pour $x \geq -\frac{5}{4}$. Pour $x \leq 0$, $f(x) - x$ est positif, et pour $x \geq 0$, le signe de $f(x) - x$ est le même que celui de $(\sqrt{5+4x} - x)(\sqrt{5+4x} + x) = -x^2 + 4x + 5 = -(x-5)(x+1)$.

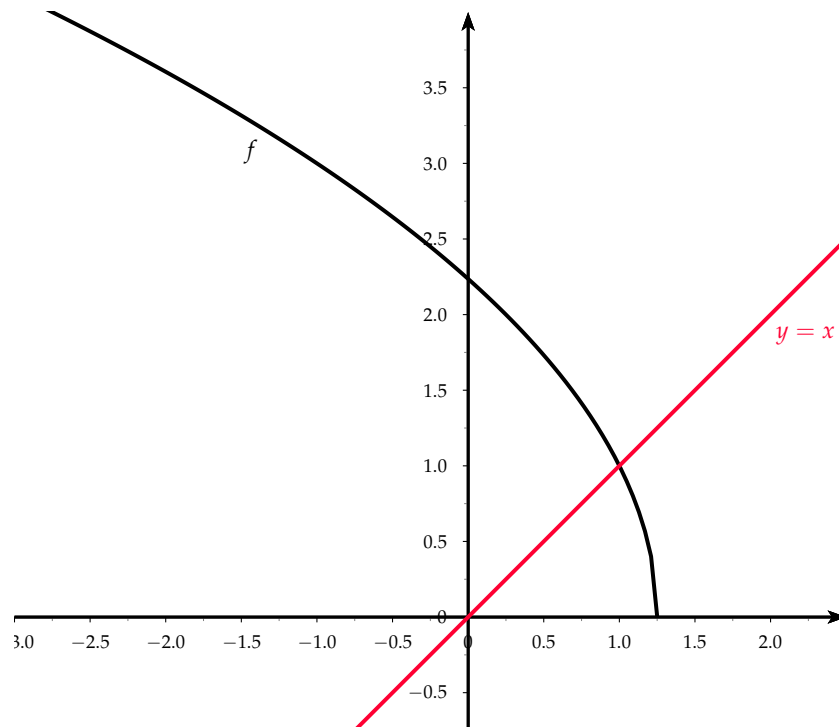
On a donc $f(x) = x \iff x = 5$ et $f(x) - x \geq 0 \iff x \leq 5$. Il est alors facile de conclure, en utilisant la croissance de f :

- Si $u_0 \leq 5$, alors $u_1 = f(u_0) \leq f(5) = 5$ et on a facilement par récurrence $u_n \leq 5$ pour tout n . On en déduit $f(u_n) - u_n \geq 0$, donc la suite u est croissante.

Étant croissante majorée par 5, elle converge, vers un réel ℓ solution de l'équation $\ell = f(\ell)$ (car f continue), c'est-à-dire $\ell = 5$.

- On montre exactement de la même façon que, si $u_0 \geq 5$, la suite u est décroissante minorée par 5, et converge encore vers 5.

b) Soit $f: x \mapsto \sqrt{5-4x}$ pour $x \leq \frac{5}{4}$. Un graphique vite fait n'est pas inutile pour comprendre :



- Il est clair qu'il faut $u_0 \leq \frac{5}{4}$.
- Si $u_0 = 1$ la suite est constante; on exclura ce cas par la suite.
- On résout l'équation $f(x) = \frac{5}{4}$, on trouve $x = \frac{55}{64}$. Donc si $u_0 < \frac{55}{64}$, alors $u_1 > \frac{5}{4}$ et la suite n'est plus définie ensuite.
- Supposons donc $u_0 \in \left[\frac{55}{64}; \frac{5}{4}\right] \setminus \{1\}$. Si la suite u était bien définie, elle resterait dans l'intervalle $\left[\frac{55}{64}; \frac{5}{4}\right]$.
Or $f'(x) = \frac{-2}{\sqrt{5-4x}}$, donc pour tout $x \in \left[\frac{55}{64}; \frac{5}{4}\right]$, $|f'(x)| \geq \left|f'\left(\frac{55}{64}\right)\right| = \frac{8}{5}$, et l'inégalité des accroissements finis implique alors

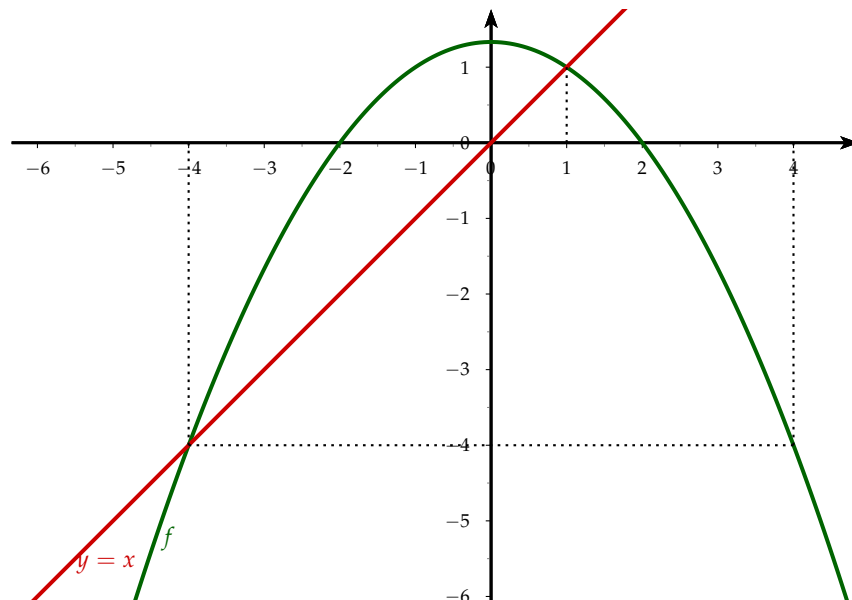
$$\forall n \in \mathbb{N}, |u_{n+1} - 1| = |f(u_n) - f(1)| \geq \frac{8}{5} |u_n - 1|$$

ce qui implique par récurrence : $|u_n - 1| \geq \left(\frac{8}{5}\right)^n |u_0 - 1|$.

On aurait ainsi $\lim_{n \rightarrow +\infty} |u_n - 1| = +\infty$, contradiction.

En conclusion, sauf dans le cas $u_0 = 1$, les u_n ne sont plus définis à partir d'un certain rang.

c) Soit $f: x \in \mathbb{R} \mapsto \frac{4-x^2}{3}$. L'étude de f , ni celle du signe de $f(x) - x$, ne sont pas bien compliquées, je ne détaille pas et je suppose que tous les résultats que l'on peut lire sur le graphique ci-dessous ont été rigoureusement démontrés.



Distinguons les cas.

– Si $u_0 = -4$ ou $u_0 = 1$, la suite est constante.

– Cas où $u_0 \in]-\infty; -4[$

L'intervalle $]-\infty; -4[$ est stable par f , et sur cet intervalle on a $f(x) < x$. On aura donc $f(u_n) < u_n$ c'est-à-dire u décroissante (strictement). Si elle était minorée, elle convergerait vers un réel ℓ tel que $f(\ell) = \ell$ (car f continue), et $\ell \leq u_0 < -4$, c'est impossible.

La suite u étant décroissante non minorée diverge alors vers $-\infty$.

– Cas où $u_0 \in [4; +\infty[$

Si $u_0 = 4$ alors $u_1 = -4$ et la suite est stationnaire.

Si $u_0 > 4$ alors $u_1 < -4$ et on est ramené au cas précédent : $\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n = -\infty$.

– Cas où $u_0 \in]-4; 0[$

Sur l'intervalle $]-4; 0[$, qui n'est pas stable par f (car $f(]-4; 0[) =]-\frac{4}{3}; \frac{4}{3}[)$, on a $f(x) > x$, donc tant que les u_n restent dans cet intervalle, la suite est croissante. Mais cela ne peut se produire indéfiniment, car sinon la suite, étant croissante majorée, convergerait vers un point fixe de f situé dans l'intervalle $[u_0; 0]$, et il n'y en a pas.

Il existe alors un rang n_0 tel que $u_{n_0} \in [0; \frac{4}{3}]$ et on est ramené à un cas étudié plus loin.

– Cas où $u_0 \in]2; 4[$

Alors $u_1 \in]-4; 0[$ et on est ramené au cas précédent, et ensuite au cas suivant.

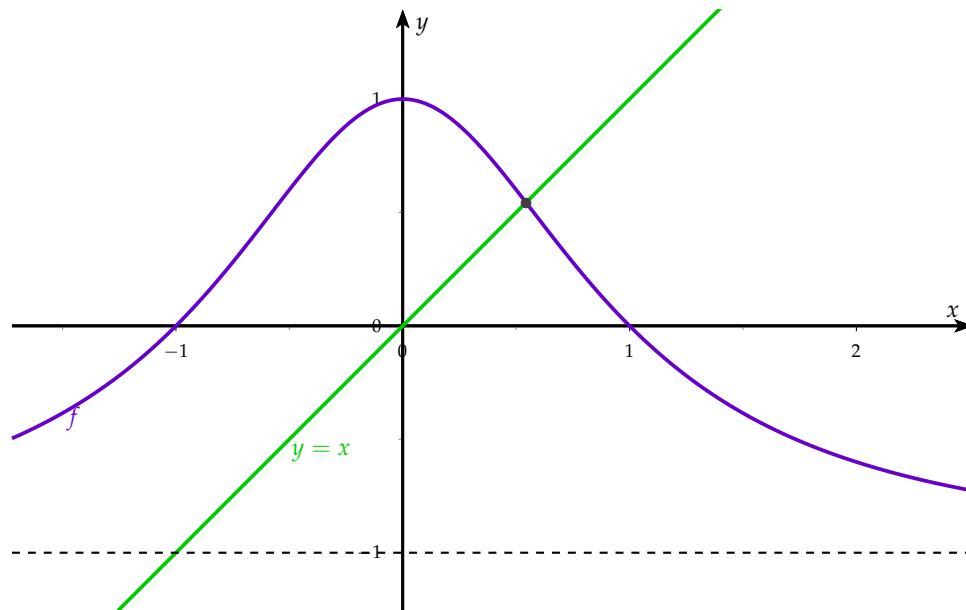
– Dernier cas : $u_0 \in [0; 2]$

Alors $u_1 \in [0; \frac{4}{3}]$, qui est un intervalle stable par f , donc pour tout $n \geq 1$ on a $u_n \in [0; \frac{4}{3}]$.

Ensuite on remarque que f est contractante sur $[0; \frac{4}{3}]$, car $f'(x) = -2x$ donc $\|f'\|_{\infty}^{[0; \frac{4}{3}]} = \frac{8}{9}$. En reprenant alors la méthode vue en cours (mais à savoir refaire complètement), on montre que la suite u converge vers 1.

Je vous laisse le soin de conclure en résumant tous ces différents cas.

d) Soit $f: x \in \mathbb{R} \mapsto \frac{1-x^2}{1+x^2}$. L'étude de f n'est pas bien compliquée, et permet d'obtenir le graphique ci-dessous.



Déjà, puisque f est définie sur $\mathbb{R}$, la suite u est bien définie.

Pour tout $u_0 \in \mathbb{R}$, on a $u_1 \in]-1; 1]$ puis $u_2 \in [0; 1]$. On étudie alors les différents cas.

- Si $u_2 = 0$ (ce qui correspond à $u_1 = 1$ soit $u_0 = 0$), on a $u_{2n} = 0$ et $u_{2n+1} = 1$ pour tout n . La suite u diverge donc.
- Si $u_2 = 1$ (ce qui correspond à $u_1 = 0$ donc $u_0 = \pm 1$), on a $u_{2n} = 1$ pour tout $n \in \mathbb{N}^*$ et $u_{2n+1} = 1$ pour tout n . La suite u diverge donc.
- Supposons donc $u_2 \in]0; 1[$ c'est-à-dire $u_0 \notin \{-1, 0, 1\}$. On a alors $u_n \in]0; 1[$ pour tout n .

On calcule : $f(x) - x = -\frac{x^3 + x^2 + x - 1}{1 + x^2}$. La fonction $x \mapsto x^3 + x^2 + x - 1$ est une bijection strictement croissante de $\mathbb{R}$ sur $\mathbb{R}$; elle s'annule donc une fois et une seule en un point $\ell \in]0; 1[$ (la valeur exacte de ℓ est $\frac{1}{3} \left(u - \frac{2}{u} - 1 \right)$ avec $u = \sqrt[3]{17 + 3\sqrt{33}}$, et $\ell \approx 0.54$, merci MAPLE®).

On calcule alors $f'(\ell) \approx -1,3$, f n'est donc pas contractante au voisinage de ℓ ... donc on applique la méthode classique.

On calcule :

$$\begin{aligned} f \circ f(x) - x &= \frac{1 - x^2}{1 + \left(\frac{1 - x^2}{1 + x^2} \right)^2} - x = \frac{(1 - x^2)(1 + x^2)^2}{2(1 + x^4)} - x \\ &= -\frac{x(x^4 - 2x + 1)}{1 + x^4} = \frac{x(1 - x)(x^3 + x^2 + x - 1)}{1 + x^4}. \end{aligned}$$

Sur $]0; 1[$ $x(1 - x)$ est positif donc $f \circ f(x) - x$ est du signe de $x^3 + x^2 + x - 1$ donc du signe de $x - \ell$. On a donc les cas suivants :

- Si $u_2 = \ell$ (et alors $u_0 = u_1 = \ell$), la suite est constante.
- Si $u_2 \in]0; \ell[$, alors $f \circ f(u_2) \leq u_2$ c'est-à-dire $u_4 \leq u_2$ donc par récurrence la suite (u_{2n}) est décroissante ; de plus, la relation $u_{2n+2} \leq u_{2n}$ implique $f(u_{2n+2}) \geq f(u_{2n})$ puisque f est décroissante donc la suite (u_{2n+1}) est croissante ; enfin, $u_2 < \ell \implies u_3 = f(u_2) > f(\ell) = \ell$; par récurrence on a que les u_{2n} restent dans l'intervalle $[0; u_2]$ et que les u_{2n+1} restent dans l'intervalle $[u_3; 1] \subset]\ell; 1]$.

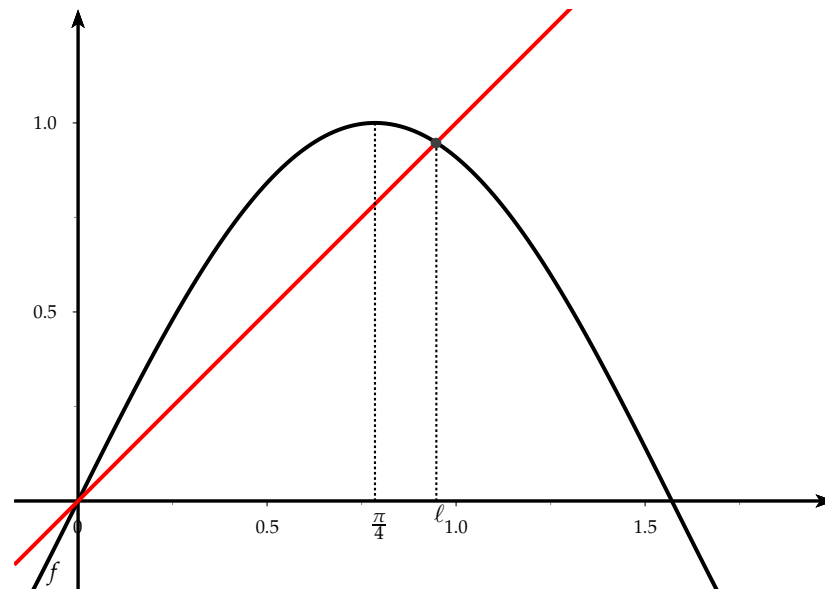
D'après le théorème de la limite monotone, ces deux suites convergent, vers un point fixe de $f \circ f$ c'est-à-dire 0, 1 ou ℓ . Compte tenu des encadrements précédents, on a $\lim_{n \rightarrow +\infty} u_{2n} = 0$ et $\lim_{n \rightarrow +\infty} u_{2n+1} = 1$, et par conséquent la suite u diverge.

- On traite de façon similaire le cas $u_2 \in]\ell; 1[$.

En résumé : la suite u converge si et seulement si $u_0 = \ell$; sinon, l'une des deux suites extraites (u_{2n}) et (u_{2n+1}) converge vers 0 et l'autre vers 1.

- e) Pour tout $u_0 \in \mathbb{R}$ on a $u_1 \in [-1; 1]$. De plus, quitte à changer la suite u en $-u$, on peut supposer $u_1 \in [0; 1]$.

Sur l'intervalle $[0; 1]$, stable par la fonction $f : x \mapsto \sin(2x)$, cette fonction f n'est pas monotone... Une figure peut aider à voir ce qui se passe :



L'étude de la fonction $g: x \mapsto \sin(2x) - x$ donne le tableau de variations suivant :

x	0	$\frac{1}{2} \text{Arc cos} \left(\frac{1}{2} \right)$	1
g	0	$\nearrow$	$\searrow \sin 2 - 1$

et permet de montrer que sur l'intervalle $]0;1]$, la fonction f admet un unique point fixe ℓ , compris entre $\frac{\pi}{4}$ et 1 ($\ell \approx 0.95$ par MAPLE®).

On peut maintenant discuter :

- Si $u_1 = 0$ (c'est-à-dire si $u_0 \in \pi\mathbb{Z}$), alors $u_n = 0$ pour tout $n \in \mathbb{N}^*$.
- Si $u_1 \in]0; \frac{\pi}{4}]$, alors il existe un rang n_0 tel que $u_{n_0} \geq \frac{\pi}{4}$; en effet, par l'absurde, si u_n restait dans l'intervalle $]0; \frac{\pi}{4}]$, elle serait croissante (car $f(x) > x$ sur cet intervalle d'après l'étude précédente), et majorée par $\frac{\pi}{4}$, donc convergerait vers un réel ℓ' appartenant à l'intervalle $[u_1; \frac{\pi}{4}]$ tel que $f(\ell') = \ell'$, il n'y en a pas.

Donc il existe un rang n_0 tel que $u_{n_0} \in [\frac{\pi}{4}; 1]$. Puisque l'intervalle $[\frac{\pi}{4}; 1]$ est stable par f (en effet, $f(\frac{\pi}{4}) = 1$ et $f(1) = \sin 2 \approx 0.91 > \frac{\pi}{4}$), on aura $u_n \in [\frac{\pi}{4}; 1]$ pour tout $n \geq n_0$.

Mais sur l'intervalle $[\frac{\pi}{4}; 1]$ la fonction f est contractante (car $|f'(x)| = |2 \cos(2x)| \leq |2 \cos 2| \approx 0.83$), donc en reprenant la méthode vue en cours (mais à savoir refaire complètement), on montre que la suite u converge vers ℓ .

En conclusion :

- si $u_0 \in \pi\mathbb{Z}$, la suite est stationnaire et converge vers 0 ;
- si $\sin(u_0) > 0$ la suite converge vers ℓ ;
- si $\sin(u_0) < 0$ la suite converge vers $-\ell$.

f) L'énoncé n'étant pas très précis, on supposera u_0 et u_1 positifs. Ainsi, tous les termes de la suite existent et sont positifs.

De plus, si u_0 ou u_1 est nul, la suite est constante égale à 0, cela n'a pas d'intérêt. On peut donc supposer u_0 et u_1 strictement positifs, et ainsi on aura $u_n > 0$ pour tout n .

La relation de récurrence équivaut alors à :

$$\ln(u_{n+2}) = \frac{1}{2} \ln(u_{n+1}) + \frac{1}{2} \ln(u_n)$$

et en posant $v_n = \ln(u_n)$ on est ramené à une banale récurrence linéaire d'ordre deux que je vous laisse résoudre.

Exercice 11: (★)

On considère la suite réelle $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ définie par :

$$u_0 > 0 \quad \text{et} \quad \forall n \in \mathbb{N}, u_{n+1} = \sqrt{\sum_{k=0}^n u_k}.$$

- Trouver une relation de récurrence simple entre u_n et u_{n+1} .
- Montrer que $\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n = +\infty$.
- Montrer que $\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{u_{n+1}}{u_n} = 1$ puis que $\lim_{n \rightarrow +\infty} (u_{n+1} - u_n) = \frac{1}{2}$.
- (★★) En utilisant le théorème de Cesàro, donner un équivalent de u_n lorsque $n \rightarrow +\infty$.

 **Solution:**

- $u_{n+1} = \sqrt{u_n + u_n^2}$.
- Directement d'après la relation ci-dessus, $u_{n+1} \geq u_n$. La suite u est croissante; si elle était majorée, elle convergerait vers un réel $\ell \geq u_0 > 0$ tel que $\ell = \sqrt{\ell + \ell^2}$, c'est impossible (la dernière équation n'ayant que $\ell = 0$ comme solution).
Étant croissante non majorée, elle diverge vers $+\infty$.
- Puisque $u_n > 0$ et $\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{1}{u_n} = 0$, on a $\frac{u_{n+1}}{u_n} = \sqrt{1 + \frac{1}{u_n}} \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} 1$.
Puis $u_{n+1} - u_n = u_n \left(\sqrt{1 + \frac{1}{u_n}} - 1 \right) \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} \frac{1}{2}$, en utilisant l'équivalent bien connu $\sqrt{1+x} - 1 \underset{x \rightarrow 0}{\sim} \frac{x}{2}$.
- En utilisant alors le théorème de Cesàro, on a que le rapport

$$\frac{u_n - u_0}{n} = \frac{(u_n - u_{n-1}) + (u_{n-1} - u_{n-2}) + \dots + (u_1 - u_0)}{n}$$
 tend aussi vers $\frac{1}{2}$ quand $n \rightarrow +\infty$, donc $u_n \underset{n \rightarrow +\infty}{\sim} \frac{n}{2}$.

Exercice 12: (★★)

Étudier les suites réelles (u_n) et (v_n) définies par :

$$1. \quad u_{n+1} = \frac{u_n^2}{u_n + v_n}, \quad v_{n+1} = \frac{v_n^2}{u_n + v_n} \quad (0 < u_0 < v_0).$$

En déduire : $\lim_{n \rightarrow \infty} \left(\prod_{p=0}^n (1 + k^{2^p}) \right) \quad (0 < k < 1)$.

$$2. \quad u_{n+1} = \frac{u_n + v_n}{2}, \quad v_{n+1} = \sqrt{u_{n+1} v_n} \quad (0 < u_0 < v_0).$$

On montrera que les deux suites convergent vers la même limite ℓ , que l'on exprimera à l'aide de $\theta = \arccos\left(\frac{u_0}{v_0}\right)$.

$$3. \quad u_{n+1} = \sqrt{u_n v_n}, \quad v_{n+1} = \frac{u_n + v_n}{2} \quad (0 < u_0 \leq v_0)$$

$$4. \quad u_{n+1} = \frac{2u_n + v_n}{3}, \quad v_{n+1} = \frac{u_n + 2v_n}{3} \quad (0 < u_0 < v_0).$$

$$5. \quad u_{n+1} = \frac{u_n}{2} + \frac{2}{v_n}, \quad v_{n+1} = \frac{1}{2u_n} + 2v_n \quad (u_0, v_0 > 0)$$

 **Solution:**

- Déjà on montre par récurrence facile que u_n et v_n sont strictement positifs pour tout n , et cela prouve en même temps que les définitions ont bien un sens puisque le dénominateur $u_n + v_n$ ne s'annule pas.
On a pour tout n :

$$u_{n+1} - v_{n+1} = \frac{u_n^2 - v_n^2}{u_n + v_n} = u_n - v_n$$

donc la suite $u - v$ est constante : $\forall n \in \mathbb{N}, u_n - v_n = u_0 - v_0$.

De plus, pour tout n on a $\frac{u_{n+1}}{v_{n+1}} = \left(\frac{u_n}{v_n}\right)^2$ donc par récurrence : $\frac{u_n}{v_n} = \left(\frac{u_0}{v_0}\right)^{2^n}$. En notant $k = \frac{u_0}{v_0}$ (avec $0 < k < 1$ compte tenu des hypothèses) on a donc, pour tout entier n :

$$u_n - v_n = u_0 - v_0 \quad \text{et} \quad u_n = v_n k^{2^n} = (u_n - u_0 + v_0) k^{2^n}$$

d'où l'on tire $u_n = \frac{(v_0 - u_0)k^{2^n}}{1 - k^{2^n}}$ puis $\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n = 0$ puis $\lim_{n \rightarrow +\infty} v_n = v_0 - u_0$.

En reprenant les relations précédentes :

$$\prod_{p=0}^n (1 + k^{2^p}) = \prod_{p=0}^n \left(1 + \frac{u_p}{v_p}\right) = \prod_{p=0}^n \frac{u_p + v_p}{v_p} = \prod_{p=0}^n \frac{v_p}{v_{p+1}} = \frac{v_0}{v_{n+1}} \quad (\text{télescopage})$$

donc

$$\lim_{p \rightarrow +\infty} \prod_{p=0}^n (1 + k^{2^p}) = \frac{v_0}{v_0 - u_0} = \frac{1}{1 - \frac{u_0}{v_0}} = \frac{1}{1 - k}.$$

2. Déjà on montre par récurrence facile que u_n et v_n sont strictement positifs pour tout n , et cela prouve en même temps que les définitions ont bien un sens.

- Démontrons déjà par récurrence sur n que $u_n < v_n$ pour tout n .

- Par hypothèse, la propriété est vraie pour $n = 0$.

- Supposons là vérifiée au rang n , c'est-à-dire $u_n < v_n$, alors :

$$v_{n+1} - u_{n+1} = \sqrt{u_{n+1}}(\sqrt{v_n} - \sqrt{u_{n+1}}) = \sqrt{u_{n+1}} \frac{v_n - u_{n+1}}{\sqrt{v_n} + \sqrt{u_{n+1}}} = \sqrt{u_{n+1}} \frac{v_n - u_n}{2(\sqrt{v_n} + \sqrt{u_{n+1}})} \underbrace{> 0}_{\text{H.R.}}$$

ce qui établit le résultat à l'ordre $n + 1$, et achève la récurrence.

- On en déduit, pour tout n : $u_{n+1} - u_n = \frac{v_n - u_n}{2} > 0$, donc la suite u est croissante (strictement).

Et aussi $v_{n+1} - v_n = \sqrt{v_n}(\sqrt{u_{n+1}} - \sqrt{v_n})$ est du signe de $u_{n+1} - v_n = \frac{u_n - v_n}{2}$, donc est négatif, et la suite v est décroissante (strictement).

- Ainsi, pour tout n :

$$0 < u_0 < \dots < u_n < v_n < \dots < v_0$$

donc la suite u est croissante majorée par v_0 , elle converge vers un réel ℓ , et la suite v est décroissante minorée par u_0 , elle converge vers un réel ℓ' .

En passant à la limite dans la relation de récurrence, on a $\ell = \frac{\ell + \ell'}{2}$, donc $\ell = \ell'$, et les suites sont adjacentes.

- Posons alors $\theta = \arccos\left(\frac{u_0}{v_0}\right)$, ce qui a bien un sens puisque $0 < \frac{u_0}{v_0} < 1$ (et $\theta \in]0; \frac{\pi}{2}[$).

On a $u_1 = v_0 \left(\frac{1 + \frac{u_0}{v_0}}{2}\right) = v_0 \frac{1 + \cos \theta}{2} = v_0 \cos^2\left(\frac{\theta}{2}\right)$ et $v_1 = \sqrt{u_1 v_0} = v_0 \cos\left(\frac{\theta}{2}\right)$ (tout est positif).

Puis $u_2 = \frac{u_1 + v_1}{2} = v_0 \cos\left(\frac{\theta}{2}\right) \frac{1 + \cos\left(\frac{\theta}{2}\right)}{2} = v_0 \cos\left(\frac{\theta}{2}\right) \cos^2\left(\frac{\theta}{4}\right)$ et $v_2 = \sqrt{u_2 v_1} = v_0 \cos\left(\frac{\theta}{2}\right) \cos\left(\frac{\theta}{4}\right)$.

Je vous laisse le soin de démontrer proprement par récurrence que l'on a, en particulier :

$$\forall n \in \mathbb{N}^*, v_n = v_0 \prod_{k=1}^n \cos\left(\frac{\theta}{2^k}\right).$$

Pour simplifier cette expression, il y a une astuce ! Cela consiste à multiplier v_n par $\sin\left(\frac{\theta}{2^n}\right)$; en effet, $\cos\left(\frac{\theta}{2^n}\right) \sin\left(\frac{\theta}{2^n}\right) = \frac{1}{2} \sin\left(\frac{\theta}{2^{n-1}}\right)$ donc $v_n \sin\left(\frac{\theta}{2^n}\right) = \frac{1}{2} v_{n-1} \sin\left(\frac{\theta}{2^{n-1}}\right)$ et l'on en déduit par récurrence :

$$\forall n \in \mathbb{N}, v_n \sin\left(\frac{\theta}{2^n}\right) = \frac{1}{2^n} v_0 \sin \theta.$$

Puisque $\theta \in]0; \frac{\pi}{2}[$, on peut diviser : $v_n = \frac{v_0 \sin \theta}{2^n \sin\left(\frac{\theta}{2^n}\right)}$, et compte tenu de l'équivalent célèbre : $\sin x \sim x$ $_{x \rightarrow 0}$,

on en tire

$$\ell = v_0 \frac{\sin \theta}{\theta}.$$

3. Moyenne arithmético-géométrique, traitée en classe.

4. $v_{n+1} - u_{n+1} = \frac{v_n - u_n}{3}$ donc facilement par récurrence, $v_n > u_n$ pour tout n .

On en déduit immédiatement $u_{n+1} - u_n > 0$ et $v_{n+1} - v_n < 0$: la suite u est croissante et la suite v est décroissante. La relation précédente montre aussi que la suite $v - u$ est géométrique de raison $\frac{1}{3}$, elle converge donc vers 0, et les deux suites sont adjacentes. Elles convergent donc vers la même limite ℓ .

Enfin, on remarque que $u_{n+1} + v_{n+1} = u_n + v_n$, la suite $u + v$ est donc constante, égale à $u_0 + v_0$, d'où $\ell = \frac{u_0 + v_0}{2}$.

5. Déjà on montre par récurrence facile que u_n et v_n sont strictement positifs pour tout n , et cela prouve en même temps que les définitions ont bien un sens puisque les dénominateurs ne s'annulent pas.

On a évidemment $v_{n+1} - v_n > 0$: la suite v est croissante. Si elle était majorée, elle convergerait vers une limite ℓ , on aurait $\ell \geq v_0 > 0$ et la suite $\left(\frac{1}{2u_n}\right)_{n \in \mathbb{N}}$ serait convergente vers $-\ell < 0$, c'est impossible.

Donc la suite v est croissante non majorée, elle diverge vers $+\infty$.

On remarque ensuite que

$$u_{n+1}v_{n+1} = \left(\frac{u_n}{2} + \frac{2}{v_n}\right) \left(\frac{1}{2u_n} + 2v_n\right) = \frac{17}{4} + u_nv_n + \frac{1}{u_nv_n}.$$

La suite $w = uv$ vérifie donc la relation de récurrence $w_{n+1} = \frac{17}{4} + w_n + \frac{1}{w_n}$; elle est donc croissante, et ne peut converger puisque l'équation $x = \frac{17}{4} + x + \frac{1}{x}$ n'a pas de solution positive. Elle diverge donc vers $+\infty$, autrement dit : $\lim_{n \rightarrow +\infty} u_nv_n = +\infty$.

On en déduit que $\frac{u_{n+1}}{u_n} = \frac{1}{2} + \frac{2}{u_nv_n} \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} \frac{1}{2}$, donc $\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n = 0$ d'après la règle de d'Alembert pour les suites.

Suites complexes (ex. 13 à 17)

Exercice 13: (★★)

Soit $a \in \mathbb{C}$, $|a| \neq 1$. Étudier la suite de terme général $u_n = \frac{a^n}{(1+a)(1+a^2) \cdots (1+a^n)}$.

 *Solution:*

Si $|a| < 1$, alors à partir d'un certain rang $\left|\frac{a}{1+a^n}\right| \leq k < 1$ donc $\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n = 0$.

Si $|a| > 1$, $\frac{u_{n+1}}{u_n} \rightarrow 0$ donc $u_n \rightarrow 0$ d'après d'Alembert.

Exercice 14: (★★)

Étudier la suite complexe (z_n) définie par la relation de récurrence : $z_{n+1} = \frac{1}{2}(z_n + |z_n|)$.

 *Solution:*

On pose $z_n = r_n e^{i\theta_n}$ avec $\theta_n \in]-\pi; \pi]$ et $r_n \geq 0$. Alors

$$z_{n+1} = \frac{1}{2}r_n(e^{i\theta_n} + 1) = \frac{1}{2}r_n e^{i\theta_n/2}(e^{i\theta_n/2} + e^{-i\theta_n/2}) = r_n \cos\left(\frac{\theta_n}{2}\right) e^{i\theta_n/2}.$$

Puisque $\cos\left(\frac{\theta_n}{2}\right) \geq 0$ on aura donc $r_{n+1} = r_n \cos\left(\frac{\theta_n}{2}\right)$ et $\theta_{n+1} = \frac{\theta_n}{2}$ (qui est bien encore dans $]-\pi; \pi]$).

On en déduit :

$$\theta_n = \frac{\theta_0}{2^n} \quad \text{et} \quad r_n = r_0 \prod_{k=0}^{n-1} \cos\left(\frac{\theta_k}{2}\right) = r_0 \prod_{k=0}^{n-1} \cos\left(\frac{\theta_0}{2^{k+1}}\right).$$

Pour calculer ce produit « classique », il y a une astuce : on multiplie l'expression précédente par $\sin\left(\frac{\theta_0}{2^n}\right)$ et

on utilise la relation $\sin x \cos x = \frac{1}{2} \sin 2x$. On aura donc :

$$\begin{aligned} r_n \sin\left(\frac{\theta_0}{2^n}\right) &= r_0 \cos\left(\frac{\theta_0}{2}\right) \cdot \cos\left(\frac{\theta_0}{2^2}\right) \cdots \cos\left(\frac{\theta_0}{2^{n-2}}\right) \cdot \cos\left(\frac{\theta_0}{2^{n-1}}\right) \cdot \underbrace{\cos\left(\frac{\theta_0}{2^n}\right) \sin\left(\frac{\theta_0}{2^n}\right)}_{\sin\left(\frac{\theta_0}{2^{n-1}}\right)} \\ &= \frac{r_0}{2} \cos\left(\frac{\theta_0}{2}\right) \cdot \cos\left(\frac{\theta_0}{2^2}\right) \cdots \cos\left(\frac{\theta_0}{2^{n-2}}\right) \cdot \underbrace{\cos\left(\frac{\theta_0}{2^{n-1}}\right) \sin\left(\frac{\theta_0}{2^{n-1}}\right)}_{\sin\left(\frac{\theta_0}{2^{n-2}}\right)} \\ &= \frac{r_0}{2^2} \cos\left(\frac{\theta_0}{2}\right) \cdot \cos\left(\frac{\theta_0}{2^2}\right) \cdots \cos\left(\frac{\theta_0}{2^{n-2}}\right) \sin\left(\frac{\theta_0}{2^{n-2}}\right) \\ &= \cdots = \frac{r_0}{2^n} \sin \theta_0 \end{aligned}$$

et finalement, en supposant $\sin\left(\frac{\theta_0}{2^n}\right) \neq 0$ soit $\theta_0 \neq 0$, on trouve

$$r_n = r_0 \frac{\sin \theta_0}{2^n \sin\left(\frac{\theta_0}{2^n}\right)}$$

donc en utilisant $\sin x \sim x$, $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin x}{x} = 1$, $\lim_{n \rightarrow +\infty} r_n = r_0 \frac{\sin \theta_0}{\theta_0}$ et puisque $\lim_{n \rightarrow +\infty} \theta_n = 0$ on trouve $\lim_{n \rightarrow +\infty} z_n = r_0 \frac{\sin \theta_0}{\theta_0}$ (je vous laisse le soin de traiter le cas $\theta_0 = 0$).

Exercice 15: (★)

- Montrer que la suite $(z_n)_{n \in \mathbb{N}} \in \mathbb{C}^{\mathbb{N}}$ définie par : $\forall n \in \mathbb{N}, z_n = e^{in}$, diverge.
- En utilisant la formule donnant $\cos(n+1)$ montrer que si la suite $(\cos n)_{n \in \mathbb{N}}$ converge, il en est de même de la suite $(\sin n)_{n \in \mathbb{N}}$.
Montrer de même que si la suite $(\sin n)_{n \in \mathbb{N}}$ converge, il en est de même de la suite $(\cos n)_{n \in \mathbb{N}}$.
- En déduire que les deux suites $(\cos n)_{n \in \mathbb{N}}$ et $(\sin n)_{n \in \mathbb{N}}$ divergent.
- Généraliser aux suites $(\cos n\theta)_{n \in \mathbb{N}}$ et $(\sin n\theta)_{n \in \mathbb{N}}$ où $\theta \in \mathbb{R}$ (on sera amené à distinguer le cas particulier $\theta \equiv 0 \pmod{\pi}$).

Exercice 16: (★★)

- Étudier la suite réelle définie par $a_0 = 0$ et $a_{n+1} = \frac{1}{4} + a_n^2$ pour tout $n \in \mathbb{N}$.
- On note maintenant v la suite complexe définie par $v_0 = 0$ et $v_{n+1} = A + v_n^2$ où $A \in \mathbb{C}$ et $|A| \leq \frac{1}{4}$.
 - Montrer que : $\forall n \in \mathbb{N}, |v_n| \leq |a_n|$.
 - Établir que $\forall n \in \mathbb{N} |v_{n+1} - v_n| \leq |a_{n+1} - a_n|$.
 - En déduire que (v_n) est convergente. Déterminer sa limite.

 **Solution:**

- La suite (a_n) converge (faire un graphique...), sa limite est 1/2.
- Récurrence immédiate.
 - Par récurrence :

$$\begin{aligned} |v_{n+1} - v_n| &= |v_n^2 - v_{n-1}^2| = |v_n - v_{n-1}| \cdot |v_n + v_{n-1}| \\ &\leq |a_n - a_{n-1}| \cdot |a_n + a_{n-1}| = |a_n^2 - a_{n-1}^2| \\ &= |a_{n+1} - a_n|. \end{aligned}$$

- En fait on a du voir au a) que la suite (a_n) est croissante. La série de terme général $a_{n+1} - a_n$, qui est une série à termes positifs, est donc convergente et la question précédente montre, par comparaison de SATP, que la série de terme général $v_{n+1} - v_n$ est absolument convergente; elle est donc convergente, donc la suite v converge.

Exercice 17: (★★)

Soit $z \in \mathbb{C}^*$. Calculer $\lim_{n \rightarrow +\infty} \left(1 + \frac{z}{n}\right)^n$.

 **Solution:**

Posons $z = x + iy$ avec x, y réels. $1 + \frac{z}{n} = \left(1 + \frac{x}{n}\right) + i\frac{y}{n}$. Puisque $\lim_{n \rightarrow +\infty} 1 + \frac{x}{n} = 1$, on aura $1 + \frac{x}{n} > 0$ à partir d'un certain rang d'où $\theta_n = \text{Arg}(z_n) \in]-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}[$ et $\theta_n = \text{Arc tan}\left(\frac{\frac{y}{n}}{1 + \frac{x}{n}}\right)$.

Si on note r_n le module de $1 + \frac{z}{n}$, $r_n = \left((1 + \frac{x}{n})^2 + \frac{y^2}{n^2}\right)^{1/2}$ et finalement $\left(1 + \frac{z}{n}\right)^n = \left((1 + \frac{x}{n})^2 + \frac{y^2}{n^2}\right)^{n/2} e^{in\theta_n}$.

– Puisque $\text{Arc tan } x \sim x$ on aura $\theta_n \sim \frac{y}{n}$ donc $\lim_{n \rightarrow +\infty} n\theta_n = y$.

– D'autre part : $r_n^n = e^{\frac{n}{2} \ln\left(1 + \frac{2x}{n} + \frac{x^2+y^2}{n^2}\right)}$ et puisque $\ln\left(1 + \frac{2x}{n} + \frac{x^2+y^2}{n^2}\right) \sim \frac{2x}{n}$ on obtient $\lim_{n \rightarrow +\infty} r_n^n = e^x$.

Finalement : $\lim_{n \rightarrow +\infty} \left(1 + \frac{z}{n}\right)^n = e^x e^{iy} = e^{x+iy} = e^z$.

Étude de racines d'équations. (ex. 18 à 21)**Exercice 18: (★★★)**

a) Montrer que l'équation $\tan x = x$ possède pour tout entier $n \in \mathbb{Z}$ une unique solution notée x_n dans l'intervalle $]n\pi; n\pi + \frac{\pi}{2}[$.

b) Former le développement asymptotique de x_n lorsque $n \rightarrow +\infty$, à la précision $\frac{1}{n^3}$.

 **Solution:**

a) L'existence et l'unicité de x_n découle facilement de l'étude de la fonction $x \mapsto x - \tan x$ sur $]n\pi; n\pi + \frac{\pi}{2}[$.

b) Puisque $x_n \in]n\pi; n\pi + \frac{\pi}{2}[$, on a déjà $\lim_{n \rightarrow +\infty} x_n = +\infty$.

Posons alors $y_n = x_n - n\pi$. La relation $\tan x_n = x_n$ équivaut à $\tan y_n = y_n + n\pi$ soit à $y_n = \text{Arc tan}(y_n + n\pi)$ puisque $y_n \in]0; \frac{\pi}{2}[$. Pour cette même raison on a $\lim_{n \rightarrow +\infty} (y_n + n\pi) = +\infty$ donc $\lim_{n \rightarrow +\infty} \text{Arc tan}(y_n + n\pi) = \frac{\pi}{2}$ c'est-à-dire $\lim_{n \rightarrow +\infty} y_n = \frac{\pi}{2}$.

Posons alors $z_n = y_n - \frac{\pi}{2}$. On a donc $z_n = \text{Arc tan}(y_n + n\pi) - \frac{\pi}{2} = -\text{Arc tan}\left(\frac{1}{y_n + n\pi}\right)$ puisque l'on sait que $\text{Arc tan } x + \text{Arc tan } \frac{1}{x} = \frac{\pi}{2}$ pour $x > 0$. Ainsi, $z_n = -\text{Arc tan}\left(\frac{1}{z_n + \frac{\pi}{2} + n\pi}\right)$. Puisque $z_n \rightarrow 0$ et que $\text{Arc tan } x \sim x$ on a $z_n \sim -\frac{1}{n\pi}$ soit encore le développement limité $z_n = -\frac{1}{n\pi} + o\left(\frac{1}{n}\right)$.

On a alors le développement limité :

$$\begin{aligned} \frac{1}{n\pi + \frac{\pi}{2} + z_n} &= \frac{1}{n\pi + \frac{\pi}{2} - \frac{1}{n\pi} + o\left(\frac{1}{n}\right)} = \frac{1}{n\pi \left(1 + \frac{1}{2n} - \frac{1}{n^2\pi^2} + o\left(\frac{1}{n^2}\right)\right)} \\ &= \frac{1}{n\pi} \left(1 - \left(\frac{1}{2n} - \frac{1}{n^2\pi^2}\right) + \frac{1}{4n^2} + o\left(\frac{1}{n^2}\right)\right) = \frac{1}{n\pi} - \frac{1}{2n^2\pi} + \frac{4 + \pi^2}{4n^3\pi^3} + o\left(\frac{1}{n^3}\right) \end{aligned}$$

d'où l'on tire, compte tenu du développement limité $\text{Arc tan } x \underset{x \rightarrow 0}{=} x - \frac{x^3}{3} + o\left(\frac{1}{x^3}\right)$:

$$z_n = -\text{Arc tan}\left(\frac{1}{n\pi + \frac{\pi}{2} + z_n}\right) = -\left(\frac{1}{n\pi} - \frac{1}{2n^2\pi} + \frac{4 + \pi^2}{4n^3\pi^3}\right) - \frac{1}{3n^3\pi^3} + o\left(\frac{1}{n^3}\right)$$

et enfin, puisque $x_n = y_n + n\pi = z_n + \frac{\pi}{2} + n\pi$:

$$x_n = n\pi + \frac{\pi}{2} - \frac{1}{n\pi} + \frac{1}{2n^2\pi} - \frac{1}{n^3\pi^3} \left(\frac{4}{3} + \frac{\pi^2}{4}\right) + o\left(\frac{1}{n^3}\right).$$

Exercice 19: (★★★)

On désigne par x_n la racine réelle de l'équation : $x + \ln x = n$ ($n \in \mathbb{N}^*$).

Justifier l'existence de x_n , et donner un développement asymptotique à deux termes de x_n quand $n \rightarrow +\infty$.

 **Solution:**

- $f : x \mapsto x + \ln x$ est facilement une bijection continue strictement croissante de $\mathbb{R}_+^*$ sur $\mathbb{R}$, d'où l'existence et l'unicité de $x_n = f^{-1}(n)$ et $\lim_{n \rightarrow +\infty} x_n = +\infty$.
- $x_n + \ln(x_n) = n$ soit $x_n \left(1 + \frac{\ln x_n}{n}\right) = n$ et puisque $\lim_{X \rightarrow +\infty} \frac{\ln X}{X} = 0$ on en déduit $x_n \sim n$.
- On pose $x_n = n(1 + y_n)$ avec $\lim_{n \rightarrow +\infty} y_n = 0$. On a $n = x_n + \ln(x_n) = n(1 + y_n) + \ln n + \ln(1 + y_n)$ et puisque $\ln(1 + y_n) = y_n + o(y_n)$ on en déduit $(n + 1)y_n = -\ln n + o(y_n) \sim -\ln n$ puis $y_n \sim -\frac{\ln n}{n}$.
Finalement : $x_n = n \left(1 - \frac{\ln n}{n} + o\left(\frac{\ln n}{n}\right)\right) = n - \ln n + o(\ln n)$.
- En poursuivant, avec la même méthode, on trouverait que

$$x_n = n - \ln n + \frac{\ln n}{n} + o\left(\frac{\ln n}{n}\right).$$

Exercice 20: (★★★)

On désigne par x_n ($n \geq 3$) la racine de l'équation : $x^n - nx + 1 = 0$, $x \in]0; 1[$.

Justifier l'existence de x_n , et donner un équivalent de x_n quand $n \rightarrow +\infty$.

 **Solution:**

- Il suffit d'étudier les variations de $f_n : x \mapsto x^n - nx + 1$ sur $[0, 1]$ (avec $n \geq 3$).
- On a alors $x_n = \frac{x_n^n + 1}{n}$ donc $0 \leq x_n \leq \frac{2}{n}$ et $\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = 0$.
- Il en résulte $\lim_{n \rightarrow \infty} x_n^n = 0$ d'où $x_n \sim \frac{1}{n}$.
- on peut faire mieux : $x_n - \frac{1}{n} = \frac{1}{n}x_n^n = \frac{1}{n}e^{n \ln x_n} = \frac{1}{n}e^{n \ln\left(\frac{x_n^n + 1}{n}\right)} = \frac{1}{n}e^{-n \ln n + \ln(x_n^n + 1)} = \frac{1}{n^{n+1}}e^{n(x_n^n + o(x_n^n))}$ et puisque $x_n < \frac{1}{2}$ pour n assez grand on a $\lim_{n \rightarrow +\infty} n x_n^n = 0$ et finalement $x_n - \frac{1}{n} \sim \frac{1}{n^{n+1}}$...

Exercice 21: (★★★)

Montrer que l'équation $x^n + x - 1 = 0$ ($n \in \mathbb{N}^*$) admet une et une seule solution positive, noté u_n .

Montrer que $\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n = 1$ et que $1 - u_n \sim \frac{\ln(n)}{n}$.

 **Solution:**

- On étudie la fonction $g_n : x \mapsto x^n + x - 1$ sur $\mathbb{R}_+$, et on trouve qu'elle admet une et une seule racine dans $]0, 1[$.
- On a ensuite $g_{n+1}(u_n) = u_n^{n+1} + u_n - 1 < u_n^n + u_n - 1 = 0$, et d'après les variations de $g_{n+1} : u_{n+1} > u_n$ et la suite $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ est croissante. Comme elle est majorée par 1, elle converge, vers $\ell \in]0, 1[$. Or $\forall n \in \mathbb{N}^*$, $u_n = (1 - u_n)^{\frac{1}{n}}$, et par passage à la limite quand $n \rightarrow +\infty : \ell = 1$.
- $1 - u_n = u_n^n$ donc $\ln(1 - u_n) = n \ln u_n \sim n(u_n - 1)$ donc $1 - u_n \sim -\frac{\ln(1 - u_n)}{n}$ (*) puis (on peut ici composer par $\ln$ car...) : $\ln(1 - u_n) \sim \ln(-\ln(1 - u_n)) + \ln(1/n)$ et puisque $\ln x \underset{x \rightarrow +\infty}{=} o(x)$ on a $\ln(-\ln(1 - u_n)) = o(\ln(1 - u_n))$ donc $\ln(1 - u_n) \sim \ln(1/n) = -\ln n$ et on remplace dans (*).