EXERCICES : INTÉGRATION SUR UN SEGMENT, AVEC CORRIGÉS

Calcul d'intégrales (ex. 1 à 6)

Exercice 1: (⋆) - (⋆⋆)

Calculer les intégrales suivantes :

1. $\displaystyle\int_0^1 \ln(1+x^2)\,\mathrm{d}x$
2. $\displaystyle\int_0^1 \operatorname{Arc}\tan x\,\mathrm{d}x$
3. $\displaystyle\int_0^1 x\operatorname{Arc}\tan\left(\frac{x}{x-1}\right)\mathrm{d}x$
4. $\displaystyle\int_1^2 \big(\ln(2x)\big)^2\,\mathrm{d}x$
5. $\displaystyle\int_0^{\frac{\pi}{4}} \ln(1+\tan x)\,\mathrm{d}x$ (poser $x=\dfrac{\pi}{4}-u$)
6. $\displaystyle\int_3^4 \frac{2x-4}{x^3-3x+2}\,\mathrm{d}x$
7. $\displaystyle\int_1^{5/2} \sqrt{-x^2+2x+8}\,\mathrm{d}x$
8. $\displaystyle\int_0^1 \frac{1}{\mathrm{e}^x+1}\,\mathrm{d}x$
9. $\displaystyle\int_0^1 \sqrt{1-x^2}\,\mathrm{d}x$
10. $\displaystyle\int_2^5 \frac{x}{\sqrt{x-1}}\,\mathrm{d}x$
11. $\displaystyle\int_0^{\sqrt{2}/2} \frac{\mathrm{d}x}{(2x^2+1)\sqrt{x^2+1}}$
12. $\displaystyle\int_{-1}^0 \frac{\sqrt{1+x}}{1+\sqrt[3]{1+x}}\,\mathrm{d}x$
13. $\displaystyle\int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{3}} \frac{\cos^4 x}{\sin^6 x}\,\mathrm{d}x$
14. $\displaystyle\int_0^{\frac{\pi}{4}} x(\tan^2 x+\tan^4 x)\,\mathrm{d}x$
15. $\displaystyle\int_0^{2\pi} \frac{\mathrm{d}x}{3+\cos x}$
16. $\displaystyle\int_0^{\pi} \frac{1-\cos\left(\frac{x}{3}\right)}{\sin\left(\frac{x}{2}\right)}\,\mathrm{d}x$
17. $\displaystyle\int_{\frac{\pi}{3}}^{\frac{\pi}{2}} \frac{\mathrm{d}x}{\sin x+\sin(2x)}$
18. $\displaystyle\int_0^{\frac{\pi}{4}} \frac{\cos x-\sin x}{1+\cos^2 x}\,\mathrm{d}x$

✎ *Solution:*

Dans le corrigé, les intégrales à calculer seront notées I_x où x est le numéro de l'exercice.

1. La fonction $x\mapsto \ln(1+x^2)$ est continue sur $[0\,;1]$, donc l'intégrale existe. Cette fonction est même de classe $\mathscr{C}^1$ donc il est possible de faire une intégration par parties :

$$I_1=-\int_0^1 \frac{x\cdot 2x}{1+x^2}\,\mathrm{d}x+\Big[x\ln(1+x^2)\Big]_0^1$$

et le terme entre crochets vaut $\ln 2$. L'intégrale vaut

$$-\int_0^1 \frac{2((x^2+1)-1}{1+x^2}\,\mathrm{d}x=-2\int_0^1\frac{1+x^2}{1+x^2}\,\mathrm{d}x+2\int_0^1\frac{1}{1+x^2}\,\mathrm{d}x=-2+2\frac{\pi}{4},$$

ce qui donne au total $I_1=\frac{\pi}{2}+\ln 2-2$.

2. On fait une intégration par parties (en dérivant $\operatorname{Arc}\tan$ et en intégrant la constante 1) :

$$I_2=\left[x\operatorname{Arc}\tan x-\frac{1}{2}\ln(x^2+1)\right]_0^1=\frac{\pi}{4}+\frac{\ln 2}{2}\cdot$$

3. La fonction $x\mapsto x\operatorname{Arc}\tan\left(\dfrac{x}{x-1}\right)$ est continue sur $[0\,;1[$ (problème en 1), mais se prolonge par continuité en 1^- donc l'intégrale existe. On a donc $I_3=\displaystyle\lim_{X\to 1}\int_0^X x\operatorname{Arc}\tan\left(\frac{x}{x-1}\right)\mathrm{d}x$ puis on fait une intégration par parties (licite car toutes les fonctions sont de classe $\mathscr{C}^1$) :

$$\int_0^X \underbrace{x}_{u'}\underbrace{\operatorname{Arc}\tan\left(\frac{x}{x-1}\right)}_{v}\mathrm{d}x=\left[\frac{x^2}{2}\operatorname{Arc}\tan\left(\frac{x}{x-1}\right)\right]_0^X+\frac{1}{2}\int_0^X\frac{x^2}{(x-1)^2+x^2}\,\mathrm{d}x.$$

Quand $x \to 1^-$, $\operatorname{Arctan}\left(\dfrac{x}{x-1}\right) \to -\frac{\pi}{2}$ donc $I_3 = -\frac{\pi}{4} + \underbrace{\dfrac{1}{2}\displaystyle\int_0^1 \dfrac{x^2}{(x-1)^2+x^2}\,\mathrm{d}x}_{J}$. Puis :

$$\begin{aligned} J &= \frac{1}{4}\int_0^1 \frac{x^2}{x^2-x+\frac{1}{2}}\,\mathrm{d}x = \frac{1}{4}\int_0^1 \frac{(x^2-x+\frac{1}{2})+(x-\frac{1}{2})}{x^2-x+\frac{1}{2}}\,\mathrm{d}x \\ &= \frac{1}{4}+\frac{1}{4}\int_0^1 \frac{x-\frac{1}{2}}{x^2-x+\frac{1}{2}}\,\mathrm{d}x = \frac{1}{4}+\frac{1}{4}\left[\frac{1}{2}\ln\left|x^2-x+\frac{1}{2}\right|\right]_0^1. \end{aligned}$$

Finalement : $I_3 = \dfrac{1-\pi}{4}$.

4. On fait une intégration par parties (en dérivant $x \mapsto (\ln(2x))^2$ et en intégrant la constante 1) :

$$I_4 = \left[(\ln(2x))^2\right]_1^2 - \int_1^2 \left(2\ln(2x)\times\frac{1}{x}\times x\right)\mathrm{d}x = \left[(\ln(2x))^2 - 2x\ln(2x)+2x\right]_1^2 = 2-7\ln^2 2 - 6\ln 2.$$

5. Déjà, on note que la fonction $x \mapsto \ln(1+\tan x)$ est continue sur $\left[0\,;\frac{\pi}{4}\right]$ donc l'intégrale existe ; le changement de variable proposé est une bijection de classe $\mathscr{C}^1$ de $\left[0\,;\frac{\pi}{4}\right]$ sur $\left[0\,;\frac{\pi}{4}\right]$ d'où

$$I_5 = \int_0^{\frac{\pi}{4}} \ln(1+\tan x)\,\mathrm{d}x = \int_0^{\frac{\pi}{4}} \ln\left(1+\tan\left(\frac{\pi}{4}-u\right)\right)\mathrm{d}u.$$

Les formules d'addition « bien connues » donnent $\tan\left(\frac{\pi}{4}-u\right) = \dfrac{1-\tan u}{1+\tan u}$ d'où

$$I_5 = \int_0^{\frac{\pi}{4}} \ln\left(\frac{2}{1+\tan u}\right)\mathrm{d}u = \int_0^{\frac{\pi}{4}} \ln 2\,\mathrm{d}u - I_5$$

et finalement : $I_5 = \dfrac{\pi}{8}\ln 2$.

6. On factorise : $x^3-3x+2 = (x-1)^2(x+2)$, ce qui montre que la fonction est continue sur $[3\,;4]$, puis on fait une décomposition en éléments simples :

$$\frac{2x-4}{(x-1)^2(x+2)} = \frac{8/9}{x-1} - \frac{2/3}{(x-1)^2} - \frac{8/9}{x+2}.$$

Cela permet d'obtenir : $I_6 = -\dfrac{1}{9} + 8\dfrac{\ln 5}{9} - 16\dfrac{\ln 2}{9}$.

7. $-x^2+2x+8 = -(x+2)(x-4)$ donc le trinôme est à valeurs positives sur $[1\,;5/2]$ et l'intégrale existe. On écrit le trinôme sous forme canonique :

$$-x^2+2x+8 = 9-(x-1)^2$$

d'où

$$I_7 = \int_1^{5/2} \sqrt{9-(x-1)^2}\,\mathrm{d}x = 3\int_1^{5/2} \sqrt{1-\left(\frac{x-1}{3}\right)^2}\,\mathrm{d}x$$

puis le changement de variable $\frac{x-1}{3} = \sin t$ avec $t \in \left[0\,;\frac{\pi}{6}\right]$ donne

$$I_7 = 9\int_0^{\frac{\pi}{6}} \cos^2 t\,\mathrm{d}t = 9\int_0^{\frac{\pi}{6}} \left(\frac{1+\cos 2t}{2}\right)\mathrm{d}t = \frac{3\pi}{4} + 9\frac{\sqrt{3}}{8}.$$

8. Changement de variable classique : $t = \mathrm{e}^x$. On trouve $I_8 = \left[\ln\dfrac{\mathrm{e}^x}{\mathrm{e}^x+1}\right]_0^1 = 1+\ln 2 - \ln(\mathrm{e}+1)$.

Rem : il y avait encore plus rapide en écrivant le numérateur : $1 = (1+\mathrm{e}^x) - \mathrm{e}^x$, ce qui fait directement apparaître une fraction de la forme u'/u !

9. Soit on pose $x = \sin t$, soit on remarque que I_9 représente l'aire d'un quart de disque de rayon 1.
Donc $I_9 = \dfrac{\pi}{4}$.

10. Bien sûr, il y a le changement de variable classique $t = \sqrt{x-1}$ mais, plus astucieusement :

$$\begin{aligned} I_{10} &= \int_2^5 \frac{(x-1)+1}{\sqrt{x-1}}\,\mathrm{d}x = \int_2^5 \sqrt{x-1}\,\mathrm{d}x + \int_2^5 \frac{\mathrm{d}x}{\sqrt{x-1}} \\ &= \int_2^5 (x-1)^{1/2}\,\mathrm{d}x + \int_2^5 (x-1)^{-1/2}\,\mathrm{d}x = \left[\frac{2}{3}(x-1)^{3/2} + 2(x-1)^{1/2}\right]_2^5 = \frac{20}{3}. \end{aligned}$$

11. Soit α le réel tel que $\operatorname{sh}\alpha = \frac{\sqrt{2}}{2}$ (α existe puisque la fonction sh réalise une bijection de $\mathbb{R}$ sur $\mathbb{R}$).
Le changement de variable $x = \operatorname{sh} t$ donne

$$I_{11} = \int_0^{\sqrt{2}/2} \frac{\mathrm{d}x}{(2x^2+1)\sqrt{x^2+1}} = \int_0^{\alpha} \frac{\operatorname{ch} t\,\mathrm{d}t}{(1+2\operatorname{sh}^2 t)\sqrt{1+\operatorname{sh}^2 t}} \qquad (\sqrt{1+\operatorname{sh}^2 t} = \sqrt{\operatorname{ch}^2 t} = \operatorname{ch} t)$$
$$= \int_0^{\alpha} \frac{\mathrm{d}t}{1+2\left(\dfrac{\mathrm{e}^t - \mathrm{e}^{-t}}{2}\right)^2} = \int_0^{\alpha} \frac{2\,\mathrm{d}t}{\mathrm{e}^{2t}+\mathrm{e}^{-2t}}$$

En posant alors $u = \mathrm{e}^{2t}$, on obtient :

$$I_{11} = \int_1^{\mathrm{e}^{2\alpha}} \frac{\mathrm{d}u}{u\left(u+\frac{1}{u}\right)} = \int_1^{\mathrm{e}^{2\alpha}} \frac{\mathrm{d}u}{u^2+1} = \operatorname{Arc\,tan}(\mathrm{e}^{2\alpha}) - \operatorname{Arc\,tan} 1.$$

Il reste à calculer $\mathrm{e}^{2\alpha}$; sachant que $\operatorname{sh}\alpha = \frac{\sqrt{2}}{2}$, on a $\operatorname{sh}^2\alpha = \frac{1}{2}$ d'où $\mathrm{e}^{2\alpha} + \mathrm{e}^{-2\alpha} = 4$ et $\mathrm{e}^{2\alpha}$ est la + grande racine de l'équation $X + \frac{1}{X} = 4$ donc $\mathrm{e}^{2\alpha} = 2+\sqrt{3}$. On peut calculer $\tan\left(\dfrac{5\pi}{12}\right) = \tan\left(\dfrac{\pi}{4}+\dfrac{\pi}{6}\right) = 2+\sqrt{3}$ donc $\operatorname{Arc\,tan}(2+\sqrt{3}) = \dfrac{5\pi}{12}$ et finalement :

$$I_{11} = \frac{5\pi}{12} - \frac{\pi}{4} = \frac{\pi}{6}\,.$$

12. $I_{12} = -\dfrac{3\pi}{2} - \dfrac{152}{35}\cdot$ Poser $t = \sqrt[6]{1+x}$.

13. $I_{13} = -\dfrac{1}{5}(3^{-5/2}-1)$. Poser $t = \tan x$.

14. $I_{14} = \dfrac{\ln 2 - 1}{6} + \dfrac{\pi}{12}\cdot$ On fait apparaître $(1+\tan^2 x)\,\mathrm{d}x = \mathrm{d}u$ avec $u = \tan x$ soit $x = \operatorname{Arc\,tan} u$ donc changement de variable puis intégration par parties.

15. $I_{15} = \dfrac{\pi\sqrt{2}}{2}\cdot$ Petit piège : remarquer déjà que l'intégrale de π à 2π est égale à celle sur $[0\,;\pi]$ par le changement de variable $t \mapsto 2\pi - t$! Ensuite, sur $[0\,;\pi[$, on peut faire le changement de variable classique $t = \tan\left(\frac{x}{2}\right)\cdot$

16. $I_{16} = 3\ln\left(\dfrac{2+\sqrt{3}}{3}\right)$. Poser $x = 6t$ et utiliser $\cos(2t) = 1 - 2\sin^2 t$ et $\sin(3t) = -4\sin^3 t + 3\sin t$ puis poser $u = \cos t$.

17. $I_{17} = \dfrac{4}{3}\ln 2 - \dfrac{1}{2}\ln 3$. $I_{17} = \displaystyle\int_{\frac{\pi}{3}}^{\frac{\pi}{2}} \frac{\mathrm{d}x}{\sin x(1+2\cos x)} = \int_{\frac{\pi}{3}}^{\frac{\pi}{2}} \frac{\sin x\,\mathrm{d}x}{\sin^2 x(1+2\cos x)}$ donc le changement de variable $t = \cos x$ saute aux yeux.

18. $I_{18} = \dfrac{\sqrt{2}\ln 3}{4} - \dfrac{\pi}{4} + \operatorname{Arc\,tan}\left(\dfrac{\sqrt{2}}{2}\right)\cdot$ Couper simplement l'intégrale en deux ; dans l'une on reconnaît la dérivée de $\operatorname{Arc\,tan} u$ et dans l'autre on pose naturellement $t = \cos x$

Exercice 2: ($\star$)

Calculer les primitives suivantes, en précisant les intervalles sur lesquels elles sont définies :

1. $\displaystyle\int \frac{x^3+2x}{x^2+x+1}\,\mathrm{d}x$
2. $\displaystyle\int \frac{4x^2}{x^4-1}\,\mathrm{d}x$
3. $\displaystyle\int \frac{x}{\sqrt{x^2-x+1}}\,\mathrm{d}x$
4. $\displaystyle\int \frac{x^2-x+1}{(x^2+4x+5)^2}\,\mathrm{d}x$
5. $\displaystyle\int \frac{\mathrm{d}x}{x(x^2+1)^3}$
6. $\displaystyle\int \frac{\mathrm{d}x}{(x+3)\sqrt{x^2-3x+2}}$
7. $\displaystyle\int \frac{\mathrm{d}x}{\operatorname{ch} x(1+\operatorname{sh} x)}$
8. $\displaystyle\int \frac{\mathrm{d}t}{\sqrt{t}+\sqrt{t^3}}$
9. $\displaystyle\int \frac{\ln t\,\mathrm{d}t}{t+t(\ln t)^2}$
10. $\displaystyle\int \frac{\mathrm{e}^{2t}\,\mathrm{d}t}{\mathrm{e}^t+1}$
11. $\displaystyle\int \frac{\mathrm{d}x}{\cos^6 x}$
12. $\displaystyle\int \frac{\cos^4 x}{\sin^2 x}\,\mathrm{d}x$
13. $\displaystyle\int \cos(\sqrt{t})\,\mathrm{d}t$
14. $\displaystyle\int \operatorname{Arc\,tan}\left(\frac{x+1}{x-2}\right)\,\mathrm{d}x$

✎ *Solution:*

1. $I_1 = \dfrac{x^2}{2} - x + \ln(x^2+x+1)$
2. $I_2 = \ln\left|\dfrac{1-x}{1+x}\right| + 2\operatorname{Arc}\tan x$
3. $I_3 = \sqrt{x^2+x+1} - \dfrac{1}{2}\ln\left|x - \frac{1}{2} + \sqrt{x^2-x+1}\right|$
4. $I_4 = \dfrac{3x+\frac{17}{2}}{x^2+4x+5} + 4\operatorname{Arc}\tan(x+2)$
5. $I_5 = \dfrac{1}{2(x^2+1)} + \dfrac{1}{4(x^2+1)^2} - \dfrac{1}{2}\ln(x^2+1) + \ln|x|$ (poser $t = x^2$)
6. Pour le calcul de I_6, on peut poser $y = \dfrac{1}{x+3}$ (astuce !) qui permet de se ramener à $\displaystyle\int \frac{\mathrm{d}y}{\sqrt{20y^2-9y+1}}$ puis après mise du trinôme sous forme canonique à $\displaystyle\int \frac{\mathrm{d}t}{\sqrt{t^2-a^2}} = \ln\left|t+\sqrt{t^2-a^2}\right|$. C'est un peu affreux...
7. $I_7 = \displaystyle\int \frac{\operatorname{ch} x\,\mathrm{d}x}{\operatorname{ch}^2 x(1+\operatorname{sh} x)}$ donc le changement de variable $t = \operatorname{sh} x$ s'impose. Réponse : $I_7 = \cdots$
8. $I_8 = 2\operatorname{Arc}\tan\sqrt{t}$.
9. $I_9 = \dfrac{1}{2}\ln\left((\ln t)^2+1\right)$.
10. $I_{10} = \mathrm{e}^t - \ln(\mathrm{e}^t+1)$.
11. Poser $t = \tan x$.
12. Poser $t = \cot x$.
13. Poser $u = \sqrt{t}$ puis intégration par parties.
14. intégration par parties.

Exercice 3: ($\star$)

Soit $\lambda \in \mathbb{C}\setminus\mathbb{R}$, $a = \mathcal{R}e(\lambda)$ et $b = \mathcal{I}m(\lambda)$. Établir :

$$\int \frac{\mathrm{d}t}{t-\lambda} = \ln|t-\lambda| + \mathrm{i}\operatorname{Arc}\tan\left(\frac{t-a}{b}\right) + cste$$

✎ *Solution:*

On cherche simplement les parties réelle et imaginaire de la fonction $t \mapsto \dfrac{1}{t-\lambda}$.

$$\frac{1}{t-\lambda} = \frac{t-\overline{\lambda}}{|t-\lambda|^2} = \frac{t-a}{(t-a)^2+b^2} - \mathrm{i}b\frac{1}{(t-a)^2+b^2}$$

d'où le résultat en intégrant.

Exercice 4: ($\star$)

Pour p et q entiers naturels, on pose : $I_{p,q} = \displaystyle\int_a^b (t-a)^p(b-t)^q\,\mathrm{d}t$.

a) Former une relation de récurrence liant $I_{p,q}$ et $I_{p+1,q-1}$.

b) Donner une expression de $I_{p,q}$ à l'aide de factorielles.

✎ *Solution:*

a) Pour $p \in \mathbb{N}$ et $q \in \mathbb{N}^*$ on fait une intégration par parties :

$$I_{p,q} = \int_a^b \underbrace{(t-a)^p}_{u'}\underbrace{(b-t)^q}_{v}\,\mathrm{d}t = \underbrace{\left[\frac{(t-a)^{p+1}}{p+1}(b-t)^q\right]_a^b}_{=0 \text{ car } p+1\geqslant 1,\ q\geqslant 1} + \frac{q}{p+1}\int_a^b (t-a)^{p+1}(b-t)^q\,\mathrm{d}t.$$

La relation demandée est donc :

$$\forall (p,q) \in \mathbb{N}\times\mathbb{N}^*,\ I_{p,q} = \frac{q}{p+1}I_{p+1,q-1}.$$

b) En itérant :

$$I_{p,q} = \frac{q}{p+1} I_{p+1,q-1} = I_{p,q} = \frac{q}{p+1} \cdot \frac{q-1}{p+2} I_{p+2,q-2} = \cdots = \frac{q(q-1)\cdots 1}{(p+1)(p+2)\cdots(p+q)} I_{p+q,0}$$

Puisque $I_{p+q,0} = \displaystyle\int_a^b (t-a)^{p+q}\,\mathrm{d}t = \frac{(b-a)^{p+q+1}}{p+q+1}$ on en déduit :

$$I_{p,q} = \frac{p!\,q!}{(p+q+1)!}(b-a)^{p+q+1}.$$

Exercice 5: (⋆⋆)

Pour $n \in \mathbb{N}$, on pose : $u_n = \displaystyle\int_0^1 \frac{\mathrm{d}x}{1+x^n}$.

a) Calculer u_0, u_1, u_2.

b) Montrer que (u_n) est une suite strictement croissante.

c) Montrer que $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = 1$.

d) Montrer que : $\forall\, n \in \mathbb{N}^*$, $\displaystyle\int_0^1 \frac{x^n\,\mathrm{d}x}{1+x^n} = \frac{\ln 2}{n} - \frac{1}{n}\int_0^1 \ln(1+x^n)\,\mathrm{d}x$.

e) Montrer que $\lim\limits_{n\to+\infty} \displaystyle\int_0^1 \ln(1+x^n)\,\mathrm{d}x = 0$ et en déduire que : $u_n = 1 - \dfrac{\ln 2}{n} + o\left(\dfrac{1}{n}\right)$.

Exercice 6: (⋆⋆)

On pose, pour tout $n \in \mathbb{N}$: $a_n = \dfrac{1}{\pi}\displaystyle\int_{-\pi}^{\pi} \frac{\cos nx}{4\cos x - 5}\,\mathrm{d}x$.

a) Calculer a_0 et a_1.

b) Calculer $a_n + a_{n+2}$. En déduire une relation de récurrence sur les a_n.

c) Déterminer a_n pour tout $n \in \mathbb{N}$.

✎ *Solution:*

1. On effectue le changement de variable $t = \tan\frac{x}{2}$. Alors $\cos x = \frac{1-t^2}{1+t^2}$ et $\mathrm{d}x = \frac{2}{1+t^2}\,\mathrm{d}t$, ce qui mène à $a_0 = \frac{1}{2\pi}\displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{\frac{2}{1+t^2}}{\frac{1-t^2}{1+t^2} - \frac{5}{4}}\,\mathrm{d}t = -\frac{4}{\pi}\int_0^{+\infty} \frac{1}{1+9t^2}\,\mathrm{d}t$.

En effectuant le changement de variable $u = 3t$, on obtient $u_0 = -\frac{4}{\pi}\displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{1}{1+u^2}\frac{\mathrm{d}u}{3} = -\frac{4}{3\pi}\underbrace{\int_0^{+\infty} \frac{1}{1+u^2}\,\mathrm{d}u}_{\pi/2}$

soit $u_0 = -\dfrac{2}{3}$.

Avec le même changement de variable, on a $a_1 = \dfrac{2}{\pi}\displaystyle\int_0^{\pi} \frac{\cos x}{4\cos x + 5}\,\mathrm{d}x = -\frac{4}{\pi}\int_0^{+\infty} \frac{1-t^2}{(1+9t^2)(1+t^2)}\,\mathrm{d}t$.

On réduit alors en éléments simples, en remarquant que seul t^2 apparaît dans l'intégrande.

On calcule, selon les techniques habituelles, que $\dfrac{1-X}{(1+9X)(1+X)} = \dfrac{5/4}{1+9X} - \dfrac{1/4}{1+X}$, ce qui mène à $a_1 = -\dfrac{4}{\pi}\displaystyle\int_0^{+\infty}\left[\frac{5/4}{1+9t^2} - \frac{1/4}{1+t^2}\right]\mathrm{d}t = -\frac{4}{\pi}\left[\frac{5}{4}\frac{\pi}{6} - \frac{1}{4}\frac{\pi}{2}\right]$ soit $a_1 = -\dfrac{1}{3}$.

Remarque : il était plus astucieux d'écrire le numérateur $\cos x = \dfrac{1}{4}(4\cos x + 5) - \dfrac{5}{4}$, *ce qui permet d'utiliser directement le 1er calcul.*

2. Soit $n \in \mathbb{N}$. Les formules usuelles de trigonométrie nous enseignent que $\cos\big((n+2)x\big) + \cos nx = 2\cos x\cos\big((n+1)x\big)$.

On obtient donc $a_{n+2} + a_n = \dfrac{2}{\pi}\displaystyle\int_{-\pi}^{\pi} \frac{\cos x\cos\big((n+1)x\big)}{4\cos x + 5}\,\mathrm{d}x$.

Forçons maintenant l'apparition au numérateur de $4\cos x - 5$:

$$a_{n+2} + a_n = \frac{2}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} \frac{\frac{1}{4}[4\cos x - 5]\cos\big((n+1)x\big) + \frac{5}{4}\cos\big((n+1)x\big)}{4\cos x - 5}\,\mathrm{d}x,$$

soit
$$a_{n+2}+a_n=\frac{1}{2\pi}\underbrace{\int_{-\pi}^{\pi}\cos nx\,\mathrm{d}x}_{0}+\frac{5}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi}\frac{\cos nx}{4\cos x-5}\,\mathrm{d}x=\frac{5}{2}\,a_{n+1}.$$
On a donc montré $\forall\, n\in\mathbb{N},\quad a_{n+2}-\frac{5}{2}\,a_{n+1}+a_n=0$

3. Notons $P=X^2-\frac{5}{2}X+1$ le polynôme caractéristique de la relation de récurrence linéaire du second ordre trouvé précédemment. Ses racines sont $\lambda=2$ et $\mu=\frac{1}{2}$.On sait alors d'après le cours que les suites satisfaisant la relation de récurrence ci-dessus sont de la forme $a_n=\alpha\,\dfrac{1}{2^n}+\beta\,2^n$, avec $\alpha,\beta\in\mathbb{R}$.

Les conditions initiales $a_0=-2/3$ et $a_1=-1/3$ permettent d'écrire $\begin{cases}\alpha+\beta=-\dfrac{2}{3}\\[2mm] \dfrac{\alpha}{2}+2\beta=-\dfrac{1}{3},\end{cases}$ d'où $\alpha=-2/3$ et $\beta=0$. Donc :
$$\forall\, n\in\mathbb{N},\quad a_n=-\frac{1}{3\cdot 2^{n-1}}\,.$$

Sommes de Riemann (ex. 7 à 8)

Exercice 7: (⋆) - (⋆⋆)

Déterminer les limites des suites ci-dessous :

1. $\displaystyle\frac{1}{n^\alpha}\sum_{k=0}^{n}\frac{k^2+n}{kn+n^2}$

2. $\displaystyle\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{\sqrt{n^2+nk+k^2}}$

3. $\displaystyle\frac{1}{n}\prod_{k=1}^{n}\sqrt[n]{n+k}$

4. $\displaystyle\sqrt[n]{\prod_{k=1}^{n}\left(1+\frac{k^2}{n^2}\right)}$

5. $\displaystyle\sum_{k=1}^{n}\sin\left(\frac{1}{n+k}\right)$

6. $\displaystyle\sum_{k=10}^{n+1999}\frac{k}{(n+k)^2}$

7. $\displaystyle\sum_{k=1}^{2n}\frac{k}{(n+k)^2}$

8. $\displaystyle\sum_{k=1}^{n^2}\frac{k}{(n+k)^2}$

✎ *Solution:*

1. Soit $u_n=\displaystyle\sum_{k=0}^{n}\frac{k^2+n}{kn+n^2}\cdot$ On a :
$$u_n=\sum_{k=0}^{n}\frac{\frac{k^2}{n^2}+\frac{1}{n}}{1+\frac{k}{n}}=\underbrace{\frac{1}{n}\sum_{n=0}^{n}\frac{1}{1+\frac{k}{n}}}_{=v_n}+\underbrace{\sum_{k=1}^{n}\frac{\frac{k^2}{n^2}}{1+\frac{k}{n}}}_{=w_n}\,.$$
Dans cette expression :

- v_n est une somme de Riemann associée à la fonction continue $x\mapsto\dfrac{1}{1+x}$ sur $[0\,;1]$ (subdivision en n intervalles de longueur $\frac{1}{n}$; il y a une valeur en plus par rapport à la formule habituelle, mais ce terme tend vers 0), donc $\displaystyle\lim_{n\to+\infty}v_n=\int_0^1\frac{\mathrm{d}x}{1+x}=\ln 2.$
- $\dfrac{w_n}{n}=\displaystyle\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n}\frac{\frac{k^2}{n^2}}{1+\frac{k}{n}}$ est une somme de Riemann associée à la fonction continue $x\mapsto\dfrac{x^2}{1+x}$ sur $[0\,;1]$ donc
$$\lim_{n\to+\infty}\frac{w_n}{n}=\int_0^1\frac{x^2\,\mathrm{d}x}{1+x}=\int_0^1\frac{(x^2-1)+1\,\mathrm{d}x}{1+x}=\int_0^1\left(x-1+\frac{1}{1+x}\right)\mathrm{d}x=\ln 2-\frac{1}{2}\,\cdot$$

Ainsi, $w_n\underset{n\to+\infty}{\sim}\left(\ln 2-\frac{1}{2}\right)n$ donc $u_n\underset{n\to+\infty}{\sim}\left(\ln 2-\frac{1}{2}\right)n$. La suite proposée étant égale à $\dfrac{u_n}{n^\alpha}$ sa limite s'en déduit aisément selon les valeurs de α (séparer les cas $\alpha<1$, $\alpha=1$ et $\alpha>1$).

2. Notons $u_n=\displaystyle\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{\sqrt{n^2+nk+k^2}}\cdot$ On peut écrire :
$$u_n=\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{\sqrt{1+\frac{k}{n}+\frac{k^2}{n^2}}}$$
donc u_n est une somme de Riemann associée à la fonction continue $x\mapsto\dfrac{1}{\sqrt{1+x+x^2}}$ sur $[0\,;1]$ (subdivision en n intervalles de longueur $\frac{1}{n}$). Ainsi, $\displaystyle\lim_{n\to+\infty}u_n=I=\int_0^1\frac{\mathrm{d}x}{\sqrt{1+x+x^2}}\cdot$ Il ne reste plus qu'à calculer cette

intégrale.

$$I=\int_0^1 \frac{\mathrm{d}x}{\sqrt{(x+\frac{1}{2})^2+\frac{3}{4}}}=\left[\ln\left(x+\frac{1}{2}+\sqrt{1+x+x^2}\right)\right]_0^1=\ln\left(1+\frac{2\sqrt{3}}{3}\right).$$

(puisque l'on « sait » qu'une primitive de $x\mapsto \dfrac{1}{\sqrt{x^2+a^2}}$ est égale à $x\mapsto \ln(x+\sqrt{x^2+a^2})$).

3. Il y a ici une petite astuce ; il faut commencer par transformer l'expression de l'énoncé :

$$u_n=\frac{1}{n}\prod_{k=1}^{n}\sqrt[n]{n+k}=\frac{1}{\left(\sqrt[n]{n}\right)^n}\prod_{k=1}^{n}\sqrt[n]{n+k}=\prod_{k=1}^{n}\frac{\sqrt[n]{n+k}}{\sqrt[n]{n}}=\prod_{k=1}^{n}\sqrt[n]{1+\frac{k}{n}}.$$

Donc $\ln u_n = \dfrac{1}{n}\displaystyle\sum_{k=1}^{n}\ln\left(1+\frac{k}{n}\right)$, et $\ln u_n$ est une somme de Riemann associée à la fonction continue $x\mapsto \ln(1+x)$ sur $[0\,;1]$ (subdivision en n intervalles de longueur $\frac{1}{n}$).

On en déduit que $\displaystyle\lim_{n\to+\infty}\ln u_n=\int_0^1\ln(1+x)\,\mathrm{d}x=\int_1^2\ln x\,\mathrm{d}x=\left[x\ln x-x\right]_1^2=2\ln 2-1$.

Finalement, $\displaystyle\lim_{n\to+\infty}u_n=\mathrm{e}^{2\ln 2-1}=\frac{4}{\mathrm{e}}\cdot$

4. En notant u_n la suite de l'énoncé, on a :

$$\ln u_n=\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n}\ln\left(1+\frac{k^2}{n^2}\right)$$

donc (voir détails dans les exercices précédents), $\displaystyle\lim_{n\to+\infty}\ln u_n=\int_0^1\ln(1+x^2)\,\mathrm{d}x=\frac{\pi}{2}+\ln 2-2$ (voir calcul dans l'exercice 1) puis $\displaystyle\lim_{n\to+\infty}u_n=2\mathrm{e}^{\frac{\pi}{2}-2}$.

5. Il ne s'agit pas ici directement d'une somme de Riemann, mais on peut s'y ramener.
Pour cela, on écrit : $\sin x = x+\varphi(x)$, où $\varphi(x)=O(x^3)$, c'est-à-dire $|\varphi(x)|\leqslant Mx^3$ dans un voisinage V de 0.
Donc $u_n=\underbrace{\displaystyle\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{n+k}}_{v_n}+\underbrace{\displaystyle\sum_{k=1}^{n}\varphi\left(\frac{1}{n+k}\right)}_{w_n}$.

Classiquement, $\displaystyle\lim_{n\to\infty}v_n=\ln 2$ (déjà fait plusieurs fois).

D'autre part, pour n assez grand, $\dfrac{1}{n+k}\in V$ pour tout $k\in[\![1\,;n]\!]$ donc

$$|w_n|=\left|\sum_{k=1}^{n}\varphi\left(\frac{1}{n+k}\right)\right|\leqslant\sum_{k=1}^{n}\left|\varphi\left(\frac{1}{n+k}\right)\right|\leqslant M\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{(n+k)^3}\leqslant M\frac{n}{n^3}=\frac{M}{n^2}$$

ce qui prouve que $\displaystyle\lim_{n\to\infty}w_n=0$.

Finalement, $\displaystyle\lim_{n\to\infty}u_n=\ln 2$.

6. $u_n=\displaystyle\sum_{k=10}^{n+1999}\frac{k}{(n+k)^2}=\frac{1}{n}\sum_{k=10}^{n+1999}\frac{\frac{k}{n}}{\left(1+\frac{k}{n}\right)^2}=\frac{1}{n}\sum_{k=10}^{n+1999}f\left(\frac{k}{n}\right)$ en notant $f(x)=\dfrac{x}{(1+x)^2}\cdot$ Donc :

$$u_n=\underbrace{\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n}f\left(\frac{k}{n}\right)}_{=x_n}-\underbrace{\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{9}f\left(\frac{k}{n}\right)}_{=y_n}+\underbrace{\frac{1}{n}\sum_{k=n+1}^{n+1999}f\left(\frac{k}{n}\right)}_{=z_n}.$$

Or la fonction f est bornée sur $\mathbb{R}_+$; pour le vérifier, on peut étudier ses variations, ou mieux, remarquer que f est continue sur $[0\,;+\infty[$ donc bornée sur tout segment $[0\,;A]$, et admet une limite finie en $+\infty$. On aura donc :

$$|y_n|\leqslant\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{9}\left|f\left(\frac{k}{n}\right)\right|\leqslant\frac{9}{n}\|f\|_\infty\qquad\text{et}\qquad|z_n|\leqslant\frac{1999}{n}\|f\|_\infty$$

donc $\displaystyle\lim_{n\to+\infty}y_n=\lim_{n\to+\infty}z_n=0$.

Enfin, x_n est une somme de Riemann associée à la fonction continue f sur $[0\,;1]$ (subdivision en n intervalles de longueur $\frac{1}{n}$) donc finalement :

$$\lim_{n\to+\infty}u_n=\lim_{n\to+\infty}x_n=\int_0^1\frac{x}{(x+1)^2}\,\mathrm{d}x=\int_0^1\frac{(x+1)-1}{(x+1)^2}\,\mathrm{d}x=\left[\ln(x+1)+\frac{1}{1+x}\right]_0^1=\ln 2-\frac{1}{2}\cdot$$

7. $u_n = \sum_{k=1}^{2n} \frac{k}{(n+k)^2} = \frac{1}{n}\sum_{k=1}^{2n} \frac{\frac{k}{n}}{\left(1+\frac{k}{n}\right)^2}$, donc u_n est une somme de Riemann associée à la fonction continue $x \mapsto \frac{x}{(x+1)^2}$ sur $[0;2]$ (subdivision en $2n$ intervalles de longueur $\frac{1}{n}$) donc finalement :

$$\lim_{n\to+\infty} u_n = \int_0^2 \frac{x}{(x+1)^2}\,\mathrm{d}x = \int_0^2 \frac{(x+1)-1}{(x+1)^2}\,\mathrm{d}x = \left[\ln(x+1) + \frac{1}{1+x}\right]_0^2 = \ln 3 - \frac{2}{3}\cdot$$

8. Ici, $u_n = \sum_{k=1}^{n^2} \frac{k}{(n+k)^2}$ ne se ramène pas à une somme de Rieman comme les deux exercices précédents !

Nous allons montrer que $\lim_{n\to+\infty} u_n = +\infty$ par une méthode du type « comparaison série-intégrale ».

Soit $n \in \mathbb{N}^*$ fixé et $f : x \mapsto \frac{x}{(x+n)^2}$ pour $x \in \mathbb{R}_+$. Un calcul de dérivée rapide montre que f est décroissante sur $[n;+\infty[$ donc :

$$\forall k \geqslant n,\ f(k) \geqslant \int_k^{k+1} f(x)\,\mathrm{d}x.$$

On en déduit, par sommation et à l'aide de la relation de Chasles :

$$u_n \geqslant \sum_{k=n}^{n^2} \frac{k}{(n+k)^2} \geqslant \int_n^{n^2+1} \frac{x}{(x+n)^2}\,\mathrm{d}x = \int_n^{n^2+1} \frac{(x+n)-n}{(x+n)^2}\,\mathrm{d}x = \left[\ln(x+n) + \frac{n}{x+n}\right]_n^{n^2+1}$$

Je vous laisse finir les calculs pour montrer que cela implique $\lim_{n\to+\infty} u_n = +\infty$.

Exercice 8: (⋆⋆)

1. Calculer : $I(a) = \int_0^\pi \ln(1-2a\cos x + a^2)\,\mathrm{d}x$ $(a \in \mathbb{R}\setminus\{-1,1\})$ en utilisant des sommes de Riemann.
2. Même question pour : $J = \int_0^{2\pi} \frac{\mathrm{d}t}{z - \mathrm{e}^{\mathrm{i}t}}$ $(z \in \mathbb{C}\setminus\mathbb{U})$.

✎ *Solution:*

1. On remarque déjà que

$$1-2a\cos x + a^2 = (a-\mathrm{e}^{\mathrm{i}x})(a-\mathrm{e}^{-\mathrm{i}x})$$

donc pour $x \in]0;\pi[$, le trinôme (en a) $a^2-2a\cos x+1$ n'a pas de racine réelle donc reste toujours strictement positif ; et pour $x=0$ ou $x=\pi$, il a une racine double qui vaut ± 1 ; puisque l'on suppose justement $a \neq \pm 1$, cette quantité est encore strictement positive, et finalement l'intégrale proposée existe bien.

Puisque la fonction $f : x \mapsto \ln(1-2a\cos x+a^2)$ est continue sur $[0;\pi]$, on peut affirmer d'après le cours sur les sommes de Riemann que l'intégrale $I(a)$ proposée est la limite, quand $n \to +\infty$ de

$$S_n(f) = \frac{\pi}{n}\sum_{k=0}^{n-1} f\left(\frac{k\pi}{n}\right)$$

(on a subdivisé l'intervalle $[0;\pi]$ en n intervalles de mêmes longueurs). Or :

$$S_n(f) = \frac{\pi}{n}\sum_{k=0}^{n-1} \ln\left(\left(a-\mathrm{e}^{\mathrm{i}\frac{k\pi}{n}}\right)\left(a-\mathrm{e}^{-\mathrm{i}\frac{k\pi}{n}}\right)\right) = \frac{\pi}{n}\ln\left(\prod_{k=0}^{n-1}\left(a-\mathrm{e}^{\mathrm{i}\frac{k\pi}{n}}\right)\left(a-\mathrm{e}^{-\mathrm{i}\frac{k\pi}{n}}\right)\right).$$

Dans le produit ci-dessus, les nombres complexes $\mathrm{e}^{\pm\mathrm{i}\frac{k\pi}{n}}$ décrivent l'ensemble des racines $2n$-ièmes de 1 lorsque k décrit $[\![0;n-1]\!]$, exceptée la valeur -1 (qui serait obtenue pour $k=n$) et avec la valeur 1 obtenue deux fois (pour $k=0$).

De plus, l'on sait (cf.cours de Sup sur la factorisation d'un polynôme), que, si l'on note $\mathbb{U}_{2n}$ l'ensemble des racines $2n$-ièmes de l'unité, on a :

$$\prod_{\omega\in\mathbb{U}_{2n}} (X-\omega) = X^{2n}-1.$$

De tout ce qui précède on déduit :

$$\prod_{k=0}^{n-1}\left(a-\mathrm{e}^{\mathrm{i}\frac{k\pi}{n}}\right)\left(a-\mathrm{e}^{-\mathrm{i}\frac{k\pi}{n}}\right) = \frac{(a^{2n}-1)(a-1)}{a+1}\,.$$

On peut maintenant conclure :

– Si $|a|<1$:

$$I(a)=\lim_{n\to+\infty}\frac{\pi}{n}\ln\left(\frac{(a^{2n}-1)(a-1)}{a+1}\right)=0$$

(puisque $a^{2n}\underset{n\to+\infty}{\longrightarrow}0$).

– Si $|a|>1$:
Dans ce cas, $\lim\limits_{n\to+\infty}a^{2n-1}=+\infty$, donc $\ln(a^{2n}-1)\sim\ln(a^{2n})=2n\ln|a|$ donc :

$$I(a)=\lim_{n\to+\infty}\frac{\pi}{n}\ln\left(\frac{(a^{2n}-1)(a-1)}{a+1}\right)=\lim_{n\to+\infty}\left(\frac{\pi}{n}\ln(a^{2n}-1)+\underbrace{\frac{\pi}{n}\ln\left(\frac{a-1}{a+1}\right)}_{\to 0}\right)=2\pi\ln|a|.$$

Remarque 1 : le deuxième résultat peut se déduite du 1er puisque l'on peut facilement vérifier que

$$I(a)=I\left(\frac{1}{a}\right)+2\pi\ln|a|.$$

Remarque 2 : la valeur de $I(a)$ pour $a=\pm1$ sera calculée dans le prochain chapitre.

2. Puisque z n'appartient pas au cercle unité $\mathbb{U}$, la quantité $z-\mathrm{e}^{\mathrm{i}t}$ ne s'annule jamais donc la fonction $t\mapsto\dfrac{1}{z-\mathrm{e}^{\mathrm{i}t}}$ est continue sur $[0\,;2\pi]$ et l'intégrale J existe.
De plus, d'après le cours sur les sommes de Riemann, on a $J=\lim\limits_{n\to+\infty}S_n$ où

$$S_n=\frac{2\pi}{n}\sum_{k=0}^{n-1}\frac{1}{z-\mathrm{e}^{2\mathrm{i}k\frac{\pi}{n}}}.$$

Or, si $P\in\mathbb{C}[X]$ s'écrit : $P=\prod\limits_{k=0}^{n-1}(X-x_k)$, il est facile de vérifier que :

$$\frac{P'}{P}=\sum_{k=0}^{n-1}\frac{1}{X-x_k}.$$

Donc ici, $\sum\limits_{k=0}^{n-1}\dfrac{1}{z-\mathrm{e}^{2\mathrm{i}k\frac{\pi}{n}}}=\dfrac{P'(z)}{P(z)}$ où $P(z)=\prod\limits_{k=0}^{n-1}\left(z-\mathrm{e}^{2\mathrm{i}k\frac{\pi}{n}}\right)=z^n-1$ (puisque les $\mathrm{e}^{2\mathrm{i}k\frac{\pi}{n}}$ sont exactement les n racines n-ièmes de 1 lorsque k décrit $[\![0\,;n-1]\!]$).
Soit encore : $\sum\limits_{k=0}^{n-1}\dfrac{1}{z-\mathrm{e}^{2\mathrm{i}k\frac{\pi}{n}}}=\dfrac{nz^{n-1}}{z^n-1}$, et $J=\lim\limits_{n\to+\infty}\dfrac{2\pi}{n}\dfrac{nz^{n-1}}{z^n-1}$, d'où les deux cas :

– Si $|z|<1$: $J=0$ (puisque $z^{2n}\underset{n\to+\infty}{\longrightarrow}0$).

– Si $|z|>1$: $J=\dfrac{2\pi}{z}$.

Fonctions définies par des intégrales (ex. 9 à 12)

Exercice 9: ($\star$)

Soit $f\in\mathcal{C}(\mathbb{R},\mathbb{R})$. Montrer que l'application $g\colon x\longmapsto\displaystyle\int_a^b f(x+t)\cos t\,\mathrm{d}t$ est de classe $\mathscr{C}^1$ sur $\mathbb{R}$.

✎ *Solution:*

Le changement de variable $u=x+t$ puis les formules trigo bien connues donnent, pour tout $x\in\mathbb{R}$:

$$g(x)=\int_{x+a}^{x+b}f(u)\cos(u-x)\,\mathrm{d}u=\cos x\int_{x+a}^{x+b}f(u)\cos u\,\mathrm{d}u+\sin x\int_{x+a}^{x+b}f(u)\sin u\,\mathrm{d}u.$$

De plus, l'application $x\mapsto\displaystyle\int_{x+a}^{x+b}f(u)\cos u\,\mathrm{d}u$ est de classe $\mathscr{C}^1$ puisque l'applciation $u\mapsto f(u)\cos u$ étant continue possède une primitive F de classe $\mathscr{C}^1$ et $\displaystyle\int_{x+a}^{x+b}f(u)\cos(u-x)\,\mathrm{d}u=F(x+b)-F(x+a)$. Il en est de même de l'application $x\mapsto\displaystyle\int_{x+a}^{x+b}f(u)\sin u\,\mathrm{d}u$, donc g est bien de classe $\mathscr{C}^1$ sur $\mathbb{R}$.

Exercice 10: ($\star$)

Pour $x \in \mathbb{R}$, calculer $f(x) = \int_0^{\sin^2 x} \arcsin(\sqrt{t})\,\mathrm{d}t + \int_0^{\cos^2 x} \arccos(\sqrt{t})\,\mathrm{d}t$.

✎ *Solution:*

On notera

$$f_1(x) = \int_0^{\sin^2 x} \arcsin(\sqrt{t})\,\mathrm{d}t \quad \text{et} \quad f_2(x) = \int_0^{\cos^2 x} \arccos(\sqrt{t})\,\mathrm{d}t.$$

On peut déjà remarquer que les intégrales proposées existent. En effet, pour tout $t \in [0;1]$ les fonctions $t \mapsto \arcsin(\sqrt{t})$ et $t \mapsto \arccos(\sqrt{t})$ sont continues comme composées de fonctions continues.

Elles possèdent donc des primitives ; si F est une primitive de $t \mapsto \arcsin(\sqrt{t})$ on a $f_1(x) = F(\sin^2 x) - F(0)$ donc f_1 est de classe $\mathscr{C}^1$ sur $\mathbb{R}$ et

$$\forall x \in \mathbb{R},\ f_1'(x) = 2\sin x \cos x F'(\sin^2 x) = 2\sin x \cos x \arcsin\left(\sqrt{\sin^2 x}\right).$$

On trouve de même que f_2 et de calsse $_Cun$ sur $\mathbb{R}$ et que

$$\forall x \in \mathbb{R},\ f_2'(x) = -2\sin x \cos x \arccos\left(\sqrt{\cos^2 x}\right).$$

On en déduit que f est de classe $\mathscr{C}^1$ sur $\mathbb{R}$, et si l'on se restreint à $x \in :_i ntff0\frac{\pi}{2}$ on a

$$f'(x) = 2\sin x \cos x\,(\arcsin(\sin x) - \arccos(\cos x)) = 2\sin x \cos x (x - x) = 0$$

donc f est constante sur $\left[0;\frac{\pi}{2}\right]$. Puisqu'elle est paire elle est aussi constante sur $\left[-\frac{\pi}{2};\frac{\pi}{2}\right]$, et puisqu'elle est π-périodique (vérifications faciles), elle est constante sur $\mathbb{R}$.

Finalement on a, pour tout $x \in \mathbb{R}$:

$$f(x) = f\left(\frac{\pi}{4}\right) = \int_0^{\frac{1}{2}} \left(\arcsin(\sqrt{t}) + \arccos(\sqrt{t})\right)\,\mathrm{d}t = \int_0^{\frac{1}{2}} \frac{\pi}{2}\,\mathrm{d}t = \frac{\pi}{4}.$$

Exercice 11: ($\star\star\star$)

Soit $f(x) = \int_x^{x^2} \frac{\mathrm{d}t}{\ln t}$. Déterminer le domaine de définition de f ; étudier sa dérivabilité ; étudier ses variations.

Prolonger f par continuité en 0 et en 1. En déduire : $\int_0^1 \frac{t-1}{\ln t}\,\mathrm{d}t = \ln 2$.

✎ *Solution:*

- La fonction $t \mapsto \frac{1}{\ln t}$ est continue sur $\mathbb{R}_+^* \setminus \{1\}$, donc $f(x)$ est défini si et seulement si l'intervalle $[x;x^2]$ (ou $[x^2;x]$) est entièrement inclus dans $\mathbb{R}_+^* \setminus \{1\}$, ce qui donne $x \in \mathbb{R}_+^* \setminus \{1\}$.
- Si F désigne une primitive de $t \mapsto \frac{1}{\ln t}$ sur $\mathbb{R}_+^* \setminus 1$, on a

$$\forall x \in \mathbb{R}_+^* \setminus \{1\},\ f(x) = F(x^2) - F(x),$$

  donc f est de classe $\mathscr{C}^1$ sur son domaine et

$$\forall x \in \mathbb{R}_+^* \setminus \{1\},\ f'(x) = 2xF'(x^2) - F'(x) = \frac{2x}{\ln(x^2)} - \frac{1}{\ln x} = \frac{x-1}{\ln x}.$$

  Puisque $f'(x) \geqslant 0$, f est croissante sur $]0;1[$ et sur $]1;+\infty[$ (cette question n'a aucun intérêt ici).
- Puisque $\lim_{t\to 0+} \frac{1}{\ln t} = 0$, il existe $\alpha < 1$ tel que, pour tout $t \in]0;\alpha[$ on ait $\left|\frac{1}{\ln t}\right| \leqslant 1$.
  Alors, pour tout $x \in]0;\alpha[$ on a $x^2 < x$ donc

$$|f(x)| \leqslant \int_{x^2}^x \left|\frac{1}{\ln t}\right|\,\mathrm{d}t \leqslant \int_{x^2}^x 1\,\mathrm{d}t = (x - x^2)$$

  donc par le théorème d'encadrement : $\lim_{x\to 0^+} f(x) = 0$. On peut donc prolonger f par continuité en 0 en posant $f(0) = 0$.

- Un développement limité de la fonction $\ln$ au voisinage de 1 s'écrit :

$$\ln t \underset{t\to 1}{=} (t-1) + O(t-1)^2$$

donc

$$\frac{1}{\ln t} \underset{t\to 1}{=} \frac{1}{t-1}\frac{1}{1+O(t-1)} = \frac{1}{t-1}\big(1+O(t-1)\big) = \frac{1}{t-1} + O(1).$$

On a donc, au voisinage de 1, $\dfrac{1}{\ln t} = \dfrac{1}{t-1} + \varphi(t)$, où φ est une fonction bornée. On en déduit, pour x au voisinage de 1 :

$$f(x) = \int_x^{x^2} \frac{\mathrm{d}t}{t-1} + \int_x^{x^2} \varphi(t)\,\mathrm{d}t = \ln(x+1) + \int_x^{x^2} \varphi(t)\,\mathrm{d}t.$$

Or par l'inégalité de la moyenne, $\left|\displaystyle\int_x^{x^2} \varphi(t)\,\mathrm{d}t\right| \leqslant \left|x-x^2\right| \|\varphi\|_\infty$ donc $\displaystyle\lim_{x\to 1}\int_x^{x^2} \varphi(t)\,\mathrm{d}t = 0$.

On en déduit $\displaystyle\lim_{x\to 1} f(x) = \ln 2$. On peut donc prolonger f par continuité en 1 en posant $f(1) = \ln 2$.

- De plus, f est de classe $\mathscr{C}^1$ sur $\mathbb{R}_+^* \setminus \{1\}$ et $\displaystyle\lim_{x\to 0^+} f'(x) = \lim_{x\to 0^+}\frac{x-1}{\ln x} = 0$ et $\displaystyle\lim_{x\to 1} f'(x) = \lim_{x\to 1}\frac{x-1}{\ln x} = 1$, donc par le théorème de prolongement des fonctions de classe $\mathscr{C}^1$, f (prolongée par continuité en 0 et 1) est de classe $\mathscr{C}^1$ sur $\mathbb{R}_+$.

On a donc en particulier : $\displaystyle\int_0^1 f'(x)\,\mathrm{d}x = f(1) - f(0)$ donc $\displaystyle\int_0^1 \frac{x-1}{\ln x}\,\mathrm{d}x = \ln 2$ (l'existence de l'intégrale est assurée par ce qui précède).

Exercice 12: (⋆⋆⋆)

Soit $f \in \mathscr{C}([0;1],\mathbb{R})$ telle que $f(0) = 0$ et $f(x) \neq 0$ pour $x \in]0,1]$, dérivable en 0 et telle que $f'(0) \neq 0$.

Déterminer $\displaystyle\lim_{x\to 0^+}\int_x^{3x}\frac{\mathrm{d}t}{f(t)}$.

✎ *Solution:*

On peut déjà remarquer que l'intégrale proposée a bien un sens puisque f ne s'annule pas sur $]0;1]$.
f étant dérivable en 0, elle admet au voisinage de ce point un développement limité :

$$f(t) = f(0) + tf'(0) + o(t) = tf'(0) + t\,o(1).$$

Donc, dans un voisinage V de 0, puisque $f'(0) \neq 0$:

$$\frac{1}{f(t)} = \frac{1}{tf'(0)\big(1+o(1)\big)} = \frac{1}{tf'(0)}\frac{1}{1+o(1)} = \frac{1}{tf'(0)}\big(1+\varphi(t)\big) \quad \text{avec } \lim_{t\to 0^+}\varphi(t) = 0.$$

En intégrant, avec x tel que $3x \in V$:

$$\int_x^{3x}\frac{\mathrm{d}t}{f(t)} = \frac{1}{f'(0)}\left(\int_x^{3x}\frac{\mathrm{d}t}{t} + \int_x^{3x}\frac{\varphi(t)\,\mathrm{d}t}{t}\right) = \frac{\ln 3}{f'(0)} + \frac{1}{f'(0)}\left(\int_x^{3x}\frac{\varphi(t)\,\mathrm{d}t}{t}\right).$$

Mais :

$$\left|\int_x^{3x}\frac{\varphi(t)\,\mathrm{d}t}{t}\right| \leqslant \int_x^{3x}\frac{|\varphi(t)|}{t}\,\mathrm{d}t \leqslant \|\varphi\|_\infty^{[x;3x]}\int_x^{3x}\frac{\mathrm{d}t}{t} = \ln 3\,\|\varphi\|_\infty^{[x;3x]}$$

et puisque $\displaystyle\lim_{t\to 0^+}\varphi(t) = 0$, on a $\displaystyle\lim_{x\to 0^+}\|\varphi\|_\infty^{[x;3x]} = 0$. Donc $\displaystyle\lim_{x\to 0^+}\int_x^{3x}\frac{\varphi(t)\,\mathrm{d}t}{t} = 0$ et finalement :

$$\lim_{x\to 0^+}\int_x^{3x}\frac{\mathrm{d}t}{f(t)} = \frac{\ln 3}{f'(0)}.$$

Divers (ex. 13 à 17)

Exercice 13: (⋆)

En utilisant une formule de Taylor adéquate, établir que pour tout $x \in [0;\pi/2]$,

$$x - \frac{1}{6}x^3 \leqslant \sin x \leqslant x - \frac{1}{6}x^3 + \frac{1}{120}x^5$$

✎ *Solution:*

La fonction sin étant de classe $\mathscr{C}^\infty$ sur $\mathbb{R}$, on peut écrire la formule de Taylor avec reste intégrale à l'ordre 5 :

$$\begin{aligned}\forall\, x \in \mathbb{R},\ \sin x &= \sum_{k=0}^{5} \frac{x^k}{k!} \sin^{(k)}(0) + \int_0^x \frac{(x-t)^5}{5!} \sin^{(6)}(t)\,\mathrm{d}t \\ &= x - \frac{1}{6}x^3 + \frac{1}{120}x^5 - \int_0^x \frac{(x-t)^5}{5!} \sin t\,\mathrm{d}t.\end{aligned}$$

Or si $x \in \left[0\,;\frac{\pi}{2}\right]$, on a pour tout $t \in [0\,;x]$, $(x-t) \geqslant 0$ et $\sin t \geqslant 0$, donc l'intégrale ci-dessus est positive (les bornes sont « dans le bon sens »), et on en déduit l'inégalité $\sin x \leqslant x - \frac{1}{6}x^3 + \frac{1}{120}x^5$.

L'autre inégalité s'obtient de façon similaire en écrivant la formule de Taylor avec reste intégrale à l'ordre 3.

Exercice 14: (⋆⋆)

En utilisant une formule de Taylor adéquate établir :

$$\sum_{k=0}^{+\infty} \frac{(-1)^k}{k+1} = \ln 2\,.$$

✎ *Solution:*

Soit $n \in \mathbb{N}^*$. On écrit la formule de Taylor avec reste intégrale à l'ordre n pour la fonction $f : x \mapsto \ln(1+x)$, qui est de classe $\mathscr{C}^\infty$, sur l'intervalle $[0\,;1]$:

$$\ln 2 = \sum_{k=0}^{n} \frac{1}{k!} f^{(k)}(0) + \int_0^1 \frac{(1-t)^n}{n!} f^{(n+1)}(t)\,\mathrm{d}t.$$

Or il est facile de vérifier que, pour $k \geqslant 1$, $f^{(k)}(x) = \dfrac{(-1)^{k-1}(k-1)!}{(1+x)^k}$ donc $f^{(k)}(0) = (-1)^{k-1}(k-1)!$ et $f(0) = 0$ d'où :

$$\ln 2 = \sum_{k=1}^{n} \frac{(-1)^{k-1}}{k-1} + r_n \qquad \text{avec } r_n = (-1)^n \int_0^1 \frac{(1-t)^n}{(1+t)^{n+1}}\,\mathrm{d}t$$

Or si $t \in [0\,;1]$ on a $1+t \geqslant 1$ donc $|r_n| \leqslant \displaystyle\int_0^1 (1-t)^n\,\mathrm{d}t = \frac{1}{n+1}$. On en déduit que $\lim\limits_{n\to+\infty} r_n = 0$, d'où $\lim\limits_{n\to+\infty} \left(\displaystyle\sum_{k=1}^{n} \frac{(-1)^{k-1}}{k-1} \right) = \ln 2$. Cela prouve la convergence de la série proposée et donne la valeur de sa somme, $\ln 2$.

Exercice 15: (⋆)

Soit $f, g\colon [0\,;1] \to \mathbb{R}$ deux fonctions continues et positives. On suppose $f(t)g(t) \geqslant 1$ pour tout $t \in [0\,;1]$. Montrer que :

$$\int_0^1 f(t)\,\mathrm{d}t \int_0^1 g(t)\,\mathrm{d}t \geqslant 1.$$

(penser à l'inégalité de Cauchy-Schwarz).

✎ *Solution:*

On applique l'inégalité de Cauchy-Schwarz aux fonctions $t \mapsto \sqrt{f(t)}$ et $t \mapsto \sqrt{g(t)}$, qui sont bien définies et continues sur $[0\,;1]$.

Exercice 16: Irrationalité de π et de e ($\star\star\star$)

a) Soient a et b deux entiers strictement positifs, et $P_n : x \longmapsto \dfrac{x^n(bx-a)^n}{n!}$. Montrer que P_n et toutes ses dérivées prennent des valeurs entières pour $x=0$ et pour $x=\dfrac{a}{b}$.

b) Montrer que $I_n = \displaystyle\int_0^{\pi} P_n(x)\sin x\,\mathrm{d}x$ tend vers 0 quand $n \to +\infty$.

c) Montrer que, si π était rationnel et si on posait $\pi = \dfrac{a}{b}$ avec $a, b \in \mathbb{N}^*$, le nombre I_n serait un entier non nul. Conclure.

d) Montrer de même, en considérant $J_n = \displaystyle\int_0^{r} P_n(x)\mathrm{e}^x\,\mathrm{d}x$, que, si r est un rationnel non nul, e^r est irrationnel.

✎ *Solution:*

a) • *Remarque préliminaire :*

P_n étant de degré $2n$, toutes ses dérivées d'ordre $m > 2n$ sont nulles.

0 et $\dfrac{a}{b}$ étant des racines n-ièmes de P_n, ce sont des racines d'ordre $n-m$ des dérivées m-ièmes $P_n^{(m)}$ si $m < n$, donc ces dérivées m-ièmes sont nulles en 0 et en $\dfrac{a}{b}$, et sont donc entières.

• *1ère solution :*

Pour $n \leqslant m \leqslant 2n$, on va calculer $P_n^{(m)}$ en utilisant la formule de Leibniz. Il est facile de vérifier que, pour $k \leqslant n$ et $m-k \leqslant n$ respectivement :

$$\frac{\mathrm{d}^k}{\mathrm{d}x^k}(bx-a)^n = b^k \frac{n!}{(n-k)!}(bx-a)^{n-k} \quad \text{et} \quad \frac{\mathrm{d}^k}{\mathrm{d}^{m-k}}x^n = \frac{n!}{(n-m+k)!}x^{n-m+k}$$

et les dérivées précédentes sont nulles pour $k > n$ ou $m-k > n$ respectivement. Donc la formule de Leibniz donne :

$$P_n^{(m)}(x) = \frac{1}{n!}\sum_{k=m-n}^{n} \binom{m}{k} b^k \frac{n!}{(n-k)!}\frac{n!}{(n-m+k)!}x^{n-m+k}(bx-a)^{n-k}$$

– Pour $x=0$ il ne reste dans la somme précédente que le terme pour $k = m-n$ donc :

$$P_n^{(m)}(0) = \frac{1}{n!}\binom{m}{m-n} b^{m-n}\frac{n!}{(2n-m)!}n!(-a)^{2n-m} = b^{m-n}(-a)^{2n-m}\frac{m!}{(m-n)!(2n-m)!}$$

Or (rappelons que $n \leqslant m \leqslant 2n$) :

$$\frac{m!}{(m-n)!(2n-m)!} = \frac{m!}{(m-n)!n!}\frac{n!}{(2n-m)!(m-n)!}(m-n)! = \binom{m}{n}\binom{n}{m-n}(m-n)!$$

donc $\dfrac{m!}{(m-n)!(2n-m)!}$ est un nombre entier, et puisque a et b sont des entiers, il en est de même de $P^{(m)}(0)$.

– Pour $x = \dfrac{a}{b}$ il ne reste dans la somme que le terme pour $k=n$ donc

$$P_n^{(m)}\left(\frac{a}{b}\right) = \frac{1}{n!}\binom{m}{n}b^n\left(\frac{a}{b}\right)^{2n-m} n!\frac{n!}{(2n-m)!} = \frac{m!}{(m-n)!(2n-m)!}b^{m-n}a^{2n-m}$$

et on conclut comme pour le cas $x=0$.

2ème solution, + astucieuse :

On rappelle que, si P est un polynôme, le coefficient du terme en X^m pour $0 \leqslant m \leqslant \deg(P)$ est égal à $\dfrac{P^{(m)}(0)}{m!}$.

On peut développer P_n à l'aide de la formule du binôme :

$$P_n(x) = \frac{x^n}{n!}\sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}(bx)^k(-a)^{n-k}$$

Pour $n \leqslant m \leqslant 2n$, le coefficient du terme en x^m dans ce développement est obtenu pour $k = m-n$ donc vaut :

$$\frac{P^{(m)}(0)}{m!} = \frac{1}{n!}\binom{n}{m-n}b^{m-n}(-a)^{2n-m}$$

donc
$$P^{(m)}(0) = \frac{m!}{(m-n)!(2n-m)!} b^{m-n}(-a)^{2n-m},$$
et on montre qu'il s'agit d'un nombre entier comme dans la 1ère solution.

Ensuite, on remarque que
$$\forall x \in \mathbb{R},\ P_n\left(\frac{a}{b} - x\right) = P_n(x)$$
donc $(1)^m P_n^{(m)}\left(\frac{a}{b} - x\right) = P_n^{(m)}(x)$ donc $(-1)^m P_n^{(m)}\left(\frac{a}{b}\right) = P_n^m(0)$, ce qui prouve que les dérivées successives de P_n en $\frac{a}{b}$ sont entières aussi.

b) Sur l'intervalle $[0\,;\pi]$ la fonction $x \mapsto |x(bx-a)|$ est bornée par un certain réel M (car continue). On a donc
$$|I_n| \leqslant \int_0^{\pi} |P_n(x)| \underbrace{|\sin x|}_{\leqslant 1} \,\mathrm{d}x \leqslant \pi \frac{M^n}{n!}$$
et puisque $\lim\limits_{n\to+\infty} \frac{M^n}{n!} = 0$ (croissances comparées vues en Sup), on en déduit $\lim\limits_{n\to+\infty} I_n = 0$.

c) En faisant deux intégrations par parties on a :
$$I_n = \big[-\cos x P_n(x)\big]_0^{\pi} + \int_0^{\pi} P_n'(x)\cos x \,\mathrm{d}x = \big[-\cos x P_n(x) + \sin x P_n'(x)\big]_0^{\pi} - \int_0^{\pi} P_n''(x)\sin x \,\mathrm{d}x$$
et puisque $\sin(\pi) = \sin(0) = 0$ et que les dérivées de P_n sont nulles à partir de la $(2n+1)$-ième, il reste au bout de $2n+1$ intégrations par parties :
$$I_n = \Big[\cos x\big(P_n(x) - P_n''(x) + \cdots + (-1)^n P_n^{(2n)}(x)\big)\Big]_0^{\pi} + (-1)^n \underbrace{\int_0^{\pi} P_n^{(2n+1)}(x)\sin x \,\mathrm{d}x}_{=0}.$$

Si π était rationnel, en posant $\pi = \frac{a}{b}$ et en considérant le polynôme P_n obtenu pour ces valeurs de a et b, le calcul ci-dessus et le résultat de la question **a)** montrent que I_n est un nombre entier.

De plus, le polynôme P_n ne s'annule qu'en 0 et $\frac{a}{b} = \pi$ donc garde un signe constant sur $[0\,;\pi]$; il en est donc de même de la fonction $x \mapsto P_n(x)\sin x$, et puisqu'il s'agit d'une fonction continue, on en déduit que $I_n \neq 0$.

Ainsi, I_n est un entier non nul pour tout n, et devrait tendre vers 0 quand $n \to +\infty$ d'après **b)**, contradiction.

On en conclut que π est irrationnel (*la démonstration ci-dessus est due à Niven (1947)*).

Exercice 17: Inégalité de Hölder (⋆⋆⋆⋆)

a) Soit $f \in \mathscr{C}^1([0\,;a],\mathbb{R})$, strictement croissante, telle que $f(0) = 0$ et $f(a) = b$.

i) Montrer que : $\displaystyle\int_0^a f(t)\,\mathrm{d}t + \int_0^b f^{-1}(t)\,\mathrm{d}t = ab$.

ii) Montrer que : $\forall\,(x,y) \in [0\,;a]\times[0\,;b]$, $xy \leqslant \displaystyle\int_0^x f(t)\,\mathrm{d}t + \int_0^y f^{-1}(t)\,\mathrm{d}t$.

b) Soient $p,q \in \,]1\,;+\infty[$ tels que $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$.

Montrer que : $\forall\,(u,v) \in \mathbb{R}_+^2$, $uv \leqslant \dfrac{u^p}{p} + \dfrac{v^q}{q}$ (*inégalité de Young*).

c) Soient $f,g \in \mathscr{C}([a\,;b],\mathbb{C})$, $a < b$ et $p,q \in]1,+\infty[$ tels que $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$.

Montrer que : $\displaystyle\int_a^b |f(t)g(t)|\,\mathrm{d}t \leqslant \left(\int_a^b |f(t)|^p\,\mathrm{d}t\right)^{1/p} . \left(\int_a^b |g(t)|^q\,\mathrm{d}t\right)^{1/q}$.

d) Démontrer que, si $p \in [1\,;+\infty]$, l'application $f \longmapsto \|f\|_p = \displaystyle\left(\int_a^b |f(t)|^p\,\mathrm{d}t\right)^{1/p}$ est une norme sur $\mathscr{C}([a\,;b],\mathbb{C})$.

e) Soit $f \in \mathcal{C}([a\,;b],\mathbb{C})$. Montrer que : $\lim\limits_{p\to+\infty} \|f\|_p = \|f\|_\infty$.

✎ *Solution:*

On note déjà que, par un théorème célèbre, f réalise une bijection de $[0\,;a]$ sur $[0\,;b]$.

a) i) Faire le changement de variable $t=f(u)$ dans la 2ème intégrale puis intégration par parties.
Réfléchissez à l'interprétation géométrique.

ii) D'après ce qui précède, on a déjà :

$$xf(x)=\int_0^x f(t)\,\mathrm{d}t+\int_0^{f(x)} f^{-1(t)}\,\mathrm{d}t.$$

On distingue alors deux cas :

– si $y\geqslant f(x)$: $\displaystyle\int_0^{f(x)} f^{-1}(t)\,\mathrm{d}t=\int_0^{y} f^{-1}(t)\,\mathrm{d}t+\int_y^{f(x)} f^{-1}(t)\,\mathrm{d}t$ et puisque f^{-1} est croissante (car f l'est), on a $\displaystyle\int_y^{f(x)} f^{-1}(t)\,\mathrm{d}t\leqslant\int_y^{f(x)} f^{-1}(f(x))\,\mathrm{d}t=(f(x)-y)x$ donc

$$xf(x)=\int_0^x f(t)\,\mathrm{d}t+\int_0^{f(x)} f^{-1(t)}\,\mathrm{d}t\leqslant\int_0^x f(t)\,\mathrm{d}t+\int_0^{y} f^{-1}(t)\,\mathrm{d}t+(f(x)-y)x$$

ce qui donne l'inégalité demandée.

– le cas $y\leqslant f(x)$ se traite de manière similaire.

b) Appliquer ce qui précède à $f(t)=t^p$.
L'inégalité de Young peut aussi se démontrer en utilisant la concavité de la fonction $\ln$.

c) Dans le cas où f et g sont non nulles (sinon c'est trivial), appliquer l'inégalité de Young à $u=\dfrac{|f(t)|}{\|f\|_p}$ et $v=\dfrac{|g(t)|}{\|g\|_q}$ puis intégrer..

d) Le cas $p=1$ a été traité en cours (norme $\|\ \|_1$), on supposera donc $p>1$.
Seule l'inégalité triangulaire pose problème, les autres propriétés d'une norme sont quasi immédiates.
Pour $f,g\in\mathscr{C}([a\,;b],\mathbb{C})$ on a, pour tout $t\in[a\,;b]$:

$$|f(t)+g(t)|^p=|f(t)+g(t)|\cdot|f(t)+g(t)|^{p-1}\leqslant|f(t)|\cdot|f(t)+g(t)|^{p-1}+|g(t)|\cdot|f(t)+g(t)|^{p-1}.$$

Soit q tel que $\dfrac{1}{p}+\dfrac{1}{q}=1$ (q existe puisque $p>1$, il vaut $\dfrac{p}{p-1}$). En utilisant l'inégalité de Hölder (question **c)**) on a :

$$\int_a^b |f(t)|\cdot|f(t)+g(t)|^{p-1}\,\mathrm{d}t\leqslant\|f\|_p\left(\int_a^b|f(t)+g(t)|^{q(p-1)}\,\mathrm{d}t\right)^{1/q}=\|f\|_p\left(\int_a^b|f(t)+g(t)|^{p}\,\mathrm{d}t\right)^{1/q}$$

et de la même façon

$$\int_a^b |g(t)|\cdot|f(t)+g(t)|^{p-1}\,\mathrm{d}t\leqslant\|g\|_p\left(\int_a^b|f(t)+g(t)|^{p}\,\mathrm{d}t\right)^{1/q}$$

donc

$$\int_a^b |f(t)+g(t)|^{p}\,\mathrm{d}t\leqslant\left(\|f\|_p+\|g\|_p\right)\left(\int_a^b|f(t)+g(t)|^{p}\,\mathrm{d}t\right)^{1/q}$$

ce qui permet d'obtenir $\|f+g\|_p\leqslant\|f\|_p+\|g\|_p$ (le cas $\|f+g\|_p=0$ est évident, sinon on divise l'inégalité précédente par $\displaystyle\left(\int_a^b|f(t)+g(t)|^{p}\,\mathrm{d}t\right)^{1/q}$).

e) classique.

⋆ ⋆ ⋆ ⋆
⋆ ⋆ ⋆
⋆ ⋆
⋆