EXERCICES : SUITES ET SÉRIES DE FONCTIONS, AVEC CORRIGÉS

Suites de fonctions (ex. 1 à 10)

Exercice 1: ($\star$)

Soit f une application de classe $\mathscr{C}^1$ de $[0;1]$ dans $\mathbb{R}$.
Pour $n \geqslant 1$ et $x \in [0;1]$ on pose : $g_n(x) = f\left(x + \dfrac{x(1-x)}{n}\right)$.
Montrer que cette définition a bien un sens, et que la suite $(g_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ converge uniformément sur $[0;1]$ vers une fonction à préciser.

✎ *Solution:*

On montre facilement que : $\forall\, n \in \mathbb{N}^*,\ \forall\, x \in [0;1],\ x + \dfrac{x(1-x)}{n} \in [0;1]$, donc la définition des g_n a bien un sens.
Pour tout $x \in [0;1]$, $\lim\limits_{n\to+\infty} g_n(x) = f(x)$ par continuité de f, donc la suite $(g_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ converge simplement vers f.
f étant de classe $\mathscr{C}^1$, l'inégalité des accroissements finis donne

$$\forall\, x \in [0;1],\ |g_n(x) - f(x)| \leqslant \|f'\|_\infty \frac{x(1-x)}{n} \leqslant \frac{\|f'\|_\infty}{4n}$$

donc $\|g_n - f\|_\infty \leqslant \dfrac{\|f'\|_\infty}{4n} \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} 0$, et la convergence est uniforme sur $[0;1]$.

Exercice 2: ($\star\star$)

Soit (P_n) une suite de fonctions polynômes convergeant uniformément sur $\mathbb{R}$ vers une fonction f.
Montrer que f est une fonction polynôme.

✎ *Solution:*

En appliquant la définition de la CVU avec $\varepsilon = 1/2$, il existe $N \in \mathbb{N}$ tel que $\forall\, n \geqslant N,\ \|P_n - f\|_\infty \leqslant 1/2$ et donc par inégalité triangulaire $\|P_n - P_N\|_\infty \leqslant 1$.
$P_n - P_N$ étant une fonction polynomiale bornée sur $\mathbb{R}$, elle est constante. Soit λ_n la valeur de cette constante.
On a alors $\lambda_n = P_n(0) - P_N(0) \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} f(0) - P_N(0) = \lambda$ puis $P_n = P_N + \lambda_n \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} P_N + \lambda$.
Ainsi la limite $f = P_N + \lambda$ est une fonction polynomiale.

Exercice 3: ($\star\star$)

On suppose qu'une suite de fonctions (f_n) de $[a;b]$ vers $\mathbb{R}$ converge uniformément vers $f\colon [a;b] \to \mathbb{R}$ continue et on considère une suite (x_n) d'éléments de $[a;b]$ convergeant vers x. Montrer que :

$$\lim_{n\to+\infty} f_n(x_n) = f(x)\,.$$

Indication : revenir aux définitions « avec des ε ».

✎ *Solution:*

Soit $\varepsilon > 0$. Il existe $n_1 \in \mathbb{N}$ tel que

$$\forall\, n \geqslant n_1,\ \|f_n - f\|_\infty^{[a;b]} \leqslant \varepsilon$$

et il existe $n_2 \in \mathbb{N}$ tel que

$$\forall\, n \geqslant n_2,\ |f(x_n) - f(x)| \leqslant \varepsilon$$

car $f(x_n) \to f(x)$ en vertu de la continuité de f.
Pour $n_0 = \max(n_1,\ n_2)$, on a

$$\forall\, n \geqslant n_0,\ |f_n(x_n) - f(x)| \leqslant |f_n(x_n) - f(x_n)| + |f(x_n) - f(x)| \leqslant 2\varepsilon$$

ce qui est la définition de $\lim\limits_{n\to+\infty} f_n(x_n) = f(x)$.

Exercice 4: ($\star$)

Étudier la suite de fonctions $(f_n)_{n\geqslant 1}$ définies sur $\mathbb{R}$ par : $\forall\, x \in \mathbb{R}$, $f_n(x) = \dfrac{2nx}{n^2x^4+1}$.

Montrer qu'il n'y a pas convergence uniforme sur $\mathbb{R}$ mais qu'il y a convergence uniforme sur tout intervalle de la forme $[a\,;+\infty[$ avec $a > 0$.

Solution:

- Pour $x = 0$ $f_n(0) = 0 \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} 0$ et pour $x \neq 0$, $f_n(x) \underset{n\to+\infty}{\sim} \frac{2}{nx^3}$ donc $\lim\limits_{n\to+\infty} f_n(x) = 0$.

  Ainsi la suite (f_n) CVS sur $\mathbb{R}$ vers la fonction nulle.
- On calcule $f_n\left(\frac{1}{n}\right) = \frac{2n^2}{n^2+1} \geqslant 1$ donc $\|f_n\|_\infty^{\mathbb{R}} \geqslant 1$ et la suite ne converge pas uniformément vers la fonction nulle sur $\mathbb{R}$.
- Cependant, pour $x \geqslant a > 0$, $f_n(x) \leqslant \frac{2nx}{n^2x^4} = \frac{2}{nx^3} \leqslant \frac{2}{na^3}$ donc $\|f_n\|_\infty^{[a;+\infty[} \leqslant \frac{2}{na^3} \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} 0$: il y a bien CVU sur $[a\,;+\infty[$.

Exercice 5: ($\star$)

Étudier la suite de fonctions $(f_n)_{n\geqslant 0}$ définies sur $\mathbb{R}_+$ par : $\forall\, x \geqslant 0$, $f_n(x) = \dfrac{\ln(1+nx)}{1+nx}$.

Montrer qu'il n'y a pas convergence uniforme sur $\mathbb{R}_+$ mais qu'il y a convergence uniforme sur tout intervalle de la forme $[a\,;+\infty[$ avec $a > 0$.

Solution:

- Pour $x = 0$ $f_n(0) = 0 \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} 0$ et pour $x > 0$ $f_n(x) \underset{n\to+\infty}{\sim} \frac{\ln(nx)}{nx} \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} 0$ par croissances comparées.

  Ainsi, la suite (f_n) CVS sur $\mathbb{R}_+$ vers la fonction nulle.
- Pour tout $n \geqslant 1$ on a $f_n\left(\frac{1}{n}\right) = \frac{1}{2}\ln 2$ donc $\|f_n\|_\infty^{\mathbb{R}_+} \geqslant \frac{1}{2}\ln 2$ et il n'y a pas CVU sur $\mathbb{R}_+$.
- Il est facile de vérifier que la fonction $t \mapsto \frac{\ln t}{t}$ est décroissante sur $[\mathrm{e}\,;+\infty[$ donc pour $x \geqslant a > 0$ on aura, pour n assez grand (dès que $1 + na > \mathrm{e}$) $f_n(x) \leqslant f_n(a)$.

  Donc à partir d'un certain rang $\|f_n\|_\infty^{[a;+\infty[} \leqslant f_n(a) \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} 0$, et il y a CVU sur $[a\,;+\infty[$.

Exercice 6: ($\star\star$)

Étudier la suite de fonctions $(f_n)_{n\geqslant 1}$ définies sur $\mathbb{R}_+^*$ par :

$$\forall\, x > 0\ ,\ f_n(x) = \frac{\sin(nx)}{n\sqrt{x}}\ .$$

Solution:

- Puisque la fonction sin est bornée, on a pour tout $x > 0$: $\lim\limits_{n\to+\infty} f_n(x) = 0$. La suite $(f_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ converge donc simplement vers la fonction nulle sur $\mathbb{R}_+^*$. Notons que, puisque $\lim\limits_{x\to 0^+} f_n(x) = \lim\limits_{x\to 0^+} \dfrac{nx}{n\sqrt{x}} = 0$, on pouvait prolonger les f_n par continuité en 0 en posant $f_n(0) = 0$.
- Convergence uniforme :

Solution horrible :

Pour tout $x > 0$, $f_n'(x) = \dfrac{2nx\cos nx - \sin nx}{2nx^{3/2}}$, donc les extrema de f_n sont atteints lorsque x est solution de l'équation $\tan nx = 2nx$.

Notons α_k les solutions strictement positives de l'équation $\tan X = 2X$ rangées en ordre croisant ; il est facile de montrer (étude de la fonction $X \mapsto \tan X - 2X$) que $\alpha_k \in \left]k\pi\,;k\pi + \frac{\pi}{2}\right[$. Les extrema de f_n sont donc atteints lorsque $x = \dfrac{\alpha_k}{n}$.

Or $\sin\alpha_k = \pm\sqrt{1-\cos^2\alpha_k} = \pm\sqrt{1 - \dfrac{1}{1+\tan^2\alpha_k}} = \pm\sqrt{1-\dfrac{1}{1+4\alpha_k^2}} = \pm\dfrac{2\alpha_k}{\sqrt{1+4\alpha_k^2}}$

d'où $f_n\left(\dfrac{\alpha_k}{n}\right) = \pm\dfrac{2\alpha_k}{\sqrt{1+4\alpha_k^2}} \cdot \dfrac{1}{n\sqrt{\dfrac{\alpha_k}{n}}}$.

Les extrema de $|f_n|$ sont donc égaux aux réels $\dfrac{2\sqrt{\alpha_k}}{\sqrt{n}\sqrt{1+4\alpha_k^2}}$ pour $k \in \mathbb{N}$.

Or $\dfrac{2\sqrt{\alpha_k}}{\sqrt{n}\sqrt{1+4\alpha_k^2}} \leqslant \dfrac{2\sqrt{\alpha_k}}{\sqrt{n}\sqrt{4\alpha_k^2}} = \dfrac{1}{\sqrt{n}\sqrt{\alpha_k}} \leqslant \dfrac{1}{\sqrt{n}\sqrt{\alpha_0}}$ (avec $\alpha_0 \approx 1,1656..$ mais cela n'a pas d'importance), donc $\|f_n\|_\infty \leqslant \dfrac{1}{\sqrt{n}\sqrt{\alpha_0}} \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} 0$, ce qui prouve la convergence uniforme sur $\mathbb{R}_+^*$ de la suite $(f_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ vers la fonction nulle.

Solution bien plus astucieuse :

On connaît l'inégalité $|\sin x| \leqslant |x|$ valable pour tout x réel. On a donc pour tout $x > 0$, $|f_n(x)| \leqslant \dfrac{nx}{n\sqrt{x}} = \sqrt{x}$ donc pour tout $x \in \left]0\,;\frac{1}{n}\right]$ on a $|f_n(x)| \leqslant \dfrac{1}{\sqrt{n}}$.

Puis pour $x \in \left[\frac{1}{n}\,;+\infty\right[$ on a $|f_n(x)| \leqslant \dfrac{|\sin nx|}{n\sqrt{\frac{1}{n}}} \leqslant \dfrac{1}{\sqrt{n}}$.

Finalement $\|f_n\|_\infty^{\mathbb{R}_+^*} \leqslant \dfrac{1}{\sqrt{n}}$, ce qui montre la CVU sur $\mathbb{R}_+^*$.

Exercice 7: $(\star\star\star)$

Étudier la suite de fonctions $(f_n)_{n\geqslant 1}$ définies sur $\mathbb{R}$ par

$$f_n(x) = \begin{cases} 0 & \text{si } 0 \leqslant x \leqslant \frac{1}{n} \\ \dfrac{1}{n\ln\left(1-\frac{1}{nx}\right)} & \text{si } x < 0 \text{ ou } x > \frac{1}{n}. \end{cases}$$

✎ *Solution:*

- On vérifie déjà facilement que les f_n pour $n \geqslant 1$ sont bien définies sur $\mathbb{R}$.
- Pour $x = 0$ $f_n(0) = 0$ pour tout n ; si $x > 0$ il existe un rang à partir duquel $x > 1/n$ donc pour $x \neq 0$ on aura, au moins à partir d'un certain rang, $f_n(x) = \frac{1}{n\ln\left(1-\frac{1}{nx}\right)}$ et puisque $\ln\left(1-\frac{1}{nx}\right) \underset{n\to+\infty}{\sim} -\frac{1}{nx}$ on aura $f_n(x) \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} -x$.

  En conclusion, la suite (f_n) CVS sur $\mathbb{R}$ vers la fonction $f\colon x \mapsto -x$.
- Posons $g_n(x) = f_n(x) - f(x) = f_n(x) + x$ pour $x \in \mathbb{R}$. Alors $g_n(x) = \frac{1}{n}h(nx)$ où

  $$h(t) = \begin{cases} t & \text{si } t \in [0\,;1] \\ \frac{1}{\ln\left(1-\frac{1}{t}\right)} & \text{si } t < 0 \text{ ou } t > 1. \end{cases}$$

  Puisque $\lim\limits_{t\to 0} h(t) = 0 = h(0)$ et $\lim\limits_{t\to 1} h(t) = 1 = h(1)$, h est continue sur $\mathbb{R}$. De plus, quand $t \to \pm\infty$:

  $$h(t) = \frac{1}{-\frac{1}{t} - \frac{1}{2t^2} + o\left(\frac{1}{t^2}\right)} + t = t\left(1 - \left(1 + \frac{1}{2t} + o\left(\frac{1}{t}\right)\right)^{-1}\right) \underset{t\to\pm\infty}{\longrightarrow} \frac{1}{2},$$

  donc h est bornée aux voisinages de $\pm\infty$; étant aussi bornée sur tout segment (car continue), elle est bornée sur $\mathbb{R}$ et ainsi $\|g_n\|_\infty = \frac{1}{n}\|h\|_\infty \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} 0$, ce qui montre que la convergence est uniforme sur $\mathbb{R}$.

Exercice 8: $(\star)$

Soit (f_n) la suite de fonctions définies sur $[0\,;1]$ par : $f_n(x) = \dfrac{2^n x}{1+n2^n x^2}$.

Étudier sa convergence simple sur $[0\,;1]$. La convergence est-elle uniforme sur $[0\,;1]$? sur $[\alpha\,;1]$ $(0 < \alpha < 1)$?

Comparer $\lim\limits_{n\to\infty}\displaystyle\int_0^1 f_n$ et $\displaystyle\int_0^1 \lim_{n\to\infty} f_n$.

✎ *Solution:*

Pour $x=0$, $f_n(0)=0$ pour tout n et sinon, $f_n(x) \underset{n\to+\infty}{\sim} \dfrac{2^n x}{n2^n x^2} = \dfrac{1}{nx} \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} 0$ donc finalement la suite CVS sur $\mathbb{R}$ vers la fonction nulle.

Pour $n\in\mathbb{N}^*$, $\displaystyle\int_0^1 f_n(x)\,\mathrm{d}x = \frac{1}{2n}\left[\ln(1+n2^n x^2)\right]_0^1 = \frac{\ln(1+n2^n)}{2n} \underset{n\to+\infty}{\sim} \frac{ln(n2^n)}{2n} = \frac{\ln n + n\ln 2}{2n}$

donc $\displaystyle\lim_{n\to+\infty}\left(\int_0^1\right) f_n = \frac{\ln 2}{2}$ alors que $\displaystyle\int_0^2 \lim_{n\to+\infty} f_n = 0$. Par négation du théorème d'interversion limite-intégrale sur un segment, on en déduit qu'il n'y a pas CVU sur tout le segment $[0\,;1]$.

Cependant, si $x\in[\alpha\,;1]$ avec $0<\alpha<1$ on a $0\leqslant f_n(x)\leqslant \dfrac{2^n}{1+n2^n\alpha}$ donc $\|f_n\|_\infty^{[\alpha;1]} \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} 0$, et il y a CVU sur cet intervalle.

Exercice 9: ($\star$) - ($\star\star$)

Déterminer les limites éventuelles, quand n tend vers $+\infty$, de :

a) $\displaystyle\int_0^1 \frac{\mathrm{d}x}{1+x+...+x^n}$ **b)** $\displaystyle\int_0^1 \frac{ne^{-x}+x^2}{n+x}\,\mathrm{d}x$ **c)** $\displaystyle\int_0^1 \frac{n(x^3+x)\mathrm{e}^{-nx}}{nx+1}\,\mathrm{d}x$.

✎ *Solution:*

a) Notons $f_n(x)=\dfrac{1}{1+x+\ldots+x^n}$. On a donc $f_n(x)=\begin{cases}\frac{1-x}{1-x^{n+1}} & \text{si } x\in[0\,;1[\\ \frac{1}{n} & \text{si } x=1\end{cases}$ donc la suite $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge simplement sur $[0\,;1]$ vers la fonction $f : x\mapsto \begin{cases}1-x & \text{si } x\in[0\,;1[\\ 0 & \text{si } x=1.\end{cases}$

Les f_n étant continues alors que f ne l'est pas, il ne peut pas y avoir CVU sur $[0\,;1]$ donc on ne peut pas intervertir directement limite et intégrale.

Cependant : $\displaystyle\int_0^1 (f_n-f) = \int_0^1\left(\frac{1}{1+x+\ldots+x^n}-(1-x)\right)\mathrm{d}x = \int_0^1 \frac{x^{n+1}}{1+x+\ldots+x^n}\,\mathrm{d}x$ donc

$$0\leqslant \int_0^1 f_n - \int_0^1 f \leqslant \int_0^1 x^{n+1}\,\mathrm{d}x = \frac{1}{n+2}$$

ce qui prouve que $\displaystyle\lim_{n\to+\infty}\int_0^1 f_n = \int_0^1 f = \int_0^1 (1-x)\,\mathrm{d}x = \frac{1}{2}$.

b) Notons $f_n(x)=\frac{ne^{-x}+x^2}{n+x}$ pour $x\in[0\,;1]$. Il est facile de voir que la suite (f_n) CVS vers $f\colon x\mapsto \mathrm{e}^{-x}$.

De plus pour tout $x\in[0\,;1]$, $|f_n(x)-f(x)| = \frac{|x^2-x\mathrm{e}^{-x}|}{n+x} \leqslant \frac{M}{n}$ où M est la borne sup sur $[0\,;1]$ de la fonction $x\mapsto \left|x^2-x\mathrm{e}^{-x}\right|$ (qui existe car fonction continue sur un segment), donc $\|f_n-f\|_\infty \leqslant \frac{M}{n} \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} 0$, et la convergence est uniforme sur $[0\,;1]$.

D'après le théorème d'interversion limite-intégrale, $\displaystyle\lim_{n\to+\infty}\int_0^1 f_n = \int_0^1 f = \int_0^1 \mathrm{e}^{-x}\,\mathrm{d}x = 1-\mathrm{e}^{-1}$.

c) Ici nul besoin de théorème savant, il suffit de majorer :

$$0\leqslant \int_0^1 \frac{n(x^3+x)\mathrm{e}^{-nx}}{nx+1}\,\mathrm{d}x \leqslant \int_0^1 \frac{n(x^3+x)\mathrm{e}^{-nx}}{nx}\,\mathrm{d}x = \int_0^1 (x^2+1)\mathrm{e}^{-nx}\,\mathrm{d}x \leqslant 2\int_0^1 \mathrm{e}^{-nx}\,\mathrm{d}x = 2\frac{1-\mathrm{e}^{-n}}{n}$$

donc la limite cherchée vaut 0.

Exercice 10: Approximation polynomiale de $\sqrt{x}$ ($\star\star$)

On définit la suite (P_n) de polynômes par $P_0=1$ et $P_{n+1}=P_n+\dfrac{1}{2}(X-P_n^2)$.

a) Montrer que : $\forall\, x\in\mathbb{R}^+,\ \forall\, n\in\mathbb{N},\ P_{n+1}(x)-\sqrt{x} = \left(P_n(x)-\sqrt{x}\right)\left(1-\dfrac{1}{2}\left(P_n(x)+\sqrt{x}\right)\right)$.

b) Exprimer de même $P_{n+1}(x)+\sqrt{x}$ en fonction de $P_n(x)+\sqrt{x}$.

c) Montrer que pour tout $x\in[0\,;1]$ et tout $n\in\mathbb{N}$, $\sqrt{x}\leqslant P_{n+1}(x)\leqslant P_n(x)\leqslant 1$.

d) Montrer que (P_n) converge simplement sur $[0\,;1]$ vers $f : \begin{cases}[0\,;1] & \longrightarrow & \mathbb{R}\\ x & \longmapsto & \sqrt{x}.\end{cases}$

e) Donner le sens de variation de $x\mapsto P_n(x)-\sqrt{x}$ et celui de $x\mapsto P_n(x)+\sqrt{x}$ sur $[0\,;1]$.

f) Montrer que (P_n) converge uniformément vers f.

✎ *Solution:*

a) On développe le second membre de l'égalité et on trouve le premier.

b) De même,
$$P_{n+1}+\sqrt{x}=\left(P_n+\sqrt{x}\right)\left(1-\frac{P_n-\sqrt{x}}{2}\right).$$

c) Pour $n=0$ on a bien sûr $\sqrt{x}\leqslant P_n(x)\leqslant 1$ sur $[0\,;1]$.
On effectue ensuite une récurrence : on suppose $\sqrt{x}\leqslant P_n(x)\leqslant 1$. On obtient alors
$$P_{n+1}(x)=P_n(x)+\frac{1}{2}\underbrace{\left(x-P_n^2(x)\right)}_{\leqslant 0}\leqslant P_n(x)\leqslant 1.$$

De plus, on a $\dfrac{P_n(x)+\sqrt{x}}{2}\leqslant 1$, donc
$$P_{n+1}(x)-\sqrt{x}=\left(P_n(x)-\sqrt{x}\right)\left(1-\frac{P_n(x)+\sqrt{x}}{2}\right)\geqslant 0.$$

Ainsi, on a par récurrence la double inégalité voulue.

d) Pour x fixé, la suite $\left(P_n(x)\right)_{n\in\mathbb{N}}$ est décroissante et minorée par $\sqrt{x}$, elle converge donc ; notons $f(x)$ sa limite. En injectant dans la relation de définition de P_{n+1}, on obtient
$$f(x)=f(x)+\frac{1}{2}\left(x-f^2(x)\right),$$
donc $f^2(x)=x$; or les P_n sont positifs donc $f(x)$ aussi d'où $f(x)=\sqrt{x}$ et on a donc convergence simple vers $x\mapsto\sqrt{x}$.

e) Une récurrence montre que la première est décroissante et la seconde croissante (faire la récurrence sur les *deux* propriétés simultanément et montrer que, en notant $\psi_n(x)=P_n(x)-\sqrt{x}$ et $\phi_n(x)=P_n(x)+\sqrt{x}$, on a $\psi_{n+1}=\left(1-\frac{1}{2}\phi_n\right)\psi_n$ et $\phi_{n+1}=\left(1-\frac{1}{2}\phi_n\right)\phi_n$).

f) Par décroissance de ψ_n, on a $0\leqslant P_n(x)-\sqrt{x}\leqslant P_n(0)$. Or $P_n(0)$ tend vers 0 quand $n\to\infty$, ce qui montre la convergence uniforme.

Séries de fonctions (ex. 11 à 18)

Exercice 11: (⋆⋆) - (⋆⋆⋆)

Étudier la convergence et calculer les sommes des séries de fonctions :

a) $\displaystyle\sum_{n\geqslant 0}\frac{1}{\operatorname{ch} nx.\operatorname{ch}(n+1)x}$ (utiliser la formule « bien connue » : $\operatorname{th} p-\operatorname{th} q=\ldots$).

b) $\displaystyle\sum_{n\geqslant 1}\frac{\sin nx}{n2^n}$ (penser à la dérivation).

c) $\displaystyle\sum_{n\geqslant 0}2^{-n}\operatorname{th}\left(\frac{x}{2^n}\right)$ (utiliser des primitives).

d) $\displaystyle\sum_{n\geqslant 1}\frac{e^{inx}}{n}$ (utiliser $\dfrac{1}{n}=\displaystyle\int_0^1 t^{n-1}\,dt$).

✎ *Solution:*

a) Déjà la série proposée diverge grossièrement pour $x=0$, et est convergente pour tout $x\in\mathbb{R}^*$, puisque $\operatorname{ch} nx.\operatorname{ch}(n+1)x\underset{n\to+\infty}{\sim}\frac{1}{4}e^{-(2n+1)|x|}$, qui est le terme général d'une série géométrique convergente.
$\operatorname{th} p-\operatorname{th} q=\frac{\operatorname{sh} p}{\operatorname{ch} p}-\frac{\operatorname{sh} q}{\operatorname{ch} q}=\frac{\operatorname{sh} p\operatorname{ch} q-\operatorname{sh} q\operatorname{ch} p}{\operatorname{ch} p\,\operatorname{ch} q}=\frac{\operatorname{sh}(p-q)}{\operatorname{ch} p\,\operatorname{ch} q}$ donc
$$\operatorname{th}(n+1)x-\operatorname{th}(nx)=\frac{\operatorname{sh} x}{\operatorname{ch} nx.\operatorname{ch}(n+1)x}\,.$$

La série proposée se ramène donc à une banale série télescopique (je vous laisse finir les calculs).

b) Posons $u_n(x)=\frac{\sin nx}{n2^n}$. La série $\sum u_n$ converge normalement sur $\mathbb{R}$ puisque $\|u_n\|_\infty=\frac{1}{n2^n}\leqslant\left(\frac{1}{2}\right)^n$, terme général d'une série géométrique convergente.

Les u_n sont de classe $\mathscr{C}^1$, et la série $\sum u_n'$ converge normalement donc uniformément sur $\mathbb{R}$ puisque $\|u_n'\|_\infty = \left(\frac{1}{2}\right)^n$. Le théorème de dérivation d'une série de fonctions assure alors que la somme S de la série est une fonction de classe $\mathscr{C}^1$ sur $\mathbb{R}$ et que :

$$\forall x \in \mathbb{R},\ S'(x) = \sum_{n=1}^{+\infty} u_n'(x) = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{\cos nx}{2^n}\,.$$

Il reste à calculer cette somme, ce qui est classique :

$$\begin{aligned} S'(s) &= \mathcal{R}e\left(\sum_{n=1}^{+\infty}\left(\frac{e^{ix}}{2}\right)^n\right) = \mathcal{R}e\left(\frac{\frac{e^{ix}}{2}}{1-\frac{e^{ix}}{2}}\right) \qquad \left(\frac{e^{ix}}{2} \neq 1\,!\right)\\ &= \mathcal{R}e\left(\frac{e^{ix}(2-e^{-ix})}{|2-e^{ix}|^2}\right) = \frac{2\cos x - 1}{5-4\cos x}\,. \end{aligned}$$

Puisque $S(0)=0$ on en tire, pour tout $x \in \mathbb{R}$:

$$S(x) = \int_0^x S'(t)\,dt = \int_0^x \frac{2\cos t - 1}{5-4\cos t} = \int_0^x \frac{-\frac{1}{2}(4\cos t - 5) + \frac{3}{2}}{5-4\cos t}\,dt = -\frac{x}{2} + \frac{3}{2}\int_0^x \frac{dt}{5-4\cos t}\,.$$

S étant 2π-périodique, nous nous limiterons à $x \in \left]-\pi\,;\pi\right[$ $(S(\pi)=0)$; on peut alors effectuer dans la dernière intégrale le changement de variable $u = \tan\frac{t}{2}$, qui réalise une bijection de classe $\mathscr{C}^1$ strictement monotone de $\left]-\pi\,;\pi\right[$ sur $\mathbb{R}$. On obtient alors :

$$\begin{aligned} \forall x \in \left]-\pi\,;\pi\right[,\ S(x) &= -\frac{x}{2} + \frac{3}{2}\int_0^{\tan\frac{x}{2}} \frac{2\,du}{(1+u^2)\left(5-4\frac{1-u^2}{1+u^2}\right)} = -\frac{x}{2} + 3\int_0^{\tan\frac{x}{2}} \frac{du}{9u^2+1}\\ &= -\frac{x}{2} + \left[\operatorname{Arc}\tan(3u)\right]_0^{\tan\frac{x}{2}} = -\frac{x}{2} + \operatorname{Arc}\tan\left(3\tan\frac{x}{2}\right)\,. \end{aligned}$$

(*Rem : on pourrait arranger cette expression en écrivant* $\frac{x}{2} = \operatorname{Arc}\tan\left(\tan\frac{x}{2}\right)$ *puis en utilisant une formule donnant* $\operatorname{Arc}\tan a - \operatorname{Arc}\tan b$...)

c) Posons $f(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} 2^{-n}\operatorname{th}\left(\frac{x}{2^n}\right)$. Cette série est normalement convergente sur $\mathbb{R}$, puisque pour tout $x \in \mathbb{R}$, $\left|\operatorname{th}\left(\frac{x}{2^n}\right)\right| \leqslant \frac{1}{2^n}$, terme général d'une série géométrique convergente.
En particulier, elle est uniformément convergente sur $\mathbb{R}$, donc f est continue et de plus on peut intégrer terme à terme la série sur tout segment :

$$\int_0^x f(t)\,dt = \sum_{n=0}^{+\infty}\int_0^x 2^{-n}\operatorname{th}\left(\frac{t}{2^n}\right)\,dt = \sum_{n=0}^{+\infty}\left[\ln\operatorname{ch}\left(\frac{t}{2^n}\right)\right]_0^x = \sum_{n=0}^{+\infty}\ln\operatorname{ch}\left(\frac{x}{2^n}\right)$$

(la série obtenue est nécessairement convergente).
Pour $x \in \mathbb{R}$ et $N \in \mathbb{N}$ posons $f_N(x) = \sum_{n=0}^{N}\ln\operatorname{ch}\left(\frac{x}{2^n}\right)$; alors $\exp\left(f_N(x)\right) = \prod_{n=0}^{N}\operatorname{ch}\left(\frac{x}{2^n}\right)$.
En utilisant alors la formule $\operatorname{sh}2a = 2\operatorname{sh}a\operatorname{ch}a$, on a :

$$\operatorname{sh}2x = 2\operatorname{sh}x\operatorname{ch}x = 4\operatorname{ch}x\operatorname{ch}\frac{x}{2}\operatorname{sh}\frac{x}{2} = 8\operatorname{ch}x\operatorname{ch}\frac{x}{2}\operatorname{ch}\frac{x}{4}\operatorname{sh}\frac{x}{4} = \cdots = 2^{N+1}\operatorname{ch}x\operatorname{ch}\frac{x}{2}\cdots\operatorname{ch}\frac{X}{2^N}\operatorname{sh}\frac{x}{2^N}$$

de sorte que, pour $x \neq 0$,

$$\prod_{n=0}^{N}\operatorname{ch}\left(\frac{x}{2^n}\right) = \frac{\operatorname{sh}2x}{2^{N+1}\operatorname{sh}\frac{x}{2^N}} \underset{N\to+\infty}{\longrightarrow} \frac{\operatorname{sh}2x}{2x} \qquad \left(\text{puisque } \operatorname{sh}a \underset{a\to 0}{\sim} a\right)$$

Finalement, pour $x \in \mathbb{R}^*$, $f_N(x) \underset{N\to+\infty}{\longrightarrow} \ln\left(\frac{\operatorname{sh}2x}{2x}\right)$ donc $\int_0^x f(t)\,dt = \ln(\operatorname{sh}2x) - \ln(2x)$ et, en dérivant, on trouve $f(x) = 2\coth(2x) - \frac{1}{x}$, l'égalité obtenue se prolongeant en $x=0$ puisque f est continue sur $\mathbb{R}$.

d) *Dans cet exercice, aucun théorème du cours ne s'applique, on revient donc à la définition avec les sommes partielles.*
Il est clair que, pour $x \in 2\pi\mathbb{Z}$, la série proposée est divergente (série harmonique). Donc dans toute la suite, x désigne un réel $\notin 2\pi\mathbb{Z}$.
Pour $N \in \mathbb{N}^*$ on a :

$$\sum_{n=1}^{N}\frac{e^{inx}}{n} = \sum_{n=1}^{N} e^{inx}\int_0^1 t^{n-1}\,dt = \int_0^1\left(\sum_{n=1}^{N}(e^{ix})^n t^{n-1}\right)dt = e^{ix}\int_0^1\frac{1-t^Ne^{iNx}}{1-te^{ix}}\,dt$$

d'après la formule du cours sur la somme des termes d'une suite géométrique de raison te^{ix}, cette raison étant bien différente de 1 pour tout $t \in [0\,;1]$ puisque $x \notin 2\pi\mathbb{Z}$.

Ainsi, $\displaystyle\sum_{n=1}^{N}\frac{e^{inx}}{n}=\int_0^1\frac{e^{ix}}{1-te^{ix}}\,dt+r_N$ où :

$$|r_n|=\left|e^{ix}\int_0^1\frac{t^Ne^{iNx}}{1-te^{ix}}\,dt\right|\leqslant\int_0^1\frac{t^N\,dt}{|1-te^{ix}|}\,.$$

Or pour x fixé $\notin 2\pi\mathbb{Z}$ la fonction $t\mapsto\frac{1}{|1-te^{ix}|}$ est continue donc bornée sur $[0\,;1]$, donc si M désigne sa borne supérieure on aura $|r_N|\leqslant M\displaystyle\int_0^1 t^N\,dt=\frac{M}{N+1}$, ce qui prouve que $\displaystyle\lim_{N\to+\infty}r_N=0$.
La série proposée est donc bien convergente pour tout $x\notin 2\pi\mathbb{Z}$ et l'on a :

$$\sum_{n=0}^{+\infty}\frac{e^{inx}}{n}=\int_0^1\frac{e^{ix}}{1-te^{ix}}\,dt.$$

Il ne « reste plus qu'à » calculer cette intégrale :

$$\begin{aligned}f(x)=\int_0^1\frac{e^{ix}}{1-te^{ix}}\,dt&=\int_0^1\frac{e^{ix}(1-te^{-ix})}{|1-te^{ix}|^2}\,dt\\&=\int_0^1\frac{t-\cos x}{t^2-2t\cos x+1}\,dt+i\sin x\int_0^1\frac{dt}{(t-\cos x)^2+\sin^2 x}\,dt\\&=-\frac12\left[\ln(t^2-2t\cos x+1)\right]_0^1+i\left[\operatorname{Arc}\tan\left(\frac{t-\cos x}{\sin x}\right)\right]_0^1\\&=-\frac12\ln\left(4\sin^2\frac{x}{2}\right)+i\left(\operatorname{Arc}\tan\frac{1-\cos x}{\sin x}+\operatorname{Arc}\tan(\cot x)\right)\,.\end{aligned}$$

Pour $x\in\,]0\,;\pi[$, on a $\sin\frac{x}{2}>0$, $\operatorname{Arc}\tan\dfrac{1-\cos x}{\sin x}=\operatorname{Arc}\tan\left(\dfrac{2\sin^2\frac{x}{2}}{2\sin\frac{x}{2}\cos\frac{x}{2}}\right)=\operatorname{Arc}\tan\left(\tan\frac{x}{2}\right)=\frac{x}{2}$ et $\operatorname{Arc}\tan(\cot x)=\frac{\pi}{2}-x$ de sorte que :

$$\forall\,x\in\,]0\,;\pi[,\ f(x)=-\ln\left(2\sin\frac{x}{2}\right)+i\frac{\pi-x}{2}\,.$$

Pour $x=\pi$, on vérifie par un calcul direct de l'intégrale $\displaystyle\int_0^1\frac{e^{i\pi}}{1-te^{i\pi}}\,dt=-\ln 2$ que la formule ci-dessus reste valable.
Pour $x\in[-\pi\,;0[$, on utilise le fait que $f(x)=\overline{f(-x)}$ ce qui permet d'avoir l'expression de f sur $[-\pi\,;\pi]\setminus\{0\}$, puis on prolonge par 2π-périodicité.

Exercice 12: (⋆⋆)

Sur $I=\,]-1\,;+\infty[$, on pose

$$S(x)=\sum_{n=1}^{+\infty}\left(\frac1n-\frac{1}{n+x}\right)\,.$$

a) Montrer que S est définie et continue sur I.

b) Étudier la monotonie de S.

c) Calculer $S(x+1)-S(x)$.

d) Déterminer un équivalent de $S(x)$ en -1^+.

e) Établir : $\forall\,n\in\mathbb{N},\ S(n)=\sum\limits_{k=1}^{n}\frac1k$.

f) En déduire un équivalent de $S(x)$ en $+\infty$.

✎ *Solution:*

a) $f_n\,:\,x\mapsto\dfrac1n-\dfrac{1}{n+x}=\dfrac{x}{n(n+x)}$ est définie et continue sur $]-1\,;+\infty[$. Soient $-1<a\leqslant 0\leqslant 1\leqslant b$.

$$\|f_n\|_\infty^{[a;b]}\leqslant\frac{b}{n(n+a)}$$

La série de fonction $\sum f_n$ converge normalement sur $[a\,;b]$ et donc converge uniformément sur tout segment inclus dans $]-1\,;+\infty[$. Les f_n étant continues, il en résulte que S est continue sur I.

b) Chaque f_n est croissante donc S est croissante (on somme les inégalités...).

c) $S(x+1)-S(x) = \sum_{n=2}^{+\infty} \frac{1}{n-1} - \frac{1}{n+x} - \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n} - \frac{1}{n+x}$ donc :

$$S(x+1)-S(x) = \sum_{n=2}^{+\infty} \frac{1}{n-1} - \frac{1}{n} - 1 + \frac{1}{x+1} = \frac{1}{x+1}\,.$$

d) Quand $x \to -1$, $S(x+1) \longrightarrow S(0) = 0$ car S est continue en 0 d'où :

$$S(x) = -\frac{1}{x+1} + S(x+1) \underset{x\to -1^+}{\sim} -\frac{1}{x+1}\,.$$

e) $S(0) = 0$ et pour tout k entier $S(k+1)-S(k) = \frac{1}{k+1}$ donc en sommant, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $S(n) = \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k}$.

f) On « sait » que $\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k} \underset{n\to+\infty}{\sim} \ln n$ et $\ln(n+1) \underset{n\to+\infty}{\sim} \ln n$. Puisque $S(\lfloor x\rfloor) \leqslant S(x) \leqslant S(\lfloor x\rfloor + 1)$, on obtient :

$$S(x) \underset{x\to+\infty}{\sim} \ln\lfloor x\rfloor) \underset{x\to+\infty}{\sim} \ln x\,.$$

Exercice 13: (⋆⋆)

Pour $x > 0$, on pose : $S(x) = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n+n^2x}$.

a) Montrer que S est bien définie sur $\mathbb{R}^{+\star}$.

b) Montrer que S est continue.

c) Étudier la monotonie de S.

d) Déterminer la limite en $+\infty$ de S puis un équivalent de S en $+\infty$.

e) Déterminer un équivalent à S en 0.

✎ *Solution:*

Posons $f_n(x) = \dfrac{1}{n+n^2x}$ avec $x > 0$.

a) Soit $x \in]0,+\infty[$. On a $f_n(x) \sim \dfrac{1}{n^2x}$ donc $\sum f_n(x)$ converge. On en déduit que la série $\sum f_n$ converge simplement sur $]\,0,+\infty[$ et donc la fonction $S = \sum_{n=0}^{+\infty} f_n$ est bien définie sur $\mathbb{R}_+^*$.

b) Les f_n sont continues sur $\mathbb{R}^{+\star}$.

Soit $a > 0$. $\|f_n\|_\infty^{[a,+\infty[} \leqslant \dfrac{1}{n+n^2a} = O(\dfrac{1}{n^2})$.

La série de fonctions $\sum f_n$ converge donc normalement sur $[a,+\infty[$ donc converge uniformément sur tout segment de $\mathbb{R}_+^*$.

On peut donc conclure que S est continue.

c) Chaque f_n est décroissante donc la fonction S l'est aussi (en effet, pour $x \leqslant y$ on a $f_n(x) \geqslant f_n(y)$ d'où $S(x) \geqslant S(y)$ en sommant ces inégalités).

d) Puisqu'il y a convergence normale donc uniforme sur $[1,+\infty[$,

$$\lim_{x\to+\infty} \sum_{n=1}^{+\infty} f_n(x) = \sum_{n=1}^{+\infty} \lim_{x\to+\infty} f_n(x) = 0$$

On remarque

$$xf_n(x) \underset{x\to+\infty}{\longrightarrow} \frac{1}{n^2}$$

Posons $g_n : x \mapsto \dfrac{x}{n(1+nx)}$. La fonction g_n croît de 0 à $1/n^2$ sur $\mathbb{R}^+$ donc

$$\|g_n\|_\infty^{[0,+\infty[} = \frac{1}{n^2}$$

La série de fonctions $\sum g_n$ converge normalement donc uniformément sur $\mathbb{R}^+$ donc

$$\lim_{x\to+\infty} \sum_{n=1}^{+\infty} g_n(x) = \sum_{n=1}^{+\infty} \lim_{x\to+\infty} g_n(x) = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n^2} = \frac{\pi^2}{6}$$

Par suite $xS(x) \underset{x\to+\infty}{\longrightarrow} \dfrac{\pi^2}{6}$ puis $S(x) \underset{x\to+\infty}{\sim} \frac{\pi^2}{6x}\cdot$.

e) La fonction $t \mapsto \dfrac{1}{t(1+tx)}$ est décroissante donc par comparaison classique avec une intégrale on obtient

$$\int_1^{+\infty} \frac{\mathrm{d}t}{t(1+tx)} \leqslant \sum_{n=1}^{+\infty} u_n(x) \leqslant \frac{1}{1+x} + \int_1^{+\infty} \frac{\mathrm{d}t}{t(1+tx)}$$

Or

$$\int_1^{+\infty} \frac{\mathrm{d}t}{t(1+tx)} = \int_1^{+\infty} \left(\frac{1}{t} - \frac{x}{1+tx}\right) \mathrm{d}t = \left[\ln \frac{t}{1+tx}\right]_1^{+\infty} = \ln(1+x) - \ln(x)$$

donc

$$S(x) \underset{x\to 0}{\sim} -\ln(x)\,.$$

Exercice 14: (⋆⋆)

On pose, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$ et tout $x \in \mathbb{R}^+$: $f_n(x) = \dfrac{\mathrm{e}^{-nx}}{(n+x)^2}$.

a) Étudier la convergence de la série $\sum\limits_{n\geqslant 1} f_n$ sur $\mathbb{R}^+$.

b) Étudier la continuité de sa somme S.

c) Montrer que S est positive et décroissante sur $\mathbb{R}^+$.

d) Que vaut $S(0)$? Calculer $\lim\limits_{x\to\infty} S(x)$.

e) Montrer que S est de classe $\mathscr{C}^1$ sur $]0\,;+\infty[$.

f) S est-elle dérivable en 0 ?

✎ *Solution:*

a) On a convergence simple sur $\mathbb{R}^+$ puisque, par exemple, $0 \leqslant f_n(x) \leqslant \frac{1}{n^2}\cdot$

b) On a d'ailleurs convergence normale : $\|f_n\|_\infty \leqslant \dfrac{1}{n^2}$, donc CVU. Les f_n étant continues, la somme S est donc continue (théorème du cours).

c) On utilise la positivité et la décroissance de chaque fonction, puis on somme les inégalités.

d) $S(0) = \dfrac{\pi^2}{6}$. Puisque $S(x) \leqslant \dfrac{\pi^2}{6}\mathrm{e}^{-x}$ (majoration immédiate), on a $\lim\limits_{x\to+\infty} S(x) = 0$.

e) On n'a plus convergence normale de la série des dérivées : en effet :

$$f_n'(x) = \frac{-n\,\mathrm{e}^{-x}}{(n+x)^2} - \frac{2x\,\mathrm{e}^{-nx}}{(n+x)^4},$$

ce qui montre que $\|f_n'\|_\infty = |f_n'(0)| = \dfrac{1}{n} + \dfrac{2}{n^3} \sim \dfrac{1}{n}$.
En revanche, sur $[a\,;+\infty[$ avec $a > 0$, on a

$$\left\|f_n'\right\|_\infty^{[a,+\infty[} = \left|f_n'(a)\right| \underset{n\to\infty}{\sim} \frac{\mathrm{e}^{-na}}{n}.$$

Il y a donc CVN et par suite CVU sur $[a\,;+\infty[$. Ainsi, S est de classe $\mathscr{C}^1$ sur tout intervalle $[a\,;+\infty[$, donc est de classe $\mathscr{C}^1$ sur $]0\,;+\infty[$.

f) La fonction S' étant croissante, elle possède une limite finie quand $x \to 0^+$ si et seulement si elle est minorée. Supposons cette limite finie et égale à λ. On aurait alors, pour tout $x > 0$ et tout $N \geqslant 1$.

$$\lambda \leqslant S'(x) = \sum_{n=1}^{+\infty} f_n'(x) \leqslant \sum_{n=1}^{N} f_n'(x).$$

Dans cette somme finie, on peut faire tendre x vers 0, on obtient alors

$$\lambda \leqslant \sum_{n=1}^{N} f_n'(0) \leqslant -\sum_{n=1}^{N} \frac{1}{n}\,.$$

Ceci étant vrai pour tout $N \geqslant 1$, on obtient une contradiction (puisque la série harmonique diverge).
En conclusion, S' n'est pas minorée donc $\lim\limits_{x\to 0} S'(x) = -\infty$ et S n'est pas dérivable en 0^+ (d'après un corollaire du théorème de prolongement de la dérivée).

Exercice 15: (⋆⋆)

Soit $f(x) = \sum\limits_{n=1}^{+\infty} \mathrm{e}^{-x\sqrt{n}}$.

a) Quel est le domaine de définition de f ? Étudier la continuité de f sur celui-ci.

b) Montrer que f est strictement décroissante.

c) Étudier la limite de f en $+\infty$, puis déterminer un équivalent de f en $+\infty$.

d) Déterminer un équivalent simple de $f(x)$ quand $x \to 0^+$.

✎ *Solution:*

a) Posons $f_n(x) = \mathrm{e}^{-x\sqrt{n}}$.
Pour $x \leqslant 0$, la série $\sum \mathrm{e}^{-x\sqrt{n}}$ diverge grossièrement.
Pour $x > 0$, $n^2 f_n(x) \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} 0$ donc $f_n(x) \underset{n\to+\infty}{=} o\left(\frac{1}{n^2}\right)$ et la série $\sum \mathrm{e}^{-x\sqrt{n}}$ converge absolument.
La fonction f est donc définie sur $\mathbb{R}_+^*$.

Pour $a > 0$, $\|f_n\|_\infty^{[a,+\infty[} = f_n(a)$ et $\sum f_n(a)$ converge donc $\sum f_n$ converge normalement sur $[a\,;+\infty[$. Comme somme de série de fonctions continues convergeant uniformément sur tout segment, on peut affirmer que f est continue sur $\mathbb{R}_+^*$.

b) f est somme de fonction strictement décroissante, elle donc strictement décroissante (détailler...).

c) • Par convergence uniforme sur $[a\,;+\infty[$, on peut intervertir les limites en $+\infty$.
Ainsi $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = \sum\limits_{n=1}^{+\infty} \lim\limits_{x\to+\infty} f_n(x) = 0$.

• $\frac{f(x)}{\mathrm{e}^{-x}} = 1 + \sum\limits_{n=2}^{+\infty} \mathrm{e}^{-x(\sqrt{n}-1)}$. Pour les mêmes raisons que ci-dessus, on peut écrire :

$$\lim_{x\to+\infty}\left(\sum_{n=2}^{+\infty} \mathrm{e}^{-x(\sqrt{n}-1)}\right) = \sum_{n=2}^{+\infty} \lim_{x\to+\infty}\left(\mathrm{e}^{-x(\sqrt{n}-1)}\right) = 0\,,$$

donc $\lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{\mathrm{e}^{-x}}{x} = 1$ c'est-à-dire $f(x) \underset{x\to+\infty}{\sim} \mathrm{e}^{-x}$.

d) Par décroissance sur $\mathbb{R}_+$ de $t \mapsto \mathrm{e}^{-x\sqrt{t}}$, $\displaystyle\int_n^{n+1} \mathrm{e}^{-x\sqrt{t}}\mathrm{d}t \leqslant \mathrm{e}^{-x\sqrt{n}} \leqslant \int_{n-1}^{n} \mathrm{e}^{-x\sqrt{t}}\mathrm{d}t$ pour tout $n \in \mathbb{N}$ (inégalité de gauche) et $n \in \mathbb{N}^*$ (inégalité de droite).
En sommant les inégalités de gauche pour $n = 0$ à $+\infty$ et celles de droite pour $n = 1$ à $+\infty$, et compte tenu de la convergence de l'intégrale on obtient :

$$\int_0^{+\infty} \mathrm{e}^{-x\sqrt{t}}\,\mathrm{d}t - 1 \leqslant f(x) \leqslant \int_0^{+\infty} \mathrm{e}^{-x\sqrt{t}}\,\mathrm{d}t\,.$$

Or $\displaystyle\int_0^{+\infty} \mathrm{e}^{-x\sqrt{t}}\,\mathrm{d}t = \frac{2}{x^2}$ (poser t = u^2/x^2 puis i.p.p) donc on en déduit facilement $f(x) \underset{x\to0^+}{\sim} \dfrac{2}{x^2}$.

Exercice 16: (⋆⋆⋆)

Pour $t > 0$, on pose :

$$S(t) = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(-1)^n}{1+nt}\,.$$

a) Justifier que S est définie et continue sur $]0, +\infty[$.

b) Étudier la limite de S en $+\infty$.

c) Étudier la limite de S en 0^+.

d) Établir que S est de classe $\mathscr{C}^1$ sur $]0, +\infty[$.

✎ *Solution:*

a) Posons $f_n(t) = \dfrac{(-1)^n}{1+nt}$ pour $t > 0$.

Par application du critère spécial des séries alternées, $\sum f_n$ converge simplement sur $]\,0,+\infty\,[$ et

$$\|R_n\|_\infty^{[a,+\infty[} \leqslant \frac{1}{1+na} \to 0$$

pour tout $a > 0$. Il y a donc CVU sur tout intervalle de la forme $[a,+\infty[$ et on en déduit que S est définie et continue sur $]0,+\infty[$.

b) Par convergence uniforme sur $[a,+\infty[$,

$$\lim_{t\to+\infty} S(t) = \sum_{n=0}^{+\infty} \lim_{t\to+\infty} \frac{(-1)^n}{1+nt} = 1$$

c) On pourrait penser à utiliser une conséquence du CSSA (encadrement de la somme entre deux sommes partielles consécutives) :

$$1 - \frac{1}{1+t} \leqslant S(t) \leqslant 1$$

mais cela ne suffit pas lorsque $t \to 0$...

On utilise alors la méthode « $\frac{u_0}{2}$ ». Pour cela on remarque que :

d) Les fonctions f_n sont de classe $\mathscr{C}^1$ et la série de fonctions $\sum f_n$ converge simplement.

Pour tout $t > 0$, $f_n'(t) = \frac{(-1)^{n+1}n}{(1+nt)^2}$.

La série $\sum f_n'(t)$ est alternée avec $|f_n'(t)| = \dfrac{n}{(1+nt)^2}$.

On calcule :

$$|f_n'(t)| - |f_{n+1}'(t)| = \frac{n(n+1)t^2 - 1}{(1+nt)^2(1+(n+1)t)^2}.$$

Soit $a > 0$. A partir d'un certain rang n_0,

$$n(n+1)a^2 - 1 \geqslant 0$$

et alors pour tout $t \geqslant a$, la suite $(f_n'(t))_{n\geqslant n_0}$ décroît et on peut appliquer le critère spécial des séries alternées à partir du rang n_0.

On a alors

$$|R_n(t)| \leqslant \frac{n}{(1+nt)^2} \leqslant \frac{n}{(1+na)^2}$$

donc

$$\|R_n\|_\infty^{[a,+\infty[} \leqslant \frac{n}{(1+na)^2} \to 0$$

Ainsi la série de fonctions $\sum f_n'$ converge normalement donc uniformément sur $[a,+\infty[$.

Par théorème, on peut alors conclure que S est de classe $\mathscr{C}^1$.

Exercice 17: ($\star\star$)

a) Montrer que la série de fonction $\displaystyle\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(-x\ln x)^n}{n!}$ converge normalement sur $[0\,;1]$.

b) En déduire : $\displaystyle\int_0^1 x^{-x}\,\mathrm{d}x = \sum_{n=1}^{+\infty} n^{-n}$.

✎ *Solution:*

a) Une étude rapide de fonction montre que : $\forall x \in [0\,;1],\ |x\ln x| \leqslant \frac{1}{\mathrm{e}}$.

Donc en notant $u_n(x) = \frac{(-x\ln x)^n}{n!}$ (que l'on peut prolonger par continuité en 0) on a $\|u_n\|_\infty = \frac{1}{n!\mathrm{e}}$, et puisque la série $\sum \frac{1}{n!}$ converge (série exponentielle), on a bien la CVN de $\sum u_n$ sur $[0\,;1]$

b) On connaît : $\forall z \in \mathbb{C},\ e^z = \sum\limits_{n=0}^{+\infty} \frac{z^n}{n!}$ donc pour tout $x > 0$, $e^{-x\ln x} = \sum\limits_{n=0}^{+\infty} \frac{(-x\ln x)^n}{n!}$, cette égalité pouvant se prolonger en 0.

Puisque la série CVU sur $[0\,;1]$ on peut intégrer terme à terme :

$$\int_0^1 x^{-x}\,\mathrm{d}x = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{1}{n!}\int_0^1 (-x\ln x)^n\,\mathrm{d}x.$$

Le calcul de cette dernière intégrale se fait aisément (n i.p.p successives) et permet d'obtenir le résultat demandé.

Exercice 18: ($\star$)

On pose, pour $n \in \mathbb{N}$ et $x \in [0\,;1]$:

$$u_n(x) = (-1)^{n+1} x^{2n+2} \ln x \text{ pour } x \in]0,1] \text{ et } u_n(0) = 0.$$

a) Calculer

$$\sum_{n=0}^{+\infty} u_n(x)$$

b) Montrer que la série des u_n converge uniformément sur $[0\,;1]$.

c) En déduire l'égalité :

$$\int_0^1 \frac{\ln x}{1+x^2}\,\mathrm{d}x = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1}}{(2n+1)^2}$$

✎ *Solution:*

a) Pour $x \in]0\,;1[$ on obtient par sommation d'une série géométrique

$$\sum_{n=0}^{+\infty} u_n(x) = -\frac{x^2 \ln x}{1+x^2}$$

Cette relation reste valable pour $x = 0$ ou $x = 1$.

b) On peut appliquer le critère spécial des séries alternées et donc

$$|R_n(x)| = \left| \sum_{k=n+1}^{+\infty} (-1)^{k+2} x^{2k+2} \ln x \right| \leqslant x^{2(n+2)} |\ln x|$$

L'étude de $\varphi : x \mapsto x^{2(n+2)} |\ln x|$ donne

$$\forall x \in [0\,;1],\ x^{2(n+2)} |\ln x| \leqslant \frac{\mathrm{e}^{-1}}{2(n+2)}$$

donc

$$\|R_n\|_\infty \leqslant \frac{\mathrm{e}^{-1}}{2(n+2)} \to 0$$

Cela démontre la CVU.

c) On a

$$\int_0^1 \frac{\ln x}{1+x^2}\mathrm{d}x = \int_0^1 \ln x \mathrm{d}x - \int_0^1 \frac{x^2 \ln x}{1+x^2}\mathrm{d}x$$

et on peut calculer la dernière intégrale par intégration terme à terme car il y a CVU sur $[0\,;1]$. Cela donne

$$\int_0^1 \frac{\ln x}{1+x^2}\mathrm{d}x = -1 + \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{(2n+3)^2}$$

puis le résultat.