EXERCICES : SÉRIES ENTIÈRES

Rayon de convergence (ex. 1 à 6)

Exercice 1: (⋆)

Déterminer le rayon de convergence de la série entière $\sum\limits_{n\geqslant 0} a_n z^n$ dans les cas suivants :

a) $a_n = \sqrt[n]{n}$ **b)** $a_n = \dfrac{n^n}{n!}$ **c)** $a_n = \dfrac{\sin n}{n}$ **d)** $a_n = \arctan\left(\dfrac{1}{n^\alpha}\right)$ $(\alpha \in \mathbb{R})$

e) $a_n = \dbinom{2n}{n}$ **f)** $\sqrt[n+1]{n+1} - \sqrt[n]{n}$ **g)** $a_n = \tan\left(\dfrac{n\pi}{7}\right)$ **h)** $a_n =$ somme des diviseurs de n

i) a_n vérifie : $a_{2p} = 0$ et $a_{2p+1} = \dfrac{(-1)^p}{\mathrm{ch}(p)}$

j) a_n vérifie : $a_{3p} = \dfrac{1}{p^2+1}$, $a_{3p+1} = \dfrac{1}{p!}$, $a_{3p+2} = a^p$ $(a \in \mathbb{R}_+^*)$

Exercice 2: (⋆)

Soit $\sum\limits_{n\geqslant 0} a_n z^n$ une série entière de rayon de convergence R.

Déterminer le rayon de convergence de la série entière $\sum\limits_{n\geqslant 0} a_n z^{2n}$.

Exercice 3: (⋆⋆)

Soit $\sum\limits_{n\geqslant 0} a_n z^n$ une série entière de rayon de convergence R. Déterminer le rayon de convergence de la série entière $\sum\limits_{n\geqslant 0} a_n^2 z^n$.

Exercice 4: (⋆⋆)

Soit $\sum\limits_{n\geqslant 0} a_n z^n$ une série entière de rayon de convergence $R > 0$.

Déterminer le rayon de convergence de la série entière $\sum\limits_{n\geqslant 0} \frac{a_n}{n!} z^n$.

Exercice 5: (⋆⋆)

Montrer que pour tout $\alpha \in \mathbb{R}$ les séries entières $\sum a_n z^n$ et $\sum n^\alpha a_n z^n$ ont même rayon de convergence.

Exercice 6:

Soit $f(x) = \sum\limits_{n=0}^{+\infty} a_n x^n$ la somme d'une série entière de rayon de convergence 1. On pose pour tout $n \in \mathbb{N}$:

$$S_n = \sum_{k=0}^{n} a_k \quad \text{et} \quad g(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} S_n x^n .$$

Déterminer le rayon de convergence de la série entière définissant g, puis, pour tout $x \in\,]-1\,;1[$, exprimer $g(x)$ en fonction de $f(x)$.

Calcul de la somme d'une série entière (ex. 7 à 10)

Exercice 7: (⋆)

Déterminer le rayon de convergence et la somme S de la série entière $\sum\limits_{n\in\mathbb{N}} n^3x^n$.

Exercice 8: (⋆)

Déterminer le rayon de convergence et la somme S de la série entière $\sum\limits_{n\in\mathbb{N}} \frac{n^3}{n!}x^n$.

Exercice 9:

Déterminer le rayon de convergence et calculer la somme de la série entière $\sum\limits_{n\geqslant 0} a_nz^n$ dans les cas suivants :

a) $a_n = n^{(-1)^n}$ **b)** $a_n = \dfrac{2n+1}{2n-1}$ **c)** $a_n = \dfrac{n}{3} - \left\lfloor \dfrac{n}{3} \right\rfloor$ **d)** $a_n = \dfrac{n^2+4n-1}{n!}$

e) $a_n = \sum\limits_{k=1}^{n} \dfrac{1}{k}$ **f)** $a_n = \dfrac{1}{1+2+\ldots+n}$ **g)** $a_n = \sin(n\theta)$ **h)** $a_n = \big(2+(-1)^n\big)^n$

i) $a_n = \dfrac{\sin(n\theta)}{n}$ **j)** $a_n = \dfrac{\cos(n\theta)}{n!}$ **k)** $a_n = \sum\limits_{k=0}^{n} \dfrac{1}{k!}$

l) (a_n) vérifie la récurrence : $a_{n+3} = a_{n+2} + a_{n+1} - a_n$ $((a_0, a_1, a_2) \in \mathbb{R}^3)$

Exercice 10:

Développer en série entière, au voisinage de 0, les fonctions suivantes :

a) $\dfrac{\ln(1+x)}{1+x^2}$ **c)** $\ln\left(1+\dfrac{x^2}{x+1}\right)$ **e)** $\dfrac{1-x\operatorname{ch}a}{1-2x\operatorname{ch}a+x^2}$

b) $\ln(x^2-5x+6)$ **d)** $e^{-x}\sin x$ **f)** $\arctan\left(\dfrac{1}{\sqrt{3}}+x\right)$

Propriétés de la somme d'une série entière (ex. 11 à 14)

Exercice 11: (⋆⋆⋆)

a) Soit $(a_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ une suite complexe. On suppose que la série entière $\sum\limits_{n\geqslant 1} a_nx^n$ a pour rayon de convergence $R>0$. Déterminer alors les rayons de convergence des séries entières

$$\sum_{n\geqslant 1} (a_n \ln n)x^n \quad \text{et} \quad \sum_{n\geqslant 1}\left(a_n\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{k}\right)x^n.$$

b) Donner un équivalent simple de $\sum\limits_{n=1}^{+\infty} \ln(n)\,x^n$ quand $x \to 1^-$.

Exercice 12: (⋆⋆)

Pour x réel, on pose : $f(x) = \sum\limits_{n=1}^{+\infty} \frac{x^n}{\sqrt{n}}$ ·

a) Déterminer le rayon de convergence R de la série entière définissant f.

b) Étudier la convergence de la série entière en 1 et en -1.

c) Établir la continuité de f en -1.

d) Déterminer la limite de f en 1.

Exercice 13: (⋆⋆⋆)

Soit $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite réelle bornée et pour $n \in \mathbb{N}$, $S_n = \sum\limits_{k=0}^{n} u_k$.

a) Quels sont les rayons de convergence des séries entières : $\sum\limits_{n\geqslant 0} \dfrac{u_n}{n!} x^n$ et $\sum\limits_{n\geqslant 0} \dfrac{S_n}{n!} x^n$?

b) On note u et S leurs sommes respectives. Former une relation entre S, S' et u'.

c) On suppose que la suite (S_n) converge vers un réel ℓ. Déterminer $\lim\limits_{x\to+\infty} \mathrm{e}^{-x} S(x)$.

d) Dans cette question, on choisit $u_n = (-1)^n$. Déterminer $\lim\limits_{x\to+\infty} \mathrm{e}^{-x} S(x)$.

Exercice 14: (⋆⋆⋆)

Soit $f : x \mapsto \sum\limits_{n=1}^{+\infty} \sin\left(\dfrac{1}{\sqrt{n}}\right) x^n$.

a) Déterminer le rayon de convergence R de la série entière définissant f.

b) Étudier la convergence en $-R$ et en R.

c) Déterminer la limite de $f(x)$ quand $x \to 1^-$.

d) Montrer que quand $x \to 1^-$: $(1-x)f(x) \to 0$.

Développements en série entière et équations différentielles (ex. 15 à 19)

Exercice 15: (⋆⋆)

Soient $\alpha \in \mathbb{R}$ et $f : x \mapsto \cos(\alpha \arcsin x)$.

a) Déterminer une équation différentielle d'ordre 2 dont f est solution.

b) En déduire un développement en série entière de f.

Exercice 16: (⋆⋆)

On considère l'équation différentielle : $(E) : ty' + y = 3t^2 \cos(t^{3/2})$.

a) Montrer qu'il existe une unique solution v de (E) développable en série entière au voisinage de 0.

b) Trouver l'ensemble des solutions de (E) sur $\mathbb{R}^{+\star}$ et en déduire une expression plus simple de v.

Exercice 17: (⋆⋆⋆)

Soit $f(x) = \sum\limits_{n=0}^{+\infty} \dfrac{n!}{1.3.5\ldots(2n+1)} x^{2n+1}$. Ensemble de définition de f ? Montrer que f est solution d'une équation différentielle linéaire du premier ordre, et calculer f.

Exercice 18: (⋆⋆)

a) Former de deux façons le développement en série entière au voisinage de 0 de $f : x \mapsto \mathrm{e}^{-x^2} \displaystyle\int_0^x \mathrm{e}^{t^2}\,\mathrm{d}t$.

b) En déduire la relation : $\displaystyle\sum_{k=0}^{n} \frac{(-1)^k}{2k+1} \binom{n}{k} \binom{2n}{n} = \frac{4^n}{2n+1}$.

Exercice 19: (⋆⋆⋆)

Soit (a_n) la suite réelle définie par : $a_0 = a_1 = a_2 = 1 \quad , \quad a_{n+1} = a_n - \dfrac{a_{n-2}}{2(n+1)}$ si $n \geqslant 2$.

a) Montrer que les suite (a_n) et (na_n) sont respectivement décroissante et croissante.

b) En déduire le rayon de convergence R de la série entière réelle $\sum a_n x^n$.

c) Montrer que la somme f de cette série est solution d'une équation différentielle linéaire, et calculer f.

d) En déduire une expression de a_n.

Applications des développements en série entière (ex. 20 à 24)

Exercice 20: (⋆)

a) Montrer que la fonction $x \mapsto \dfrac{\sin x}{x}$ se prolonge en une fonction de classe $\mathcal{C}^\infty$ sur $\mathbb{R}$.

b) Montrer qu'il en est de même de la fonction $x \mapsto \dfrac{\sin x}{\mathrm{e}^x - 1}$

Exercice 21: (⋆⋆)

Montrer que : $\displaystyle\int_0^1 \frac{\ln(1+x)}{x}\mathrm{d}x = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{(-1)^{n-1}}{n^2}$.

Exercice 22: (⋆⋆)

1. On définit une suite réelle (u_n) par : $u_0 = 1$, $u_{n+1} = \sum\limits_{k=0}^{n} u_k u_{n-k}$.
En considérant la série entière $\sum u_n x^n$, calculer u_n en fonction de n.

2. On définit une suite réelle (a_n) en posant : $a_0 = 1$, $2a_{n+1} = \displaystyle\sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} a_k a_{n-k}$.
En considérant une série entière convenable , calculer a_n en fonction de n.

Exercice 23: (⋆⋆)

En écrivant de deux façons différentes le développement en série entière de la solution f de l'équation différentielle $y' - 2xy = 1$ qui s'annule en 0, calculer la somme :

$$1 - \frac{\binom{n}{1}}{3} + \frac{\binom{n}{2}}{5} - \ldots + (-1)^n \frac{\binom{n}{n}}{2n+1}.$$

Exercice 24: (⋆⋆)

1. a) Montrer que les deux intégrales $\displaystyle\int_0^1 \frac{\ln t}{1-t}\,\mathrm{d}t$ et $\displaystyle\int_0^1 \frac{\ln t}{1-t^2}\,\mathrm{d}t$ existent. En développant en série entière $\dfrac{1}{1-t}$ et $\dfrac{1}{1-t^2}$, calculer leurs valeurs.

b) En déduire : $\displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{t}{\mathrm{sh} t}\,\mathrm{d}t$.

2. Calculer : $\displaystyle\int_0^1 \ln(t)\ln(1-t)\,\mathrm{d}t$.