EXERCICES : INTÉGRALES DÉPENDANT D'UN PARAMÈTRE, AVEC CORRIGÉS

Exercice 1: (⋆⋆)

Soit $f \in \mathcal{C}([0\,;1],\mathbb{R})$. Démontrer que : $\displaystyle\lim_{h\to 0^+}\int_0^1 \frac{h}{h^2+x^2}f(x)\,\mathrm{d}x = \frac{\pi}{2}f(0)$.

✎ *Solution:*

UTILISER PLUTÔT LE NOUVEAU THM AU PGM (convergence dominée à paramètre continu, cela évite d'utiliser la caractérisation séquentielle !

Mais pas le temps de refaire le corrigé....

On commence par remarquer que, d'après le théorème sur la caractérisation séquentielle de la limite, le calcul de la limite demandée équivaut à démontrer l'existence et à calculer la limite de $\displaystyle\int_0^1 \frac{h_n}{h_n^2+x^2}f(x)\,\mathrm{d}x$ lorsque $n\to+\infty$ pour toute suite $(h_n)_{n\in\mathbb{N}}$ de réels strictement positifs de limite nulle.
Soit donc $(h_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une telle suite, et posons :

$$I_n = \int_0^1 \frac{h_n}{h_n^2+x^2}f(x)\,\mathrm{d}x.$$

Le changement de variable $x = h_n t$ donne

$$I_n = \int_0^{1/h_n} \frac{f(h_n t)}{1+t^2}\,\mathrm{d}t.$$

On pose alors, pour $t \geqslant 0$: $g_n(t) = \begin{cases} \dfrac{f(h_n t)}{1+t^2} & \text{si } t < \frac{1}{h_n} \\ 0 & \text{si } t \geqslant \frac{1}{h_n} \end{cases}$.

Alors g_n est continue par morceaux sur $\mathbb{R}_+$ et $I_n = \displaystyle\int_{\mathbb{R}_+} g_n$. De plus, il est facile de montrer que la suite $(g_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge simplement sur $\mathbb{R}_+$ vers la fonction $t\mapsto \dfrac{f(0)}{1+t^2}$ (détaillez !). On a également la domination $|g_n(t)| \leqslant \dfrac{\|f\|_\infty^{[0;1]}}{1+t^2}$, et puisque la fonction $t\mapsto\dfrac{1}{1+t^2}$ est continue intégrable sur $\mathbb{R}_+$ le théorème de convergence dominée permet de conclure.

Exercice 2: (⋆⋆) - (⋆⋆⋆)

Soit, pour $x>0$: $h(x) = \displaystyle\int_0^1 \frac{\mathrm{e}^t}{t+x}\,\mathrm{d}t$.

a) Étudier la continuité, la dérivabilité, la monotonie de h.

b) Déterminer les limites de h en 0^+ et en $+\infty$.

c) Montrer que $\displaystyle\lim_{x\to 0^+}\big(h(x)+\ln x\big)$ existe.

✎ *Solution:*

a) Notons :

$$f(x,t) = \frac{\mathrm{e}^t}{t+x} \quad \text{pour} \quad (x,t)\in\mathbb{R}_+^*\times[0\,;1].$$

On utilise le théorème de dérivabilité d'une intégrale à paramètre :

- Pour tout $x>0$, la fonction $t\mapsto\dfrac{\mathrm{e}^t}{t+x}$ est continue (par morceaux) sur $[0\,;1]$, comme quotient de deux fonctions continues dont le dénominateur ne s'annule pas. Elle est donc aussi intégrable sur ce segment.
- Pour tout $t\in[0\,;1]$, la fonction $x\mapsto f(x,t)$ est dérivable et $\dfrac{\partial f}{\partial x}(x,t) = -\dfrac{\mathrm{e}^t}{(t+x)^2}$, donc $\dfrac{\partial f}{\partial x}$ est continue par rapport à $x\in\mathbb{R}_+^*$ et continue (par morceaux) par rapport à $t\in[0\,;1]$.
- Soit $a>0$. Pour tout $x\in[a\,;+\infty[$ et tout $t\in[0\,;1]$ on a

$$\left|\frac{\partial f}{\partial x}(x,t)\right| \leqslant \frac{\mathrm{e}^t}{(t+a)^2} = \varphi(t)$$

avec φ continue, donc intégrable, sur le segment $[0\,;1]$.

Le théorème susnommé permet donc d'affirmer que h est de classe $\mathscr{C}^1$ sur tout intervalle $[a\,;+\infty[$ avec $a>0$, donc sur $\mathbb{R}_+^*$, et que :

$$\forall x>0,:\ h'(x)=-\int_0^1 \frac{\mathrm{e}^t}{(t+x)^2}\,\mathrm{d}t.$$

h' étant négative, la fonction h est décroissante sur $\mathbb{R}_+^*$.

b) • Puisque $\mathrm{e}^t \geqslant 1$ sur $[0\,;1]$, on a $h(x)\geqslant \displaystyle\int_0^1 \frac{\mathrm{d}t}{t+x}=\ln(1+x)-\ln x$ pour tout $x>0$.
Il en résulte immédiatement : $\lim\limits_{x\to0^+} h(x)=+\infty$.

• Puisque $0\leqslant \dfrac{\mathrm{e}^t}{t+x}\leqslant \dfrac{\mathrm{e}}{x}$ pour tout $t\in[0\,;1]$, on a $0\leqslant h(x)\leqslant \dfrac{\mathrm{e}}{x}$ donc immédiatement : $\lim\limits_{x\to+\infty} h(x)=0$.

c) Compte tenu du calcul fait ci-dessus, on a, pour tout $x>0$:

$$h(x)+\ln x-\ln(1+x)=h(x)-\int_0^1\frac{\mathrm{d}t}{t+x}=\int_0^1\frac{\mathrm{e}^t-1}{t+x}\,\mathrm{d}t.$$

Pour chercher la limite de cette expression lorsque $x\to0$, on peut utiliser le théorème de convergence dominée combiné à la caractérisation séquentielle de la limite.

Soit donc $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite de réels >0 qui tend vers 0, et posons $f_n(t)=\dfrac{\mathrm{e}^t-1}{t+x_n}$ pour tout $t\in[0\,;1]$, de sorte que $h(x_n)+\ln x_n-\ln(1+x_n)=\displaystyle\int_0^1 f_n(t)\,\mathrm{d}t$.

– La suite $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge simplement sur $]0\,;1]$ vers la fonction $\varphi\colon t\mapsto \dfrac{\mathrm{e}^t-1}{t}$;
– φ est continue sur $]0\,;1]$;
– On a la domination :

$$\forall n\ni\mathbb{N},\ \forall t\in\,]0\,;1],\ 0\leqslant f_n(t)\leqslant\varphi(t)$$

et φ est intégrable sur $]0\,;1]$ car prolongeable par continuité en 0.

Le théorème de convergence dominée donne alors :

$$\lim_{n\to+\infty}\big(h(x_n)+\ln x_n-\ln(1+x_n)\big)=\int_0^1\varphi(t)\,\mathrm{d}t$$

et puisque ce résultat est vrai pour toute suite de réels positifs qui converge vers 0 on en déduit

$$\lim_{h\to0}\big(h(x)+\ln x-\ln(1+x)\big)=\int_0^1\varphi(t)\,\mathrm{d}t.$$

Il en résulte que $\lim\limits_{x\to0^+}(h(x)+\ln x)=\displaystyle\int_0^1\frac{\mathrm{e}^t-1}{t}\,\mathrm{d}t$ existe.

Remarques

a) On en déduit facilement : $h(x)\underset{x\to0^+}{\sim}-\ln x$

b) L'intégrale ci-dessus peut se calculer facilement sous forme d'une série, en écrivant $\dfrac{\mathrm{e}^t-1}{t}=\displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{t^{n-1}}{n!}$ et en utilisant le théorème d'intégration terme à terme de Lebesgue.

Exercice 3: (⋆⋆) - (⋆⋆⋆)

Pour x réel on pose : $f(x)=\displaystyle\int_0^1 t^x(1-t)^x\,\mathrm{d}t$.

a) Déterminer le domaine de définition de f et montrer que f est continue sur son domaine.

b) Calculer $f(n)$ pour $n\in\mathbb{N}$.

c) Étudier les limites de f aux bornes de son domaine.

✎ *Solution:*

a) • Posons $g(x,t)=t^x(1-t)^x$ pour $(x,t)\in\mathbb{R}\times\,]0\,;1[$.
Pour tout x réel, $t\mapsto g(x,t)$ est continue sur $]0\,;1[$ et

$$g(x,t)\underset{t\to0^+}{\sim}\frac{1}{t^{-x}}\quad;\quad g(x,t)\underset{t\to1^-}{\sim}\frac{1}{(1-t)^{-x}}.$$

Par comparaison à une fonction de Riemann au voisinage de 0 et au voisinage de 1, on $t \mapsto g(x,t)$ intégrable si et seulement si $-x < 1$ soit $x > -1$

f est donc définie sur $]-1\,;+\infty[$.

- La fonction g est continue par rapport à x et continue (par morceaux) par rapport à t.

  Soit $a > -1$. Puisque $\ln t$ est négatif sur $]0\,;1[$, on a

  $$x \geqslant a \Longrightarrow t^x = x \ln t \leqslant a \ln t = t^a$$

  donc :

  $$\forall t \in]0\,;1[, \forall x \in [a\,;+\infty[,\ 0 \leqslant g(x,t) \leqslant t^a(1-t)^a = \varphi(t)$$

  avec φ continue et intégrable sur $]0\,;1[$.

  L'hypothèse de domination locale est donc satisfaite, et le théorème de continuité des intégrales à paramètre assure la continuité de f sur $]-1\,;+\infty[$.

b) Posons pour $(n,m) \in \mathbb{N}^2$, $I_{n,m} = \displaystyle\int_0^1 t^n(1-t)^m\,\mathrm{d}t$ (ce n'est pas ,une intégrale impropre !). On fait une intégration par parties, pour $m \geqslant 1$:

$$I_{n,m} = \underbrace{\left[\frac{t^{n+1}}{n+1}(1-t)^m\right]_0^1}_{=0} + \frac{m}{n+1}\int_0^1 t^{n+1}(1-t)^{m-1}\,\mathrm{d}t.$$

Donc $I_{n,m} = \dfrac{m}{n+1} I_{n+1,m-1}$ et, par récurrence :

$$I_{n,m} = \frac{m(m-1)\cdots 1}{(n+1)(n+2)\cdots(n+m)} I_{n+m,0} = \frac{m(m-1)\cdots 1}{(n+1)(n+2)\cdots(n+m)(n+m+1)}.$$

En particulier, $f(n) = \dfrac{n(n-1)\cdots 1}{(n+1)(n+2)\cdots(2n+1)} = \dfrac{(n!)^2}{(2n+1)!}$.

c)
- Pour tout $t \in [0\,;1]$ on a $t(1-t) \leqslant \dfrac{1}{4}$ (inégalité bien connue).

  Donc pour $x > 0$, $t^x(1-t)^x \leqslant \dfrac{1}{4^x}$ d'où facilement : $\displaystyle\lim_{x\to+\infty} f(x) = 0$.

- Pour $t \in]0\,;1[$, les fonctions $x \mapsto t^x$ et $x \mapsto (1-t)^x$ sont positives décroissantes (car $\ln t \leqslant 0$), donc $x \leqslant y \Longrightarrow t^x(1-t)^x \geqslant t^y(1-t)^y$ donc f est décroissante.

  D'après le théorème de la limite monotone, si f était majorée sur son domaine, elle admettrait une limite finie ℓ quand $x \to 1^+$ et l'on aurait :

  $$\forall x > -1,\ \ell \geqslant f(x).$$

  On aurait donc aussi, pour tout segment $[a\,;b] \subset]0\,;1[$:

  $$\ell \geqslant \int_a^b t^x(1-t)^x\,\mathrm{d}t.$$

  Mais la fonction $x \mapsto \displaystyle\int_a^b t^x(1-t)^x\,\mathrm{d}t$ est, elle, continue sur $\mathbb{R}$ (facilement par le théorème sur la continuité d'une intégrale à paramètre), on peut donc faire tendre $x \to 1$ et on aurait :

  $$\forall [a\,;b] \subset]0\,;1[,\ \int_a^b \frac{\mathrm{d}t}{t(1-t)} \leqslant \ell.$$

  Les intégrales $\displaystyle\int_a^b \frac{\mathrm{d}t}{t(1-t)}$ étant majorées, cela impliquerait que l'intégrale $\displaystyle\int_0^1 \frac{\mathrm{d}t}{t(1-t)}$ serait convergente, ce qui n'est pas (considérer un équivalent en 0 et 1).

  Ainsi, par l'absurde, f est décroissante non majorée, donc $\displaystyle\lim_{x\to-1^+} f(x) = +\infty$.

Exercice 4: ($\star\star$)

On pose $F(x) = \displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{\mathrm{e}^{-t}}{1+tx}\,\mathrm{d}t$.

a) Montrer que $F(x)$ est bien définie pour tout $x \geqslant 0$.

b) Montrer que F est de classe $\mathscr{C}^\infty$ sur $[0\,;+\infty[$.

c) Calculer $F^{(n)}(0)$ pour tout $n \in \mathbb{N}$.

✎ *Solution:*

a) Soit $f : [0\,;+\infty[\times [0\,;+\infty[\to \mathbb{R}$ définie par :

$$f(x,t) = \frac{\mathrm{e}^{-t}}{1+tx}\,.$$

Pour chaque $x \geqslant 0$, la fonction $t \mapsto f(x,t)$ est continue par morceaux sur $\mathbb{R}_+$ et intégrable car $t^2 f(x,t) \underset{t\to+\infty}{\longrightarrow} 0$, donc $f(x,t) \underset{t\to+\infty}{=} o\left(\frac{1}{t^2}\right)$ et $t \mapsto \frac{1}{t^2}$ est intégrable au voisinage de $+\infty$ (*je ne détaille pas plus, l'argument est classique et doit être connu...*).

On en déduit la convergence de l'intégrale généralisée définissant $F(x)$.

b) Pour chaque $t \in \mathbb{R}_+$, la fonction $x \mapsto f(x,t)$ est indéfiniment dérivable et pour tout $n \in \mathbb{N}$:

$$\frac{\partial^n f}{\partial x^n}(x,t) = \frac{(-1)^n n!}{(1+tx)^{n+1}} t^n \mathrm{e}^{-t}\,.$$

La fonction $x \mapsto \frac{\partial^n f}{\partial x^n}(x,t)$ est continue, la fonction $t \mapsto \frac{\partial^n f}{\partial x^n}(x,t)$ est continue par morceaux et

$$\forall\,(x,t) \in (\mathbb{R}_+)^2,\ \left|\frac{\partial^n f}{\partial x^n}(x,t)\right| \leqslant n!t^n\mathrm{e}^{-t} = \varphi_n(t)$$

avec $\varphi_n : [0\,;+\infty[\to \mathbb{R}$ continue par morceaux et intégrable (par comparaison encore à $t \mapsto \frac{1}{t^2}$).

L'hypothèse de domination est donc bien vérifiée pour toutes les $\frac{\partial^n f}{\partial x^n}$, et le théorème de dérivation d'une intégrale à paramètre « version $\mathscr{C}^\infty$ » permet alors d'affirmer que F est de classe $\mathscr{C}^\infty$ sur $[0\,;+\infty[$ et

$$\forall\, n \in \mathbb{N},\ \forall\, x \geqslant 0,\ F^{(n)}(x) = (-1)^n n! \int_0^{+\infty} \frac{t^n \mathrm{e}^{-t}}{(1+tx)^{n+1}}\,\mathrm{d}t.$$

c) En particulier,

$$F^{(n)}(0) = (-1)^n (n!)^2\,.$$

Exercice 5: (⋆⋆)

Soit $F\colon x \mapsto \displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{\mathrm{d}t}{1+t^3+x^3}$.

a) Montrer que F est définie sur $\mathbb{R}_+$.

b) À l'aide du changement de variable $u = \frac{1}{t}$, calculer $F(0)$.

c) Montrer que F est continue et décroissante sur $\mathbb{R}_+$.

d) Déterminer la limite de F en $+\infty$.

✎ *Solution:*

a) Posons

$$\forall\,(x,t) \in \mathbb{R}_+ \times \mathbb{R}_+,\ g(x,t) = \frac{1}{1+t^3+x^3}\,.$$

Pour tout $x \in \mathbb{R}_+$, la fonction $t \mapsto g(x,t)$ est définie, continue sur $\mathbb{R}_+$ et $g(x,t) \underset{t\to+\infty}{\sim} \frac{1}{t^3}$, avec $t \mapsto \frac{1}{t^3}$ intégrable au voisinage de $+\infty$, donc $F(x)$ existe.

b) $u \mapsto \frac{1}{u}$ est une bijection strictement décroissante de classe $\mathscr{C}^1$ entre $\mathbb{R}_+^*$ et $\mathbb{R}_+^*$. On peut donc réaliser le changement de variable $t = \frac{1}{u}$ qui donne :

$$\int_0^{+\infty} \frac{\mathrm{d}t}{1+t^3} = \int_0^{+\infty} \frac{u\,\mathrm{d}u}{1+u^3}\,.$$

Donc :

$$2F(0) = \int_0^{+\infty} \frac{1+t}{1+t^3}\,\mathrm{d}t = \int_0^{+\infty} \frac{\mathrm{d}t}{t^2-t+1} = \int_0^{+\infty} \frac{\mathrm{d}t}{\left(t-\frac{1}{2}\right)^2+\frac{3}{4}} = \left[\frac{2}{\sqrt{3}}\operatorname{Arc\,tan}\frac{2t-1}{\sqrt{3}}\right]_0^{+\infty} = \frac{4\pi}{3\sqrt{3}}$$

d'où :

$$F(0) = \frac{2\pi}{3\sqrt{3}}\,.$$

c) $x \mapsto g(x,t)$ est continue sur $\mathbb{R}_+$, $t \mapsto g(x,t)$ est continue par morceaux sur $[0\,;+\infty[$, et

$$|g(x,t)| \leqslant \frac{1}{1+t^3} = \varphi(t)$$

et φ intégrable sur $[0\,;+\infty[$ donc, par le théorème de continuité d'une intégrale à paramètre, f est continue.
Si $x \leqslant y$ alors pour tout $t \in [0\,;+\infty[$, $g(y,t) \leqslant g(x,t)$ donc $f(y) \leqslant f(x)$. Ainsi f est décroissante.
(*On peut aussi montrer f de classe $\mathscr{C}^1$ par le théorème de dérivabilité d'une intégrale à paramètre, et $F'(x) \leqslant 0$, mais cela est affreusement plus long !*)

d) $\lim\limits_{x\to+\infty} F(x) = 0$ car :

$$0 \leqslant F(x) \leqslant \int_0^{+\infty} \frac{\mathrm{d}t}{x^3+t^3} \underset{t=xu}{=} \frac{1}{x^2}\int_0^{+\infty} \frac{\mathrm{d}u}{1+u^3} \underset{x\to+\infty}{\longrightarrow} 0.$$

Exercice 6: Intégrale de Gauss ($\star\star$)

a) Étudier la continuité et la dérivabilité de $f\colon x \mapsto \displaystyle\int_0^1 \frac{\mathrm{e}^{-x(1+t^2)}}{1+t^2}\,\mathrm{d}t$ sur $\mathbb{R}_+$. Déterminer $f(0)$ et $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)$

b) Soit $g\ :\ x \mapsto \displaystyle\int_0^x \mathrm{e}^{-t^2}\,\mathrm{d}t$. Montrer que, pour tout $x\in\mathbb{R}$, $f(x^2) + \big(g(x)\big)^2 = \text{cste}$.

En déduire la valeur de : $\displaystyle\int_0^{+\infty} \mathrm{e}^{-t^2}\,\mathrm{d}t$

✎ *Solution:*

a) Considérons la fonction

$$h\colon (x,t) \in \mathbb{R}_+ \times [0\,;1] \mapsto \frac{\mathrm{e}^{-x(1+t^2)}}{1+t^2}\cdot$$

Pour chaque $x \in \mathbb{R}_+$, la fonction $t \mapsto h(x,t)$ est continue par morceaux sur $[0\,;1]$, donc intégrable.
La fonction h admet une dérivée partielle :

$$\frac{\partial h}{\partial x} : (x,t) \mapsto -\mathrm{e}^{-x(1+t^2)}.$$

Celle-ci est continue par rapport à x, continue (par morceaux) par rapport à t et vérifie la domination :

$$\forall\,(x,t) \in \mathbb{R}_+ \times [0\,;1],\ \left|\frac{\partial h}{\partial x}(x,t)\right| \leqslant 1$$

La fonction constante $\varphi\ :\ t \mapsto 1$ est continue et intégrable sur $[0\,;1]$. Le théorème de dérivabilité d'une intégrale à paramètre permet alors d'affirmer que f est de classe $\mathscr{C}^1$ sur $\mathbb{R}_+$ et :

$$\forall\,x \geqslant 0,\ f'(x) = \int_0^1 \frac{\partial h}{\partial x}(x,t)\,\mathrm{d}t = -\int_0^1 \mathrm{e}^{-x(1+t^2)}\,\mathrm{d}t.$$

b) On a

$$f(0) = \int_0^1 \frac{\mathrm{d}t}{1+t^2} = \frac{\pi}{4}\cdot$$

Pour $x \geqslant 0$,

$$0 \leqslant f(x) \leqslant \int_0^1 \mathrm{e}^{-x} dt = \mathrm{e}^{-x}$$

donc $\lim\limits_{+\infty} f = 0$.

c) g est la primitive s'annulant en 0 de la fonction continue $x \mapsto \mathrm{e}^{-x^2}$, donc g est de classe $\mathscr{C}^1$. Par suite, la fonction $u\colon x \mapsto f(x^2) + \big(g(x)\big)^2$ est de classe $\mathscr{C}^1$ sur $\mathbb{R}_+$ et :

$$u'(x) = -2x\int_0^1 \mathrm{e}^{-x^2(1+t^2)}\,\mathrm{d}t + 2\mathrm{e}^{-x^2}\int_0^x \mathrm{e}^{-t^2}\,\mathrm{d}t = 0$$

car

$$\int_0^x \mathrm{e}^{-t^2}\,\mathrm{d}t \underset{t=xu}{=} x\int_0^1 \mathrm{e}^{-x^2u^2}\,\mathrm{d}u.$$

u est donc une fonction constante, et puisque $u(0) = \frac{\pi}{4}$, on en déduit :

$$\forall\,x \in \mathbb{R}_+,\ f(x^2) + \big(g(x)\big)^2 = \frac{\pi}{4}\cdot$$

d) Pour $x \geqslant 0$, $\displaystyle\int_0^x e^{-t^2} dt \geqslant 0$ donc

$$\int_0^x e^{-t^2}\,dt = \sqrt{\frac{\pi}{4} - f(x^2)} \underset{x \to +\infty}{\longrightarrow} \frac{\sqrt{\pi}}{2}.$$

Exercice 7: (⋆⋆)

a) Déterminer le domaine de définition de : $f : x \mapsto \displaystyle\int_0^1 \frac{t-1}{\ln t} t^x \,dt$.

b) Étudier sa dérivabilité, calculer $f'(x)$ et en déduire $f(x)$.

✎ *Solution:*

a) Posons :

$$\forall (x,t) \in \mathbb{R} \times]0;1[,\ u(x,t) = \frac{t-1}{\ln t} t^x == \frac{t-1}{\ln t} e^{x \ln t}.$$

Pour tout $x \in \mathbb{R}$, la fonction $t \mapsto u(x,t)$ est continue par morceaux sur $]0;1[$.
Puisque $\ln t \underset{1}{\sim} t-1$, on a $\displaystyle\lim_{t \to 1^-} u(x,t) = 1$, donc la fonction $t \mapsto u(x,t)$ se prolonge par continuité en 1.

De plus,

$$u(x,t) \underset{t \to 0^+}{\sim} -\frac{t^x}{\ln t}.$$

Or $\displaystyle\int_0^1 \frac{t^x}{\ln t}\,dt = \int_0^1 \frac{dt}{t^{-x} \ln t}$ est une intégrale de Bertrand, qui converge si et seulement si $-x < 1$ soit $x > -1$ (*fait en classe, à savoir refaire car pas au programme!!!*. Voir plus de détails dans l'exercice 10).

On en déduit que la fonction f est définie sur $]-1;+\infty[$.

b) La fonction u admet une dérivée partielle :

$$\frac{\partial u}{\partial x}(x,t) = (t-1)t^x.$$

Cette dérivée partielle est continue par rapport à x et continue (par morceaux) par rapport à t.
Soit $a > -1$. On a :

$$\forall (x,t) \in [a;+\infty[\times]0;1[,\ \left|\frac{\partial u}{\partial x}(x,t)\right| \leqslant (1-t)t^a$$

(car $x \geqslant a \Longrightarrow t^x = e^{x \ln t} \leqslant e^{a \ln t}$ puisque $\ln t \leqslant 0$).
Par domination sur tout segment, on peut affirmer que f est de classe $\mathscr{C}^1$ sur $]-1;+\infty[$, et :

$$f'(x) = \int_0^1 (t-1)t^x\,dt = \frac{1}{x+2} - \frac{1}{x+1}.$$

On en déduit :

$$f(x) = \ln \frac{x+2}{x+1} + cste.$$

La fonction :

$$t \mapsto \frac{t-1}{\ln t}$$

est continue sur $]0;1[$ et se prolonge par continuité en 0 et 1 , elle est donc bornée par un certain réel $M \in \mathbb{R}_+$ et alors :

$$|f(x)| \leqslant \int_0^1 M t^x\,dt = \frac{M}{x+1} \underset{x \to +\infty}{\longrightarrow} 0.$$

On en déduit $cste = 0$ puis finalement

$$f(x) = \ln \frac{x+2}{x+1}.$$

Exercice 8: (⋆⋆)

Justifier l'existence et calculer, pour x et y réels strictement positifs : $F(x,y) = \displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{e^{-xt} - e^{-yt}}{t}\,dt$.

✎ *Solution:*

(rapide)

$f\colon (x,t) \to \dfrac{\mathrm{e}^{-xt}-\mathrm{e}^{-yt}}{t}$ et $\dfrac{\partial f}{\partial x}(x,t) = -\mathrm{e}^{-xt}$ sont définies et continues sur $\mathbb{R}_+^* \times \mathbb{R}_+^*$. $t \mapsto f(x,t)$ est intégrable sur $\mathbb{R}_+^*$ car prolongeable par continuité en 0 et négligeable devant $t \mapsto \frac{1}{t^2}$ en $+\infty$. Pour $a > 0$,

$$\forall\, x \in [a\,;+\infty[,\ \left|\frac{\partial f}{\partial x}(x,t)\right| \leqslant \mathrm{e}^{-at} = \varphi(t)$$

avec φ intégrable sur $\mathbb{R}_+^*$.
Par le théorème de dérivabilité d'une intégrale à paramètre, $x \mapsto F(x,y)$ est de classe $\mathscr{C}^1$ et

$$\frac{\partial F}{\partial x}(x,y) = \int_0^{+\infty} -\mathrm{e}^{-xt}\,\mathrm{d}t = -\frac{1}{x}\,\cdot$$

Donc $F(x,y) = -\ln x + \psi(y)$ où ψ est quelconque, et puisque pour $x = y$, on a $F(x,y) = 0$ on obtient

$$F(x,y) = \ln y - \ln x.$$

Exercice 9: ($\star\star$)

Soit f définie sur $\mathbb{R}_+$ par : $f(x) = \displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{\arctan(xt)}{1+t^2}\,\mathrm{d}t$.

a) Étudier la continuité et la dérivabilité de f.

b) Pour $x > 0$, calculer $f'(x)$.

c) En déduire : $\displaystyle\int_0^1 \frac{\ln t}{1-t^2}\,\mathrm{d}t = -\frac{\pi^2}{8}$.

Exercice 10: ($\star\star\star$)

Déterminer le domaine de définition et calculer : $g(x) = \displaystyle\int_0^1 \frac{t^x-1}{\ln t}\,\mathrm{d}t$.

✎ *Solution:*

Soit $f\colon (x,t) \mapsto \dfrac{t^x-1}{\ln t}$ pour $(x,t) \in \mathbb{R} \times]0\,;1[$.

- On étudie d'abord l'intégrabilité de $t \mapsto f(x,t)$ selon les valeurs de x.
  La fonction $t \mapsto f(x,t)$ est continue par morceaux sur $]0\,;1[$.
  - Quand $t \to 1^-$, on peut poser $t = 1-h$ avec $h \to 0^+$ d'où :

  $$f(x,t) = \frac{(1+h)^x-1}{\ln(1+h)} \underset{h\to 0^+}{\longrightarrow} x$$

  et donc $t \mapsto f(x,t)$ se prolonge par continuité en 1 (donc est intégrable au voisinage de 1).
  - Quand $t \to 0^+$, on a :

  $$t^x \underset{t\to 0+}{\rightarrow} \begin{cases} 0 & \text{si } x > 0 \\ 1 & \text{si } x = 0 \\ +\infty & \text{si } x < 0 \end{cases}$$

  Donc :
  - si $x \geqslant 0$, on obtient $f(x,t) \underset{t\to 0^+}{\rightarrow} 0$ ce qui permet un prolongement par continuité.
  - si $x \leqslant -1$, on a $f(x,t) \underset{t\to 0^+}{\sim} \dfrac{1}{t^{-x}\ln t}$; mais $\left|\dfrac{1}{t^{-x}\ln t}\right| \geqslant \left|\dfrac{1}{t\ln t}\right|$ et $\displaystyle\int_a^{1/2} \frac{\mathrm{d}t}{t\ln t} = [\ln|\ln t|]_a^{1/2} \underset{a\to 0^+}{\longrightarrow} +\infty$ donc $t \mapsto \dfrac{1}{t\ln t}$ n'est pas intégrable au voisinage de 0, et par comparaison, $t \mapsto f(x,t)$ non plus.
  - si $x \in]-1\,;0[$, on a $f(x,t) = o\left(\dfrac{1}{t^{-x}}\right)$ avec $-x < 1$, et puisque $t \mapsto \dfrac{1}{t^{-x}}$ est intégrable au voisinage de 0 (fonction de Riemann d'exposant < 1), il en est de même de $t \mapsto f(x,t)$.

  Ainsi, $t \mapsto f(x,t)$ est intégrable au voisinage de 0 si et seulement si $x > -1$.

  Finalement $t \mapsto f(x,t)$ est intégrable sur $]0\,;1[$ si et seulement si $x > -1$, et donc g est définie sur $]-1\,;+\infty[$.
- La fonction $x \mapsto f(x,t) = \dfrac{t^x-1}{\ln t} == \dfrac{\mathrm{e}^{x\ln t}-1}{\ln t}$ est dérivable donc f admet une dérivée partielle $\frac{\partial f}{\partial x}$ et

$$\frac{\partial f}{\partial x}(x,t) = t^x.$$

- $\forall x \in]-1\,;+\infty[,\ t \mapsto \frac{\partial f}{\partial x}(x,t)$ est continue par morceaux sur $]0\,;1[$.
- $\forall t \in]0\,;1[,\ x \mapsto \frac{\partial f}{\partial x}(x,t)$ est continue sur $]-1\,;+\infty[$.
- Soit $a > -1$. Pour $x \in]a\,;+\infty[$,
$$\left|\frac{\partial f}{\partial x}(x,t)\right| \leqslant t^a = \varphi(t)$$
(car $x \geqslant a \Longrightarrow t^x = \mathrm{e}^{x\ln t} \leqslant \mathrm{e}^{a\ln t}$ puisque $\ln t \leqslant 0$), avec $\varphi :]0\,;1[\to \mathbb{R}_+$ continue par morceaux et intégrable sur $]0\,;1[$.
- Les hypothèses du théorème de dérivabilité d'une intégrale à paramètre sont donc bien satisfaites ; on en déduit que g est de classe $\mathscr{C}^1$ sur tout intervalle $[a\,;+\infty[$ avec $a > -1$, donc sur $]-1\,;+\infty[$, et
$$\forall x > -1,\ g(x) = \int_0^1 t^x \,\mathrm{d}t = \frac{1}{x+1}.$$
On en déduit
$$g(x) = g(0) + \int_0^x \frac{\mathrm{d}t}{1+t} = \ln(1+x).$$

Exercice 11: (⋆⋆)

En utilisant une équation différentielle linéaire du premier ordre, calculer $f(x) = \displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{\mathrm{e}^{-t}}{\sqrt{t}}\mathrm{e}^{ixt}\,\mathrm{d}t$.

✎ *Solution:*

(un peu rapide)

- Pour tout $x \in \mathbb{R}$, $t \mapsto g(x,t) = \dfrac{\mathrm{e}^{(-1+\mathrm{i}x)t}}{\sqrt{t}}$ est définie, continue par morceaux sur $\mathbb{R}_+^*$ et intégrable (car équivalente en 0 à $t \mapsto \dfrac{1}{\sqrt{t}}$ et c'est un $o\left(\dfrac{1}{t^2}\right)$ en $+\infty$, je ne détaille pas...).
- g admet une dérivée partielle
$$\frac{\partial g}{\partial x}(x,t) = \mathrm{i}\sqrt{t}\,\mathrm{e}^{(-1+\mathrm{i}x)t}$$
Pour tout x réel, $t \mapsto \frac{\partial g}{\partial x}(x,t)$ est définie et continue par morceaux sur $\mathbb{R}_+^*$, pour tout $t > 0$, $x \mapsto \frac{\partial g}{\partial x}(x,t)$ est continue sur $\mathbb{R}$, et on a la domination :
$$\left|\frac{\partial g}{\partial x}(x,t)\right| \leqslant \sqrt{t}\mathrm{e}^{-t} = \varphi(t)$$
avec φ intégrable sur $\mathbb{R}_+^*$.
- On en déduit que la fonction f est de classe $\mathscr{C}^1$ sur $\mathbb{R}$ et :
$$f'(x) = \int_0^{+\infty} \mathrm{i}\,\sqrt{t}\,\mathrm{e}^{(-1+\mathrm{i}x)t}\,\mathrm{d}t \underset{\text{i.p.p}}{=} \frac{\mathrm{i}}{2(1-\mathrm{i}x)}\int_0^{+\infty}\frac{\mathrm{e}^{(-1+\mathrm{i}x)t}}{\sqrt{t}}\,\mathrm{d}t = -\frac{1}{2(x+\mathrm{i})}f(x).$$
Or :
$$\frac{-1}{2(x+\mathrm{i})} = \frac{-x+\mathrm{i}}{2\left(x^2+1\right)} = -\frac{x}{2\left(x^2+1\right)} + \frac{\mathrm{i}}{2\left(x^2+1\right)},$$
donc
$$\int \frac{-\,\mathrm{d}x}{2(x+\mathrm{i})} = -\frac{1}{4}\ln(x^2+1) + \frac{\mathrm{i}}{2}\operatorname{Arc\,tan} x$$
puis :
$$f(x) = C\exp\left(\mathrm{i}\,\frac{\operatorname{Arc\,tan} x}{2} - \frac{1}{4}\ln\left(x^2+1\right)\right) = \frac{C\mathrm{e}^{\mathrm{i}\operatorname{Arc\,tan} x/2}}{\left(x^2+1\right)^{\frac{1}{4}}}$$
Puisque $f(0) = \sqrt{\pi}$ (changement de variable $t = u^2$ pour se ramener à l'intégrale de Gauss), on conclut :
$$\forall x \in \mathbb{R},\ f(x) = \frac{\sqrt{\pi}\,\mathrm{e}^{\frac{\mathrm{i}\operatorname{Arc\,tan} x}{2}}}{\left(x^2+1\right)^{1/4}}.$$

Exercice 12: (⋆⋆)

Pour x réel on pose $F(x) = \displaystyle\int_0^{+\infty} \mathrm{e}^{-t^2} \operatorname{ch}(2tx)\,\mathrm{d}t$.

a) Montrer que F est définie et de classe $\mathscr{C}^1$ sur $\mathbb{R}$.

b) Déterminer une équation différentielle du 1er ordre vérifiée par F et en déduire F.

c) Calculer F par une autre méthode.

✎ *Solution:*

a) Soit, pour $(x,t) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R}_+$,

$$f(x,t) = \mathrm{e}^{-t^2} \operatorname{ch}(2xt).$$

La fonction $t \mapsto f(x,t)$ est continue par morceaux et intégrable sur $\mathbb{R}$ car

$$t^2 f(x,t) \underset{t \to \pm\infty}{\longrightarrow} 0$$

donc $f(x,t) \underset{t\to\pm\infty}{=} o\left(\dfrac{1}{t^2}\right)$, avec $t \mapsto \dfrac{1}{t^2}$ intégrable aux voisinages de $\pm\infty$.

La fonction $x \mapsto f(x,t)$ est dérivable et

$$\frac{\partial f}{\partial x}(x,t) = 2t\mathrm{e}^{-t^2} \operatorname{sh}(2xt).$$

La fonction $t \mapsto \frac{\partial f}{\partial x}(t,x)$ est continue par morceaux, la fonction $x \mapsto \frac{\partial f}{\partial x}(x,t)$ est continue. Soit $a \in \mathbb{R}_+$.

$$\forall\,(x,t) \in [-a;a] \times \mathbb{R},\ \left|\frac{\partial f}{\partial x}(x,t)\right| \leqslant 2a \operatorname{sh}(2a|t|)\mathrm{e}^{-t^2} = \varphi(t)$$

avec φ intégrable sur $\mathbb{R}$ (même argument qu'auparavant).
On en déduit que la fonction F est de classe $\mathscr{C}^1$ sur tout segment $[-a\,;a]$, donc sur $\mathbb{R}$.

b) À l'aide d'une intégration par parties (justifiée...) :

$$F'(x) = \int_0^{+\infty} 2t\mathrm{e}^{-t^2} \operatorname{sh}(2xt)\,\mathrm{d}t = \Big[-\mathrm{e}^{-t^2} \operatorname{sh}(2xt)\Big]_0^{+\infty} + 2x \int_0^{+\infty} \mathrm{e}^{-t^2} \operatorname{ch}(2xt)\,\mathrm{d}t.$$

On en déduit que F est solution de l'équation différentielle :

$$F'(x) - 2xF(x) = 0,$$

donc il existe une constante C telle que :

$$F(x) = C\mathrm{e}^{x^2}$$

et puisque $F(0) = \dfrac{\sqrt{\pi}}{2}$, on a

$$\forall\, x \in \mathbb{R},\ F(x) = \frac{\sqrt{\pi}}{2}\,\mathrm{e}^{x^2}.$$

c) On sait (développement en série entière de la fonction exp) :

$$\forall\,(x,t) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R}_+,\ \operatorname{ch}(2xt) = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{2^{2n}}{(2n)!}(xt)^{2n}$$

Dans toute la suite, $x \in \mathbb{R}$ est fixé. Pour tout $n \in \mathbb{N}$, soit $u_n : [0\,;+\infty[\to \mathbb{R}$ définie par

$$u_n(t) = \frac{2^{2n}}{(2n)!}(xt)^{2n}\mathrm{e}^{-t^2}$$

Les fonctions u_n sont continues (par morceaux) et d'après le calcul fait ci-dessus la série de fonctions $\sum u_n$ converge simplement sur $[0;+\infty[$ vers la fonction $t \mapsto \mathrm{e}^{-t^2} \operatorname{ch}(2xt)$ elle-même continue (par morceaux) .
Chaque fonction u_n est intégrable et

$$\int_0^{+\infty} |u_n(t)|\,\mathrm{d}t = \frac{2^{2n}|x|^{2n}}{(2n)!} \int_0^{+\infty} t^{2n}\mathrm{e}^{-t^2}\,\mathrm{d}t$$

Par intégration par parties (justifiée...) :

$$\int_0^{+\infty} t^{2n}\mathrm{e}^{-t^2}\,\mathrm{d}t = \int_0^{+\infty} t^{2n-1} \times t\mathrm{e}^{-t^2}\,\mathrm{d}t = \frac{2n-1}{2} \int_0^{+\infty} t^{2(n-1)}\mathrm{e}^{-t^2}\,\mathrm{d}t$$

et donc par récurrence facile :

$$\int_0^{+\infty} t^{2n}\mathrm{e}^{-t^2}\,\mathrm{d}t = \frac{(2n)!}{2^{2n}n!}\frac{\sqrt{\pi}}{2}$$

puis
$$\int_0^{+\infty} |u_n(t)|\,\mathrm{d}t = \frac{|x|^{2n}}{n!}\frac{\sqrt{\pi}}{2}.$$
Il y a alors convergence de la série $\sum \int |u_n|$ et donc on peut intégrer terme à terme ce qui donne :
$$F(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} \int_0^{+\infty} u_n(t)\,\mathrm{d}t = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{x^{2n}}{n!}\frac{\sqrt{\pi}}{2} = \frac{\sqrt{\pi}}{2}\mathrm{e}^{x^2}.$$

Exercice 13: Recherche d'équivalent ($\star\star\star$)

Soit $f : x \mapsto \displaystyle\int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\cos t}{t+x}\,\mathrm{d}t$.

a) Montrer que f est définie, continue sur $\mathbb{R}_+^*$. Étudier les variations de f.

b) Déterminer les limites de f en 0^+ et $+\infty$.

c) Déterminer un équivalent de f en 0^+ et $+\infty$.

✎ *Solution:*

a) Posons : $g(x,t) = \dfrac{\cos t}{t+x}$, définie sur $\mathbb{R}_+^* \times \left[0\,;\frac{\pi}{2}\right]$.

La fonction g est continue par rapport à x et continue (par morceaux) par rapport à t.
Pour tout réel $a > 0$ on a :
$$\forall (x,t) \in [a\,;+\infty[\times \left[0\,;\frac{\pi}{2}\right],\ |g(x,t)| \leqslant \frac{1}{t+a} = \varphi(t)$$
avec la fonction φ qui est continue donc intégrable sur $\left[0\,;\frac{\pi}{2}\right]$.
Le théorème de continuité d'une intégrale à paramètre permet alors d'affirmer que f est continue sur $[a\,;+\infty[$, et $a > 0$ étant quelconque, sur $\mathbb{R}_+^*$.
Pour $0 < x \leqslant x'$, on a
$$\forall t \in \left[0\,;\frac{\pi}{2}\right],\ g(x',t) \leqslant g(x,t).$$
En intégrant, on obtient $f(x') \leqslant f(x)$. La fonction f est donc décroissante.
On aurait pu aussi établir que f est de classe $\mathscr{C}^1$ et étudier le signe de sa dérivée mais c'est bien plus long !

b) On a l'encadrement :
$$0 \leqslant f(x) \leqslant \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{1}{x+t}\,\mathrm{d}t = \big[\ln(x+t)\big]_{t=0}^{t=\frac{\pi}{2}}$$
donc $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = 0$.
On a la minoration :
$$f(x) \geqslant \int_0^{\frac{\pi}{4}} \frac{\cos t}{t+x}\,\mathrm{d}t \geqslant \frac{\sqrt{2}}{2}\big[\ln(t+x)\big]_{t=0}^{t=\frac{\pi}{4}} = \frac{\sqrt{2}}{2}\ln\frac{x+\frac{\pi}{4}}{x}$$
donc $\lim\limits_{x\to 0^+} f(x) = +\infty$.

c) On a l'encadrement :
$$\frac{1}{x+\frac{\pi}{2}}\int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos t\,\mathrm{d}t \leqslant f(x) \leqslant \frac{1}{x}\int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos t\,\mathrm{d}t$$
donc facilement :
$$f(x) \underset{x\to+\infty}{\sim} \frac{1}{x}$$
On a l'encadrement « bien connu » :
$$\forall t \in \left[0\,;\frac{\pi}{2}\right],\quad 1 - \frac{t^2}{2} \leqslant \cos t \leqslant 1$$
(cela peut se démontrer soit par une étude de fonction, soit, plus astucieusement, à l'aide de la formule de Taylor reste intégrale)
donc
$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\mathrm{d}t}{t+x} - \frac{1}{2}\int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{t^2\,\mathrm{d}t}{t+x} \leqslant f(x) \leqslant \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\mathrm{d}t}{t+x}.$$
Or
$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{dt}{t+x} = \ln\frac{x+\frac{\pi}{2}}{x} \underset{0}{\sim} -\ln x$$
et
$$0 \leqslant \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{t^2\,\mathrm{d}t}{t+x} \leqslant \int_0^{\frac{\pi}{2}} t\,\mathrm{d}t = cste = o(\ln x),$$

donc :

$$f(x) \underset{x\to 0}{\sim} -\ln x.$$

⋆ ⋆ ⋆ ⋆
⋆ ⋆ ⋆
⋆ ⋆
⋆