

**EXERCICES : VARIABLES ALÉATOIRES****Variables aléatoires, généralités** (ex. 1 à 4)**Exercice 1:**

Soit  $X$  une variable aléatoire réelle, et  $A$  une partie de  $\mathbb{R}$  telle que :

$$\forall x \in A, \mathbb{P}(X = x) > 0.$$

Montrer que  $A$  est au plus dénombrable

(pour  $n \in \mathbb{N}^*$ , considérer les ensembles  $A_n = \{x \in A \mid \mathbb{P}(X = x) \geq \frac{1}{n}\}$ ).

**Exercice 2: Inégalité de Tchebychev-Cantelli**

Soit  $X$  une variable aléatoire réelle. On suppose que  $X$  admet une espérance  $\mathbb{E}(X) = m$  et une variance  $\mathbb{V}(X) = \sigma^2$ . On fixe  $\alpha > 0$ .

a) Soit  $\lambda \geq 0$ . Démontrer que  $\mathbb{P}(X - m \geq \alpha) = \mathbb{P}(X - m + \lambda \geq \alpha + \lambda)$ .

b) Vérifier que  $\mathbb{E}((X - m + \lambda)^2) = \sigma^2 + \lambda^2$ .

c) À l'aide de l'inégalité de Markov, montrer que, pour tout  $\lambda > 0$ ,  $\mathbb{P}(X - m \geq \alpha) \leq \frac{\sigma^2 + \lambda^2}{\alpha^2 + \lambda^2 + 2\lambda\alpha}$ .

d) En déduire que  $\mathbb{P}(X - m \geq \alpha) \leq \frac{\sigma^2}{\alpha^2 + \sigma^2}$ .

e) Démontrer que  $\mathbb{P}(|X - m| \geq \alpha) \leq \frac{2\sigma^2}{\alpha^2 + \sigma^2}$ . Quand obtient-on une meilleure inégalité que l'inégalité de Bienaymé-Tchebychev ?

**Exercice 3: Écart à la moyenne**

$(\Omega, \mathcal{A}, \mathbb{P})$  désigne un espace probabilisé, et  $X, Y, (X_i)_{i \geq 1}$  des variables aléatoires réelles définies sur  $(\Omega, \mathcal{A}, \mathbb{P})$ .

a) Soit  $\lambda > 0$ . On suppose que  $\mathbb{E}(e^{\lambda Y})$  est finie. Démontrer que, pour tout  $a \in \mathbb{R}$ ,

$$\mathbb{P}(Y \geq a) \leq e^{-\lambda a} \mathbb{E}(e^{\lambda Y}).$$

b) On suppose de plus que  $\mathbb{E}(e^{-\lambda Y})$  est finie. Dédurre de la question précédente que

$$\mathbb{P}(|Y| \geq a) \leq e^{-\lambda a} \mathbb{E}(e^{\lambda Y}) + e^{-\lambda a} \mathbb{E}(e^{-\lambda Y}).$$

c) i) Démontrer que si  $\lambda \geq 0$  et  $x \in [-1; 1]$ , alors

$$e^{\lambda x} \leq \cosh \lambda + x \sinh \lambda \leq e^{\frac{\lambda^2}{2}} + x \sinh \lambda.$$

ii) Démontrer que si la variable aléatoire  $X$  prend ses valeurs dans  $[-1; 1]$  et est centrée (c'est-à-dire si  $\mathbb{E}(X) = 0$ ), alors on a pour tout  $\lambda \geq 0$

$$\mathbb{E}(e^{\lambda X}) \leq e^{\frac{\lambda^2}{2}} \quad \text{et} \quad \mathbb{E}(e^{-\lambda X}) \leq e^{\frac{\lambda^2}{2}}.$$

iii) Montrer que si les variables aléatoires indépendantes  $X_i$  prennent leurs valeurs dans  $[-1; 1]$  et sont centrées, alors on a

$$\mathbb{P}\left(\left|\frac{\sum_{i=1}^n X_i}{n}\right| \geq a\right) \leq 2e^{-\frac{na^2}{2}}$$

pour tout  $n \geq 1$  et tout  $a \geq 0$ .

**Exercice 4:**

Soit  $X$  une variable aléatoire discrète à valeurs dans  $[a; b]$ .

a) Montrer que  $X$  admet une espérance  $m$  et que celle-ci est élément de  $[a; b]$ .

La variable  $X$  admet aussi une variance  $\sigma^2$  que l'on se propose de majorer.

On introduit la variable aléatoire  $Y = X - m$  et les quantités

$$t = \sum_{y \geq 0} y \mathbb{P}(Y = y), \quad s = \sum_{y \geq 0} y^2 \mathbb{P}(Y = y) \quad \text{et} \quad u = \mathbb{P}(Y \geq 0).$$

b) Vérifier :  $t^2 \leq su$ .

c) Calculer espérance et variance de  $Y$ . En déduire :  $t^2 \leq (\sigma^2 - s)(1 - u)$ .

d) En exploitant les deux majorations précédentes, obtenir :  $t^2 \leq \frac{\sigma^2}{4}$ .

e) Conclure :  $\sigma^2 \leq \frac{(b-a)^2}{4}$ .

**Loi d'une variable aléatoire** (ex. 5 à 20)**Exercice 5:**

Une urne contient  $N$  boules numérotées de 1 à  $N$ . On en tire  $n$  en effectuant des tirages avec remise. On note  $X$  et  $Y$  les plus petit et le plus grand des nombres obtenus.

Déterminer les lois de  $X$  et de  $Y$ .

**Exercice 6: Loi triangulaire**

$X$  et  $Y$  sont deux variables aléatoires indépendantes qui suivent la même loi uniforme  $\mathcal{U}([1; n])$ . On pose  $S = X + Y$ .

Déterminer la loi de  $S$ , son espérance, sa variance.

**Exercice 7: Loi hypergéométrique**

Une urne contient  $N$  boules dont une proportion  $p$  de boules blanches (c'est-à-dire  $Np$  boules blanches). On effectue un tirage sans remise de  $n$  boules dans l'urne, et on désigne par  $X$  le nombre de boules blanches obtenues.

a) Déterminer la loi de  $X$ .

Cette loi s'appelle la loi hypergéométrique, et on note  $X \hookrightarrow \mathcal{H}(N, n, p)$ .

b) En utilisant, après l'avoir démontré, la formule de Vandermonde :

$$\forall (a, n) \in \llbracket 0; N \rrbracket^2, \sum_{k=0}^n \binom{a}{k} \binom{N-a}{n-k} = \binom{N}{n},$$

déterminer  $\mathbb{E}(X)$  et  $\mathbb{V}(X)$ .

**Exercice 8: Loi de Pascal**

On lance une pièce de monnaie où la probabilité de tomber sur Pile vaut  $p \in ]0; 1[$ .

On note  $X$  la variable aléatoire correspondant au nombre de lancers nécessaires pour obtenir  $r$  fois pile ( $r \in \mathbb{N}^*$ ).

Quelle est la loi de  $X$  ? Calculer  $\mathbb{E}(X)$  (utiliser le développement en série entière de  $x \mapsto \frac{1}{(1-x)^{r+1}}$ ).

**Exercice 9: Loi binomiale négative (= loi de Pascal)**

On dit qu'une variable aléatoire  $X$  suit une loi binomiale négative de paramètres  $n$  et  $p$  si

$$X(\Omega) = \{n, n+1, \dots\} \text{ et } \mathbb{P}(X = k) = \binom{k-1}{n-1} p^n (1-p)^{k-n}$$

- a) Soit  $X_1, \dots, X_n$  des variables aléatoires indépendantes suivant toutes une loi géométrique de paramètre  $p$ .  
Montrer que  $X_1 + \dots + X_n$  suit une loi binomiale négative de paramètres  $n$  et  $p$ .
- b) En déduire espérance et variance d'une loi binomiale négative de paramètres  $n$  et  $p$ .

**Exercice 10:**

Soit  $n \in \mathbb{N}$  et  $X$  une variable aléatoire à valeurs dans  $\mathbb{N}$  telle qu'il existe  $a \in \mathbb{R}$  et  $p \in ]0;1[$  vérifiant

$$\forall k \in \mathbb{N}, \mathbb{P}(X = k) = a \binom{n+k}{k} p^k.$$

Calculer l'espérance et la variance de  $X$ .

(Indication : commencer par déterminer le développement en série entière de  $x \mapsto \frac{1}{(1-x)^{n+1}}$  .)

**Exercice 11:**

Une urne contient initialement une boule blanche et une boule rouge.

On effectue des tirages successifs d'une boule dans l'urne suivant le protocole suivant : après chaque tirage, la boule tirée est remise dans l'urne et on rajoute dans l'urne, avant le tirage suivant, une boule de la couleur de la boule qui vient d'être tirée.

Pour tout entier naturel  $n$  non nul, on note  $X_n$  le nombre de boules blanches obtenues au cours des  $n$  premiers tirages.

- a) Déterminer la loi de  $X_1$ .
- b) Déterminer la loi de  $X_2$ .
- c) Conjecturer la loi de  $X_n$  et démontrer ce résultat par récurrence sur  $n$ .

**Exercice 12:**

On joue à pile ou face avec une pièce non équilibrée. A chaque lancer la probabilité d'obtenir face est égale à  $\frac{1}{3}$ .

Les lancers sont supposés indépendants. On note  $X$  la variable aléatoire réelle égale au nombre de lancers nécessaires pour l'obtention pour la première fois de deux piles consécutifs. Soit  $n$  un entier naturel non nul.

On note  $p_n$  la probabilité de l'événement  $(X = n)$ .

On note de plus  $F_i$  l'événement « obtenir face au  $i$ -ème lancer ».

- a) Expliciter les événements  $(X = 2)$ ,  $(X = 3)$ ,  $(X = 4)$ ,  $(X = 5)$  à l'aide des événements  $F_i$  et  $\overline{F_i}$   
Déterminer la valeur de  $p_1$ ,  $p_2$ ,  $p_3$ ,  $p_4$ ,  $p_5$ .
- b) A l'aide de la formule des probabilités totales, en distinguant deux cas selon le résultat du premier lancer, montrer que :

$$\forall n \geq 3, \quad p_n = \frac{2}{9}p_{n-2} + \frac{1}{3}p_{n-1}.$$

- c) En déduire l'expression de  $p_n$  en fonction de  $n$ , pour  $n \geq 1$ .
- d) Calculer  $\mathbb{E}(X)$ .

**Exercice 13:**

Une piste rectiligne est divisée en cases, numérotées 0, 1, 2, ..... de gauche à droite. Une puce se déplace vers la droite, de 1 ou 2 cases au hasard à chaque saut. Au départ elle est sur la case 0. Soit  $X_n$  la variable aléatoire égale au numéro de la case occupée par la puce après  $n$  sauts.

- a) Déterminer la loi de probabilité de  $X_1$ , et calculer  $\mathbb{E}(X_1)$  et  $\mathbb{V}(X_1)$ .
- b) On appelle  $Y_n$  la variable aléatoire égale au nombre de fois où la puce a sauté d'une case au cours des  $n$  premiers sauts. Déterminer la loi de  $Y_n$ , puis  $\mathbb{E}(Y_n)$  et  $\mathbb{V}(Y_n)$ .
- c) Exprimer  $X_n$  en fonction de  $Y_n$  et en déduire la loi de probabilité de  $X_n$ , puis  $\mathbb{E}(X_n)$  et  $\mathbb{V}(X_n)$ .

**Exercice 14: (★)**

Trois joueurs lancent, chacun leur tour, un dé, puis recommencent dans le même ordre, jusqu'à ce qu'un joueur amène un 6. La partie s'arrête alors, le joueur qui a amené un 6 a gagné. Le dé est truqué et la probabilité d'obtenir 6 est  $p$ , avec  $0 < p < 1$ . On note  $X$  la variable aléatoire égale au nombre de lancers effectués lors de la partie.

- a) Quelle est la loi de  $X$  ?
- b) En déduire la probabilité de gagner de chacun des joueurs. Montrer qu'il est quasi certain que le jeu s'arrête.

**Exercice 15:**

On tire un nombre entier naturel  $X$  au hasard, et on suppose que  $X$  suit la loi de Poisson de paramètre  $a > 0$ . Si  $X$  est impair, Pierre gagne et reçoit  $X$  brouzoufs de Paul. Si  $X$  est pair supérieur ou égal à 2, Paul gagne et reçoit  $X$  brouzoufs de Pierre. Si  $X = 0$ , la partie est nulle. On note  $p$  la probabilité que Pierre gagne et  $q$  la probabilité que Paul gagne.

- a) En calculant  $p + q$  et  $p - q$ , déterminer la valeur de  $p$  et de  $q$ .
- b) Déterminer l'espérance des gains de chacun.

**Exercice 16:**

Soient  $p \in ]0;1[$  et  $r \in \mathbb{N}^*$ .

Une bactérie se trouve dans une enceinte fermée à l'instant  $t = 0$ .

À chaque instant à partir de  $t = 1$  on envoie un rayon laser dans l'enceinte qui, à chaque tir et de façon indépendante, a une probabilité  $p$  de toucher la bactérie.

La bactérie meurt lorsqu'elle a été touchée  $r$  fois.

On note  $X$  sa durée de vie.

Déterminer la loi de  $X$  puis calculer son espérance si elle existe.

**Exercice 17:**

Soit  $X$  une variable aléatoire suivant la loi de Poisson de paramètre  $\lambda > 0$ . Calculer  $\mathbb{E}\left(\frac{1}{X+1}\right)$

**Exercice 18:**

Soient  $X$  et  $Y$  deux variables aléatoires indépendantes suivant les lois géométriques de paramètres  $p$  et  $q$  respectivement.

Calculer l'espérance de  $Z = \max(X, Y)$ .

**Exercice 19:**

Soient  $X$  et  $Y$  deux variables aléatoires indépendantes suivant les lois géométriques de paramètres  $p$  et  $q$  respectivement.

Calculer  $\mathbb{P}(Y > X)$ .

**Exercice 20:**

Chez un marchand de journaux, on peut acheter des pochettes contenant chacune une image. La collection complète comporte en tout  $N$  images distinctes. On note  $X_k$  le nombre d'achats ayant permis l'obtention de  $k$  images distinctes. En particulier,  $X_1 = 1$  et  $X_N$  est le nombre d'achats nécessaires à l'obtention de la collection complète.

- a) Par quelle loi peut-on modéliser la variable  $X_{k+1} - X_k$  ?
- b) En déduire l'espérance de  $X_N$ .

**Couples de variables aléatoires** (ex. 21 à 25)**Exercice 21:**

Soit un dé équilibré comprenant 1 face blanche et 5 faces rouges. On lance ce dé indéfiniment et on s'intéresse aux longueurs des séries successives de  $B$  ou  $R$  : par exemple si les lancers donnent les résultats  $BBRRRRRRBBBBRR\dots$  alors la première série ( $BB$ ) est de longueur 2 et la deuxième ( $RRRRRR$ ) est de longueur 6.

Soient  $X_1$  et  $X_2$  les variables aléatoires égales aux longueurs de la première et deuxième série.

- a) Déterminer la loi de  $X_1$ . Montrer que  $X_1$  admet une espérance et la calculer.
- b) Déterminer la loi du couple  $(X_1, X_2)$ .
- c) En déduire la loi de  $X_2$ .
- d) En considérant  $\mathbb{P}((X_1 = 1) \cap (X_2 = 1))$  montrer que  $X_1$  et  $X_2$  ne sont pas indépendantes.

**Exercice 22:**

Un individu joue avec une pièce truquée, pour laquelle la probabilité d'obtenir pile est  $p \in ]0;1[$ , de la façon suivante :

- Il lance la pièce jusqu'à obtenir pile pour la première fois. On note  $N$  la variable aléatoire égale au nombre de lancers nécessaires.
- Si  $n$  lancers ont été nécessaires pour obtenir pour la première fois pile alors il relance  $n$  fois sa pièce. On appelle alors  $X$  le nombre de pile obtenu au cours de ces  $n$  lancers.

*Question préliminaire :* Montrer que pour tout  $x \in ]-1;1[$  ;

$$\sum_{n=k}^{+\infty} \binom{n}{k} x^n = \frac{x^k}{(1-x)^{k+1}} .$$

- a) Déterminer la loi de  $N$ .
- b) Pour tout  $n \in \mathbb{N}^*$  déterminer la loi de  $X$  sachant  $(N = n)$ .
- c) En déduire la loi de  $X$ .
- d) On considère  $B$  et  $G$  deux variable aléatoire indépendantes suivant respectivement une loi de Bernoulli  $\mathcal{B}(1, p')$  et une loi géométrique  $\mathcal{G}(p')$ .
  - i) Déterminer la loi de la variable aléatoire  $BG$ .
  - ii) Montrer qu'il existe  $p'$  (à déterminer) tel que  $X$  a la même loi que la variable  $BG$ .
  - iii) En déduire  $\mathbb{E}(X)$ .

**Exercice 23:**

Un insecte pond des œufs. Le nombre d'œufs pondus est une variable aléatoire  $X$  suivant une loi de Poisson  $\mathcal{P}(\lambda)$ . Chaque œuf a une probabilité  $p$  d'éclore, indépendante des autres œufs. Soit  $Z$  le nombre d'œufs qui ont éclos.

- a) Pour  $(k, n) \in \mathbb{N}^2$ , calculer  $\mathbb{P}(Z = k | X = n)$ .
- b) En déduire la loi de  $Z$  ?
- c) Quelle est l'espérance de  $Z$  ?

**Exercice 24:**

Soit  $(X_i)_{i \in \mathbb{N}}$  une suite de variables aléatoires de Bernoulli de paramètre  $p$ , indépendantes. Soit  $Y_i = X_i X_{i+1}$ .

- a) Quelle est la loi de  $Y_i$  ?
- b) Soit  $S_n = \sum_{i=1}^n Y_i$ . Calculer  $\mathbb{E}(S_n)$  et  $\mathbb{V}(S_n)$ .

**Exercice 25:**

Soient  $X$  et  $Y$  deux variables aléatoires à valeurs dans  $\mathbb{N}$  et  $p \in ]0, 1[$ .  
On suppose que la loi conjointe de  $X$  et  $Y$  vérifie

$$P(X = k, Y = n) = \begin{cases} \binom{n}{k} a^n p (1-p)^n & \text{si } k \leq n \\ 0 & \text{sinon} \end{cases} \quad \text{avec } a \in \mathbb{R}$$

- a) Déterminer la valeur de  $a$ .
- b) Déterminer la loi marginale de  $Y$ .
- c) Démontrer que :

$$\forall x \in ]-1; 1[, \sum_{n=k}^{+\infty} \binom{n}{k} x^{n-k} = \frac{1}{(1-x)^{k+1}},$$

puis reconnaître la loi de  $X$ .

- d) Les variables  $X$  et  $Y$  sont-elles indépendantes ?

**Fonctions génératrices** (ex. 26 à 33)**Exercice 26: (4)**

Déterminer une condition nécessaire et suffisante sur les réels  $a$  et  $k$  pour que la suite  $(p_n)$  définie, pour  $n \geq 0$ , par  $p_n = k \left( \frac{a}{a+1} \right)^n$  soit la loi de probabilité d'une variable aléatoire à valeurs dans  $\mathbb{N}$ . Donner alors la fonction génératrice d'une telle variable aléatoire.

**Exercice 27:**

Soit  $X$  une variable aléatoire suivant la loi géométrique de paramètre  $p \in ]0, 1[$ .

a) Calculer

$$\mathbb{E}(X(X-1) \dots (X-r+1)).$$

b) Retrouver ce résultat par les fonctions génératrices.

**Exercice 28:**

On considère une expérience aléatoire ayant la probabilité  $p$  de réussir et  $1 - p$  d'échouer.

On répète l'expérience indépendamment jusqu'à obtention de  $m$  succès et on note  $X$  le nombre d'essais nécessaires à l'obtention de ces  $m$  succès.

a) Reconnaître la loi de  $X$  lorsque  $m = 1$ .

b) Déterminer la loi de  $X$  dans le cas général  $m \in \mathbb{N}^*$ .

c) Exprimer le développement en série entière de  $\frac{1}{(1-t)^m}$ .

d) Déterminer la fonction génératrice de  $X$  et en déduire l'espérance de  $X$ .

**Exercice 29:**

Deux joueurs lancent deux dés équilibrés. On veut déterminer la probabilité que les sommes des deux jets soient égales. On note  $X_1$  et  $X_2$  les variables aléatoires déterminant les valeurs des dés lancés par le premier joueur et  $Y_1$  et  $Y_2$  celles associées au deuxième joueur. On étudie donc l'évènement  $(X_1 + X_2 = Y_1 + Y_2)$ .

a) Montrer que

$$\mathbb{P}(X_1 + X_2 = Y_1 + Y_2) = \mathbb{P}(14 + X_1 + X_2 - Y_1 - Y_2 = 14)$$

b) Déterminer la fonction génératrice de la variable aléatoire :

$$Z = 14 + X_1 + X_2 - Y_1 - Y_2$$

c) En déduire la valeur de

$$\mathbb{P}(X_1 + X_2 = Y_1 + Y_2).$$

**Exercice 30:**

On veut montrer qu'il n'est pas possible de truquer un dé de façon que, en le lançant deux fois de suite, la somme des numéros obtenus suive la loi uniforme sur  $\llbracket 2; 12 \rrbracket$ .

Pour cela on raisonne par l'absurde, et on note  $p_i$  pour  $1 \leq i \leq 6$  la probabilité que le lancer de dé donne le numéro  $i$ . On note aussi  $X_1$  (resp.  $X_2$ ) la variable aléatoire donnant le résultat du 1er lancer (resp du 2ème).

En considérant les fonctions génératrices de  $X_1$ ,  $X_2$  et  $X_1 + X_2$ , aboutir à une contradiction.

**Exercice 31:**

On considère une expérience aléatoire ayant la probabilité  $p$  de réussir et  $q = 1 - p$  d'échouer définissant une suite de variables de Bernoulli indépendantes  $(X_n)_{n \geq 1}$ .

Pour  $m \in \mathbb{N}^*$ , on note  $S_m$  la variable aléatoire déterminant le nombre d'essais jusqu'à l'obtention de  $m$  succès :

$$S_m = k \iff X_1 + \dots + X_k = m \text{ et } X_1 + \dots + X_{k-1} < m$$

- a) Déterminer la loi et la fonction génératrice de  $S_1$ .
- b) Même question avec  $S_m - S_{m-1}$  pour  $m \geq 2$ .
- c) Déterminer la fonction génératrice de  $S_m$  puis la loi de  $S_m$ .

**Exercice 32: (\*\*\*)**

Soit  $X_1, X_2, \dots$  des variables aléatoires mutuellement indépendantes suivant toutes une même loi de Bernoulli de paramètre  $p \in ]0; 1[$ . Soit aussi  $N$  une variable aléatoire à valeurs dans  $\mathbb{N}$  indépendantes des précédentes.

On pose :

$$X = \sum_{k=1}^N X_k \text{ et } Y = \sum_{k=1}^N (1 - X_k)$$

- a) Pour  $t, u \in [-1; 1]$ , exprimer à l'aide de la fonction génératrice de  $N$

$$G(t, u) = \mathbb{E}(t^X u^Y)$$

- b) On suppose que  $N$  suit la loi de Poisson de paramètre  $\lambda > 0$ .  
Montrer que les variables  $X$  et  $Y$  sont indépendantes.
- c) Inversement, on suppose que les variables  $X$  et  $Y$  sont indépendantes.  
Montrer que  $N$  suit une loi de Poisson.

**Exercice 33: Somme aléatoire de variables aléatoires (\*\*\*)**

Soit  $N$  et  $X_1, X_2, \dots$  des variables aléatoires indépendantes à valeurs dans  $\mathbb{N}$ . On suppose que les variables  $X_1, X_2, \dots$  suivent toutes une même loi de fonction génératrice  $G_X$  et on pose :

$$\forall \omega \in \Omega, S(\omega) = \sum_{k=1}^{N(\omega)} X_k(\omega).$$

- a) Établir  $G_S(t) = G_N(G_X(t))$  pour  $|t| \leq 1$ .
- b) On suppose que les variables admettent une espérance. Établir l'identité de Wald :

$$\mathbb{E}(S) = \mathbb{E}(N)\mathbb{E}(X_1)$$

---