

EXERCICES : ESPACES PROBABILISÉS, AVEC CORRIGÉS**Révisions de Sup** (ex. 1 à 7)**Exercice 1:**

On tire 8 cartes simultanément et au hasard dans un jeu de 32 cartes. Quelle est la probabilité pour que figurent (exactement) 2 as parmi ces 8 cartes ? 3 piques ? 2 as et 3 piques ? 2 as ou 3 piques ?

 *Solution:*

Nombre de cas possibles : $\binom{32}{8}$

a) 2 as : nombre de cas favorables = $\binom{4}{2} \times \binom{28}{6}$. Donc $P_1 = \frac{\binom{4}{2} \times \binom{28}{6}}{\binom{32}{8}}$

b) 3 piques : nombre de cas favorables = $\binom{8}{3} \times \binom{24}{5}$. Donc $P_2 = \frac{\binom{8}{3} \times \binom{24}{5}}{\binom{32}{8}}$

c) 2 as et 3 piques : nombre de cas favorables : $3 \times \binom{7}{2} \times \binom{21}{4} + \binom{3}{2} \times \binom{7}{3} \times \binom{21}{3}$.
Donc $P_3 = \frac{3 \times \binom{7}{2} \times \binom{21}{4} + \binom{3}{2} \times \binom{7}{3} \times \binom{21}{3}}{\binom{32}{8}}$

d) 2 as ou 3 piques : $P_4 = P_1 + P_2 - P_3$.

Exercice 2:

$2n$ garçons et $2n$ filles se sont inscrits en classe prépa PCSI dans un lycée comptant deux classes PCSI. On les répartit au hasard dans les deux classes. Quelle est la probabilité que chaque classe comporte autant de filles que de garçons si l'on suppose que les deux classes ont le même effectif ?

 *Solution:*

Il suffit de construire une classe pour que la deuxième classe soit automatiquement construite.

Nombre de cas possibles : $\binom{4n}{2n}$. Nombre de cas favorables : $\binom{2n}{n} \times \binom{2n}{n}$. Donc $P = \frac{\binom{2n}{n}^2}{\binom{4n}{2n}}$

Exercice 3:

Quelle est la probabilité que, dans une classe de N élèves, deux élèves au moins aient la même date anniversaire (on ne tiendra pas compte des années bissextiles) ?
Pour quelles valeurs de N cette probabilité est-elle supérieure à 0,9 ?

 *Solution:*

On cherche plutôt la probabilité de l'événement contraire, qui est : « tous les élèves ont des dates d'anniversaire différentes ».

Cette probabilité est égale à $q_N = \frac{365 \times 364 \times \dots \times (365 - N + 1)}{365^N}$. La probabilité demandée vaut donc $1 - q_N$.

Exercice 4:

$\frac{1}{4}$ d'une population a été vacciné. Parmi les vaccinés, on compte $\frac{1}{12}$ de malades. Parmi les malades, il y a 4 non vaccinés pour un vacciné. Quelle est la probabilité pour un non vacciné de tomber malade ?

 *Solution:*

On note V l'événement « être vacciné » et M l'événement « être malade ».

On cherche ici à calculer $\mathbb{P}_{\overline{V}}(M)$. L'énoncé nous donne : $\mathbb{P}(V) = \frac{1}{4}$, $\mathbb{P}_V(M) = \frac{1}{12}$ et $\mathbb{P}_M(\overline{V}) = \frac{4}{5}$.

Or on a :

$$\begin{aligned} \mathbb{P}_{\overline{V}}(M) &= \frac{\mathbb{P}(M \cap \overline{V})}{\mathbb{P}(\overline{V})} = \frac{\mathbb{P}_M(\overline{V}) \times \mathbb{P}(M)}{\mathbb{P}(\overline{V})} = \frac{4/5}{3/4} (\mathbb{P}(M \cap V) + \mathbb{P}(M \cap \overline{V})) \\ &= \frac{16}{15} (\mathbb{P}(V) \times \mathbb{P}_V(M) + \mathbb{P}(\overline{V}) \times \mathbb{P}_{\overline{V}}(M)) = \frac{16}{15} \left(\frac{1}{4} \times \frac{1}{12} + \frac{3}{4} \times \mathbb{P}_{\overline{V}}(M) \right) = \frac{1}{45} + \frac{4}{5} \mathbb{P}_{\overline{V}}(M) \end{aligned}$$

$$\left| \text{donc } \frac{1}{5} \mathbb{P}_{\overline{V}}(M) = \frac{1}{45} \text{ puis } \mathbb{P}_{\overline{V}}(M) = \frac{1}{9}. \right.$$

Exercice 5:

On étudie au cours du temps le fonctionnement d'un appareil obéissant aux règles suivantes :

- si l'appareil fonctionne à l'instant $n-1$ ($n \in \mathbb{N}^*$), il a la probabilité $\frac{1}{6}$ d'être en panne à l'instant n .
- si l'appareil est en panne à l'instant $n-1$, il a la probabilité $\frac{2}{3}$ d'être en panne à l'instant n .

On note p_n la probabilité que l'appareil soit en état de marche à l'instant n .

- a) Établir pour tout $n \in \mathbb{N}^*$ une relation entre p_n et p_{n-1} .
- b) Exprimer p_n en fonction de p_0 .
- c) Étudier la convergence de la suite (p_n) .

 **Solution:**

- a) On note F_n l'événement « l'appareil fonctionne à l'instant n ».
On applique alors la formule des probabilités totales avec le système complet d'événements $(F_{n-1}, \overline{F_{n-1}})$. On a donc :

$$\mathbb{P}(F_n) = \mathbb{P}(F_{n-1})\mathbb{P}_{F_{n-1}}(F_n) + \mathbb{P}(\overline{F_{n-1}})\mathbb{P}_{\overline{F_{n-1}}}(F_n)$$

$$\text{d'où } p_n = \frac{5}{6}p_{n-1} + \frac{1}{3}(1 - p_{n-1}) = \frac{1}{2}p_{n-1} + \frac{1}{3}.$$

- b) (p_n) est une suite arithmético-géométrique.

$$\text{On résout alors } x = \frac{1}{2}x + \frac{1}{3} : x = \frac{2}{3}.$$

$$\text{On pose } q_n = p_n - \frac{2}{3}. (q_n) \text{ est une suite géométrique de raison } \frac{1}{2} \text{ c'est-à-dire } q_n = \frac{1}{2^n}q_0 = \frac{1}{2^n}\left(p_0 - \frac{2}{3}\right).$$

$$\text{On a donc } p_n = \frac{1}{2^n}\left(p_0 - \frac{2}{3}\right) + \frac{2}{3}.$$

- c) On a $\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{1}{2^n} = 0$ donc $\lim_{n \rightarrow +\infty} p_n = \frac{2}{3}$.

Exercice 6:

Une urne contient une boule blanche et une boule rouge.

On tire dans cette urne une boule, on note sa couleur et on la remet dans l'urne accompagnée de deux autres boules de la même couleur puis on répète l'opération.

- a) Quelle est la probabilité que n premières boules tirées soient rouges ?
- b) Quelle est la probabilité de tirer indéfiniment des boules rouges ?
- c) Le résultat précédent reste-t-il vrai si on remet la boule accompagnée de trois autres boules de la même couleur ?

 **Solution:**

- a) Notons A_n l'événement : « les n premières boules tirées sont rouges ».

On a $\mathbb{P}(A_0) = 1$ et $\mathbb{P}(A_n | A_{n-1}) = \frac{2n-1}{2n}$ car si A_{n-1} a lieu, l'urne est composée d'une boule blanche et de $2n-1$ boules rouges lors du n -ième tirage. Donc :

$$\mathbb{P}(A_n) = \prod_{k=1}^n \frac{2k-1}{2k} = \frac{(2n)!}{2^{2n}(n!)^2}.$$

- b) En vertu de la formule de Stirling

$$\mathbb{P}(A_n) \underset{n \rightarrow +\infty}{\sim} \frac{1}{\sqrt{\pi n}} \underset{n \rightarrow +\infty}{\rightarrow} 0.$$

Par continuité décroissante :

$$\mathbb{P}\left(\bigcap_{n=0}^{+\infty} A_n\right) = 0$$

- c) Dans ce nouveau modèle, $\mathbb{P}(A_n) = \prod_{k=1}^n \frac{3k-2}{3k-1}$ et donc :

$$\ln \mathbb{P}(A_n) = \sum_{k=1}^n \ln\left(1 - \frac{1}{3k-1}\right) \underset{n \rightarrow +\infty}{\rightarrow} -\infty$$

car $\sum \ln \left(1 - \frac{1}{3k-1}\right)$ est une série à termes négatifs divergente (considérer un équivalent). On obtient donc à nouveau $\mathbb{P} \left(\bigcap_{n=0}^{+\infty} A_n \right) = 0$.

Exercice 7: Les sauts de puce sur une droite

Une puce se trouve à l'instant 0 au point d'abscisse a (a entier), sur un segment gradué de 0 à N (on suppose donc $0 \leq a \leq N$). A chaque instant, elle fait un bond de $+1$ avec la probabilité p ($0 < p < \frac{1}{2}$), ou un bond de -1 avec la probabilité $q = 1 - p$. Autrement dit, si x_n est l'abscisse de la particule à l'instant n , on a :

$$x_{n+1} = \begin{cases} x_n + 1 & \text{avec probabilité } p \\ x_n - 1 & \text{avec probabilité } 1 - p. \end{cases}$$

Le processus se termine lorsque la particule atteint une des extrémités du segment (c'est-à-dire s'il existe x_n avec $x_n = 0$ ou $x_n = N$).

- On note u_a la probabilité pour que la particule partant de a , le processus s'arrête en 0.
 - Que vaut u_0 ? u_N ?
 - Montrer que si $0 < a < N$, alors $u_a = pu_{a+1} + qu_{a-1}$.
 - En déduire l'expression exacte de u_a .
- On note v_a la probabilité pour que la particule partant de a , le processus s'arrête en N . Reprendre les questions précédentes avec v_a au lieu de u_a .
- Calculer $u_a + v_a$. Qu'en déduisez-vous ?

 *Solution:*

- Par définition, $u_0 = 1$ (si le processus commence en 0, il s'arrête immédiatement). De même $u_N = 0$.
 - Notons A l'évènement « le processus s'arrête en 0 », B l'évènement « la puce est en $a+1$ à l'instant 1 » et C l'évènement « la puce est en $a-1$ à l'instant 1 ». Puisque $C = \bar{B}$ la formule des probabilités totales donne :

$$\mathbb{P}(A) = \mathbb{P}(A | B) \mathbb{P}(B) + \mathbb{P}(A | C) \mathbb{P}(C).$$

Or si à l'instant 1 la puce est en $a+1$, la probabilité que le processus s'arrête en 0 est u_{a+1} , idem si elle est en $a-1$ donc :

$$u_a = pu_{a+1} + qu_{a-1}.$$

- Pour a entier entre 1 et $N-1$, on a donc une relation de récurrence linéaire d'ordre 2, dont l'équation caractéristique est $r = pr^2 + q$, de racines distinctes $r_1 = 1$ et $r_2 = \frac{q}{p}$. Avec les conditions $u_0 = 1$ et $u_N = 0$, on trouve

$$u_a = \frac{q^N}{q^N - p^N} + \frac{p^N}{p^N - q^N} \left(\frac{q}{p} \right)^a.$$

- Lorsque le processus s'arrête en N au lieu de 0, on reprend le même raisonnement et les mêmes calculs, ou alors on se contente de changer p en q et les sens de déplacements. On obtient :

$$v_a = pv_{a+1} + qv_{a-1} \quad \text{puis} \quad v_a = \frac{p^N}{p^N - q^N} + \frac{q^N}{q^N - p^N} \left(\frac{q}{p} \right)^a.$$

- On trouve $u_a + v_a = 1$, c'est-à-dire que le processus s'arrête presque sûrement.

Espaces probabilisés (ex. 8 à 12)

Exercice 8: (A)

Soit $a \in]1; +\infty[$ et $\zeta(a) = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n^a}$.

- Montrer qu'en posant : $\forall n \in \mathbb{N}^*, \mathbb{P}(\{n\}) = \frac{1}{\zeta(a)n^a}$ on définit une probabilité sur $\mathbb{N}^*$.
- Calculer $\mathbb{P}(2\mathbb{N}^*)$ et plus généralement $\mathbb{P}(k\mathbb{N}^*)$ pour $k \in \mathbb{N}^*$.

 *Solution:*

- Immédiat, il suffit de préciser que la série définissant $\zeta(a)$ est bien convergente et de dire que $\sum_{n \in \mathbb{N}^*} \mathbb{P}(\{n\}) = 1$.

$$\text{b) } \mathbb{P}(k\mathbb{N}^*) = \sum_{n=1}^{+\infty} \mathbb{P}(\{kn\}) = \frac{1}{k^a}$$

Exercice 9: Inégalité de Bonferroni

Soient $(\Omega, \mathcal{A}, \mathbb{P})$ un espace probabilisé, et $A_1, \dots, A_n$ des évènements. Démontrer que

$$\mathbb{P}(A_1 \cap \dots \cap A_n) \geq \sum_{i=1}^n \mathbb{P}(A_i) - (n-1).$$

Indication : procéder par récurrence sur n .

 **Solution:**

On procède par récurrence en utilisant la formule :

$$\mathbb{P}(A \cap B) = \mathbb{P}(A) + \mathbb{P}(B) - \mathbb{P}(A \cup B).$$

C'est évidemment vrai pour $n = 1$.

Si c'est vrai pour $n - 1$ alors :

$$\begin{aligned} \mathbb{P}(A_1 \cap \dots \cap A_n) &= \mathbb{P}(A_1 \cap \dots \cap A_{n-1}) + \mathbb{P}(A_n) - \mathbb{P}((A_1 \cap \dots \cap A_{n-1}) \cup A_n) \\ &\geq \sum_{i=1}^{n-1} \mathbb{P}(A_i) - (n-2) + \mathbb{P}(A_n) - 1 \end{aligned}$$

ce qui est le résultat voulu à l'ordre n .

Exercice 10:

Soit $(A_n)_{n \in \mathbb{N}}$ une suite d'évènements deux à deux incompatibles d'un espace probabilisé $(\Omega, \mathcal{A}, P)$.

Montrer que : $\lim_{n \rightarrow +\infty} \mathbb{P}(A_n) = 0$.

 **Solution:**

On a, puisque les évènements sont deux à deux incompatibles :

$$\sum_{n=0}^N \mathbb{P}(A_n) = \mathbb{P}\left(\bigcup_{n=0}^N A_n\right) \leq \mathbb{P}(\Omega) = 1.$$

Puisque les sommes partielles de la série à termes positifs $\sum \mathbb{P}(A_n)$ sont majorées, celle-ci converge. En particulier, son terme général tend vers 0.

Exercice 11:

Soit Ω un ensemble non dénombrable. On introduit

$$\mathcal{A} = \{A \subset \Omega \mid A \text{ ou } \bar{A} \text{ est au plus dénombrable}\}$$

a) Vérifier que $\mathcal{A}$ est une tribu sur Ω .

b) Pour $A \in \mathcal{A}$, on pose

$$\mathbb{P}(A) = \begin{cases} 0 & \text{si } A \text{ est au plus dénombrable} \\ 1 & \text{si } \bar{A} \text{ est au plus dénombrable} \end{cases}$$

Vérifier que $\mathbb{P}$ définit une probabilité sur $(\Omega, \mathcal{A})$.

 **Solution:**

a) – $\bar{\Omega} = \emptyset$ donc $\bar{\Omega}$ est au plus dénombrable et $\Omega \in \mathcal{T}$.

– $\mathcal{T}$ est évidemment stable par passage au complémentaire.

– Soit $(A_n)_{n \in \mathbb{N}}$ une suite d'éléments de $\mathcal{T}$.

– Si tous les A_n sont dénombrables, la réunion $\bigcup_{n \in \mathbb{N}} A_n$ est dénombrable en tant qu'union dénombrable de parties dénombrables.

- si l'un des A_n , noté A_{n_0} , n'est pas dénombrable, on a nécessairement $\overline{A_{n_0}}$ dénombrable puisque A_{n_0} appartient à $\mathcal{T}$.

Or

$$\overline{\bigcup_{n \in \mathbb{N}} A_n} = \bigcap_{n \in \mathbb{N}} \overline{A_n} \subset \overline{A_{n_0}}$$

donc $\overline{\bigcup_{n \in \mathbb{N}} A_n}$ est dénombrable car inclus dans une partie qui l'est.

Dans les deux cas, l'union des $(A_n)_{n \in \mathbb{N}}$ est élément de $\mathcal{T}$.

- b)** – $\mathbb{P}(\Omega) = 1$ car Ω n'est pas dénombrable.
- Soit $(A_n)_{n \in \mathbb{N}}$ une suite d'éléments de $\mathcal{T}$ deux à deux disjoints.
 - Si tous les A_n sont dénombrables, $\bigcup_{n \in \mathbb{N}} A_n$ est aussi dénombrable et l'égalité

$$\mathbb{P}\left(\bigcup_{n=0}^{+\infty} A_n\right) = \sum_{n=0}^{+\infty} \mathbb{P}(A_n)$$

est vérifiée puisque les deux membres sont nuls.

- si l'un des A_n , noté A_{n_0} , n'est pas dénombrable, $\overline{A_{n_0}}$ est dénombrable et, les A_n étant disjoints, on a $A_n \subset \overline{A_{n_0}}$ pour tout $n \neq n_0$. On en déduit que seul A_{n_0} n'est pas dénombrable et donc l'égalité

$$\mathbb{P}\left(\bigcup_{n=0}^{+\infty} A_n\right) = \sum_{n=0}^{+\infty} \mathbb{P}(A_n)$$

est à nouveau vérifiée.

Exercice 12: Lemmes de Borel-Cantelli

Soit $(A_n)_{n \in \mathbb{N}}$ une suite d'évènements de l'espace probabilisé $(\Omega, \mathcal{A}, \mathbb{P})$.

On considère l'évènement

$$A = \bigcap_{p \in \mathbb{N}} \bigcup_{n \geq p} A_n$$

dont la réalisation signifie qu'une infinité des évènements A_n sont réalisés.

1. On suppose la convergence de la série $\sum \mathbb{P}(A_n)$.
Montrer que $\mathbb{P}(A) = 0$.
2. On suppose maintenant que les évènements A_n sont mutuellement indépendants et que la série $\sum \mathbb{P}(A_n)$ diverge.
Montrer que $\mathbb{P}(A) = 1$.

 **Solution:**

Commençons par expliquer la remarque de l'énoncé.

Soit B l'évènement : « seulement un nombre fini d'évènements A_n se réalise ».

B peut aussi s'écrire :

« il existe un entier p tel que, pour tout $n \geq p$, A_n ne se réalise pas »

ou encore :

$$\exists p \in \mathbb{N} \text{ tel que } \forall n \geq p, \overline{A_n}$$

$$\text{c'est-à-dire } B = \bigcup_{p \in \mathbb{N}} \left(\bigcap_{n \geq p} \overline{A_n} \right).$$

L'évènement : « il existe une infinité de A_n qui se réalisent » est alors l'évènement contraire de B , c'est-à-dire l'évènement A introduit dans l'énoncé.

1. Par continuité décroissante $\mathbb{P}(A) = \lim_{p \rightarrow +\infty} \mathbb{P}\left(\bigcup_{n \geq p} A_n\right)$. Or par sous-additivité

$$\mathbb{P}\left(\bigcup_{n \geq p} A_n\right) \leq \sum_{n=p}^{+\infty} \mathbb{P}(A_n)$$

Le majorant est ici le reste d'une série convergente, il est donc de limite nulle donc $\mathbb{P}(A) = 0$ (ainsi, presque sûrement, seul un nombre fini d'évènements peuvent se produire simultanément).

2. On a

$$\overline{A} = \bigcup_{p \in \mathbb{N}} \bigcap_{n \geq p} \overline{A}_n$$

Par continuité croissante $\mathbb{P}(\overline{A}) = \lim_{p \rightarrow +\infty} \mathbb{P}\left(\bigcap_{n \geq p} \overline{A}_n\right)$. Or pour $N \geq p$ on a par inclusion

$$0 \leq \mathbb{P}\left(\bigcap_{n \geq p} \overline{A}_n\right) \leq \mathbb{P}\left(\bigcap_{n=p}^N \overline{A}_n\right)$$

puis par indépendance mutuelle

$$\mathbb{P}\left(\bigcap_{n=p}^N \overline{A}_n\right) = \prod_{n=p}^N \mathbb{P}(\overline{A}_n) = \prod_{n=p}^N (1 - \mathbb{P}(A_n))$$

En utilisant l'inégalité $\ln(1-x) \leq -x$ soit $1-x \leq e^{-x}$:

$$\mathbb{P}\left(\bigcap_{n=p}^N \overline{A}_n\right) \leq \prod_{n=p}^N e^{-\mathbb{P}(A_n)} = \exp\left(-\sum_{n=p}^N \mathbb{P}(A_n)\right)$$

Enfin, la divergence de la série à termes positifs $\sum \mathbb{P}(A_n)$ donne $\sum_{n=p}^N \mathbb{P}(A_n) \xrightarrow{N \rightarrow +\infty} +\infty$ donc $\mathbb{P}\left(\bigcap_{n=p}^N \overline{A}_n\right) \xrightarrow{N \rightarrow +\infty} 0$

d'où $\mathbb{P}\left(\bigcap_{n \geq p} \overline{A}_n\right) = 0$.

On peut alors conclure $\mathbb{P}(\overline{A}) = 0$ puis $\mathbb{P}(A) = 1$.

Calculs de probabilités sur un univers infini (ex. 13 à 18)

Exercice 13:

On lance un dé équilibré jusqu'à l'obtention d'un 6.

Quelle est la probabilité que tous les nombres obtenus soient pairs ?

Écrire un petit script Python pour simuler cette expérience.

 **Solution:**

On note A_n : « les n 1ers lancers donnent 2 ou 4 et le n -ième donne 6 ».

L'évènement cherché est $A = \bigcup_{n \in \mathbb{N}^*} A_n$. Ces évènements étant disjoints, $\mathbb{P}(A) = \sum_{n=1}^{+\infty} \mathbb{P}(A_n)$.

Par indépendance des lancers on a

$$\mathbb{P}(A_n) = \left(\frac{1}{3}\right)^{n-1} \times \frac{1}{6}$$

On en déduit ensuite facilement (somme d'une série géométrique) :

$$\mathbb{P}(A) = \frac{1}{4}.$$

Exercice 14:

On dispose d'une pièce pour laquelle la probabilité d'obtenir « face » est $p \in]0, 1[$. On pose $q = 1 - p$.

- a) Soit n un entier naturel non nul. On effectue n lancers indépendants de la pièce décrite ci dessus.
On note F_k l'événement « on obtient face au k -ième lancer » et P_k l'événement « on obtient pile au k -ième lancer ».
On cherche à calculer la probabilité qu'au cours de ces n lancers « face » ne soit jamais suivi de « pile ». On note A_n cet événement.
- i) Exprimer A_n en fonction des événements F_k et P_k , $k \in \{1, \dots, n\}$.
- ii) En déduire $P(A_n)$. (Au cours du calcul on sera amené à distinguer le cas $p = \frac{1}{2}$ et $p \neq \frac{1}{2}$.)
- b) Si l'on admet que l'on peut lancer indéfiniment la pièce, est-il possible que « face » ne soit jamais suivi de « pile ».
(Indication : on notera A l'événement « face n'est jamais suivi de pile » et on exprimera A à l'aide des A_n , $n \in \mathbb{N}^*$.)

 Solution:

- a) i) $A_n = (F_1 \cap \dots \cap F_n) \cup (P_1 \cap F_2 \cap \dots \cap F_n) \cup \dots \cup (P_1 \cap P_2 \cap \dots \cap P_{n-1} \cap F_n) \cup (P_1 \cap P_2 \cap \dots \cap P_{n-1} \cap P_n)$
(Une fois que l'on a 1 face, il n'y a que des faces ensuite. Le rang du premier face détermine tout...)

- ii) A_n est formé d'une union d'événements incompatibles et les lancers sont indépendants donc :

$$P(A_n) = \sum_{k=0}^n p^k q^{n-k} = q^n \sum_{k=0}^n \left(\frac{p}{q}\right)^k$$

- Si $\frac{p}{q} \neq 1$, c'est-à-dire $p \neq \frac{1}{2}$ on a

$$P(A_n) = q^n \frac{1 - (p/q)^{n+1}}{1 - p/q} = \frac{q^{n+1} - p^{n+1}}{q - p}$$

- Si $p = q = \frac{1}{2}$ alors $P(A_n) = \frac{1}{2^n}(n+1)$.

- b) Soit A l'événement « face n'est jamais suivi de pile ».

On peut écrire $A = \bigcap_{n \in \mathbb{N}^*} A_n$

Or $A_{n+1} \subset A_n$ donc (A_n) est une suite décroissante d'événements ; on a donc $P(A) = \lim_{n \rightarrow +\infty} P(A_n)$.

- Si $p \neq \frac{1}{2}$, alors $\lim_{n \rightarrow +\infty} P(A_n) = 0$ car $\lim_{n \rightarrow +\infty} q^{n+1} = \lim_{n \rightarrow +\infty} p^{n+1} = 0$ car $0 < p, q < 1$. Donc $P(A) = 0$.
- Si $p = \frac{1}{2}$, comme $n+1 = o(2^n)$, $\lim_{n \rightarrow +\infty} P(A_n) = 0$ et donc $P(A) = 0$.

Il est donc presque sûrement impossible que pile ne soit jamais suivi de face.

Exercice 15:

On lance une pièce avec la probabilité p de faire « Pile ». On note A_n l'événement

« on obtient pour la première fois deux piles consécutifs lors du n -ième lancer »

et l'on désire calculer sa probabilité a_n .

- a) Déterminer a_1, a_2 et a_3 .
- b) Exprimer a_{n+2} en fonction de a_n et a_{n+1} pour $n \geq 1$ (considérer ce qui s'est passé au 1er lancer).
- c) Justifier qu'il est quasi-certain d'obtenir deux piles consécutifs.
- d) Déterminer le nombre d'essais moyen pour obtenir deux piles consécutifs.
- e) Écrire un petit script Python pour simuler cette expérience.

 Solution:

- a) $a_1 = 0$ et $a_2 = p^2$ et $a_3 = (1-p)p^2$.

- b) Considérons les résultats des deux premiers lancers : PP, PF, FP et FF , et le système complet d'événements : PP, PF et $F = FP \cup FF$

Par translation du problème :

$$\mathbb{P}(A_{n+2}|PF) = \mathbb{P}(A_n) \quad \text{et} \quad \mathbb{P}(A_{n+2}|F) = \mathbb{P}(A_{n+1})$$

et évidemment : $\mathbb{P}(A_{n+2}|PP) = 0$.

Par la formule des probabilités totales

$$a_{n+2} = 0 \times p^2 + a_n \times p(1-p) + a_{n+1}(1-p)$$

soit encore

$$a_{n+2} = (1-p)a_{n+1} + p(1-p)a_n.$$

- c) Soit A l'évènement : « on obtient deux piles consécutifs ». Alors $A = \bigcup_{n=1}^{+\infty} A_n$, et puisque les évènements A_n

sont incompatibles, on a $\mathbb{P}(A) = \sum_{n=1}^{+\infty} \mathbb{P}(A_n)$.

La suite $(a_n)_{n \geq 1}$ vérifie une relation de récurrence linéaire d'ordre 2, dont l'équation caractéristique est $f(r) = r^2 - (1-p)r - p(1-p) = 0$. Or on vérifie facilement que $f(-1) > 0$, $f(0) < 0$ et $f(1) > 0$ donc les deux racines r_1 et r_2 de cette équation sont distinctes et de valeur absolue < 1 . Puisque la suite (a_n) est combinaison linéaire des suites (r_1^n) et (r_2^n) , on en déduit que la série de terme général a_n converge.

– 1ère solution

On sait d'après le cours qu'il existe λ et μ tels que, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, $a_n = \lambda r_1^n + \mu r_2^n$, avec $a_1 = \lambda r_1 + \mu r_2 = 0$ et $a_2 = \lambda r_1^2 + \mu r_2^2 = p^2$.

On a alors :

$$\begin{aligned} \mathbb{P}(A) &= \sum_{n=1}^{+\infty} a_n = \sum_{n=1}^{+\infty} (\lambda r_1^n + \mu r_2^n) = \lambda \frac{r_1}{1-r_1} + \mu \frac{r_2}{1-r_2} \\ &= \frac{\overbrace{\lambda r_1 + \mu r_2}^{=0} - (\lambda + \mu)r_1 r_2}{1 - (r_1 + r_2) + r_1 r_2} = \frac{-(\lambda + \mu)r_1 r_2}{p^2} \end{aligned}$$

en ayant utilisé les relations coefficients-racines $r_1 r_2 = -p(1-p)$ et $r_1 + r_2 = 1-p$.

Or $(\lambda + \mu)r_1 r_2 = \underbrace{\lambda r_1}_{=-\mu r_2} r_2 + \underbrace{\mu r_2}_{=-\lambda r_1} r_1 = -(\lambda r_1^2 + \mu r_2^2) = -p^2$ donc $\mathbb{P}(A) = 1$ et il est donc quasi-certain

que deux piles consécutifs apparaissent.

– 2ème solution, plus astucieuse

Posons $S = \sum_{n=1}^{+\infty} a_n$. En sommant les relations de récurrence précédentes, on obtient

$$S - (a_1 + a_2) = (1-p)(S - a_1) + p(1-p)S$$

On en tire $S = 1$.

- d) Il s'agit de calculer (sous réserve de convergence)

$$m = \sum_{n=1}^{+\infty} n a_n.$$

On montre déjà la convergence de la série définissant μ . Or on a vu que (a_n) est combinaison linéaire de suites géométriques raison < 1 en valeur absolue, donc la série des $n a_n$ est alors convergente par argument de croissance comparée (on compare par exemple à la série de terme général $\frac{1}{n^2}$).

On exploite alors la relation

$$(n+2)a_{n+2} = (1-p)(n+2)a_{n+1} + p(1-p)(n+2)a_n$$

et on somme :

$$m - 2a_2 - a_1 = (1-p)((m - a_1) + (S - a_1)) + p(1-p)(m + 2S)$$

On en tire :

$$m = \frac{1+p}{p^2}.$$

Exercice 16:

Deux joueurs de football tirent chacun leur tour un penalty. Le premier qui marque a gagné. Le joueur qui commence a la probabilité p_1 de marquer à chaque tour et le second la probabilité p_2 (avec $p_1, p_2 > 0$)

- Quelle est la probabilité que le premier joueur gagne ?
- Montrer qu'il est quasi-certain que le jeu se termine.
- Pour quelle(s) valeur(s) de p_1 existe-t-il une valeur de p_2 pour laquelle le jeu est équitable ?

 **Solution:**

- a) Notons A_n l'événement « le but est marqué au rang n ». L'événement « J_1 gagne » est la réunion disjointe des A_{2k+1} . Or $\mathbb{P}(A_{2k+1}) = (1-p_1)^k(1-p_2)^k p_1$ et donc

$$\mathbb{P}(J_1 \text{ gagne}) = \sum_{k=0}^{+\infty} (1-p_1)^k(1-p_2)^k p_1 = \frac{p_1}{p_1 + p_2 - p_1 p_2}.$$

- b) L'événement « J_2 gagne » est la réunion disjointe des A_{2k} . Or $\mathbb{P}(A_{2k}) = (1-p_1)^{k-1}(1-p_2)^{k-1} p_2$ et donc

$$\mathbb{P}(J_2 \text{ gagne}) = \frac{p_2 - p_1 p_2}{p_1 + p_2 - p_1 p_2}.$$

La somme $\mathbb{P}(J_1 \text{ gagne}) + \mathbb{P}(J_2 \text{ gagne})$ vaut 1 et donc il est quasi-certain que le jeu se termine.

- c) Le jeu est équitable lorsque $\mathbb{P}(J_1 \text{ gagne}) = 1/2$ c'est-à-dire $2p_1 = (p_1 + p_2 - p_1 p_2)$. Cette équation en l'inconnue p_2 a pour seule solution

$$p_2 = \frac{p_1}{1-p_1} \quad (\text{si } p_1 \neq 1)$$

Cette solution est élément de $]0;1[$ si et seulement si $p_1 \leq 1/2$.

Exercice 17:

Deux joueurs A et B lancent deux dés parfaits.

A commence. Si la somme des points qu'il obtient est 6, il a gagné.

Sinon B lance les dés et si la somme des points qu'il obtient est 7, il a gagné.

Sinon A rejoue et ainsi de suite.

- Calculer la probabilité des événements « obtenir un total de 6 » et « obtenir un total de 7 ».
- On introduit les événements A_n : « le joueur A gagne à son n -ième lancer », B_n : « le joueur B gagne à son n -ième lancer », F : « A gagne le jeu » et G : « B gagne le jeu ». Exprimer les événements F et G à l'aide des événements A_n et B_n .
- En déduire si vous préférez être le joueur A ou B .

 **Solution:**

- a) $P(S_6) = \frac{5}{6^2} = \frac{5}{36}$ (nombre de cas favorables / nombre de cas possibles) et $P(S_7) = \frac{6}{6^2} = \frac{1}{6}$.

b)

$$F = A_1 \cup (\overline{A_1} \cap \overline{B_1} \cap A_2) \cup \dots \cup (\overline{A_1} \cap \overline{B_1} \cap \dots \cap \overline{B_{k-1}} \cap A_k) \cup \dots$$

$$= A_1 \cup \left(\bigcup_{k=2}^{+\infty} (\overline{A_1} \cap \overline{B_1} \cap \dots \cap \overline{B_{k-1}} \cap A_k) \right)$$

$$G = \bigcup_{k=1}^{+\infty} (\overline{A_1} \cap \overline{B_1} \cap \dots \cap \overline{A_k} \cap B_k)$$

- c) On pose $A'_k = \overline{A_1} \cap \overline{B_1} \cap \dots \cap \overline{B_{k-1}} \cap A_k$.

Comme les lancers sont indépendants, on a

$$P(A'_k) = \left(1 - \frac{5}{36}\right)^{k-1} \times \left(1 - \frac{1}{6}\right)^{k-1} \times \frac{5}{36} = \left(\frac{5 \times 31}{6 \times 36}\right)^{k-1} \times \frac{5}{36}$$

Donc, comme les A'_k sont incompatibles,

$$P(A) = \lim_{n \rightarrow +\infty} P(A_1) + \sum_{k=2}^n P(A'_k) = \frac{5}{36} + \sum_{k=2}^{+\infty} \left(\frac{5 \times 31}{6 \times 36}\right)^{k-1} \times \frac{5}{36} = \frac{5}{36} \times \frac{1}{1 - (5 \times 31)/(6 \times 36)} = \frac{30}{61}$$

De même $P(B) = \frac{1}{6} \sum_{k=0}^{+\infty} \left(\frac{31}{36}\right)^{k+1} \times \left(\frac{5}{6}\right)^k = \frac{31}{61}$
 Il vaut donc mieux être B que A .

Exercice 18:

Une urne contient initialement une boule blanche et une boule noire. On effectue une série de tirages aléatoires d'une boule jusqu'à obtenir une boule noire. A chaque tirage amenant une boule blanche, on replace la boule blanche puis on multiplie par 2 le nombre de boules blanches présentes dans l'urne après la remise de la boule, puis on procède au tirage suivant.

L'objectif de l'exercice est d'évaluer la probabilité de ne jamais obtenir de boule noire, et de déterminer en particulier si cette probabilité est nulle.

1. Pour $n \geq 1$, on note B_n l'événement : « Les n premiers lancers ont lieu et n'amènent pas de boules noires ». On note $u_n = \mathbb{P}(B_n)$.
 - a) Démontrer, sans chercher à calculer u_n , que la suite (u_n) est convergente.
 - b) Démontrer que $u_n = \prod_{k=0}^{n-1} \frac{2^k}{1+2^k}$.
2. On note B_∞ l'événement : « l'expérience ne s'arrête jamais » .
 - a) Démontrer que $\mathbb{P}(B_\infty) = \lim_{n \rightarrow +\infty} u_n$.
 - b) Démontrer que $\mathbb{P}(B_\infty) > 0$.

 Solution:

1. a) $B_{n+1} \subset B_n$ donc la suite u est décroissante. Étant minorée par 0, elle converge.
- b) Soit $k \geq 1$. Au k -ième tirage s'il a lieu on a 1 boule noire et 2^{k-1} boules blanches. Donc :

$$\mathbb{P}(B_k | B_1 \cap \dots \cap B_{k-1}) = \frac{2^{k-1}}{1 + 2^{k-1}}.$$

Puis par la formule des probas composées :

$$\mathbb{P}(B_n) = \mathbb{P}(B_n | B_{n-1} \cap B_{n-2} \cap \dots \cap B_1) \times \mathbb{P}(B_{n-1} | B_{n-2} \cap \dots \cap B_1) \times \dots \times \mathbb{P}(B_2 | B_1) \mathbb{P}(B_1) = \prod_{k=0}^{n-1} \frac{2^k}{1 + 2^k}.$$

2. a) $B_\infty = \bigcap_{n \in \mathbb{N}^*} B_n$ et la suite (B_n) est décroissante d'où le résultat par continuité décroissante.
- b) $-\ln u_n = \sum_{k=0}^{n-1} \ln(1 + 2^{-k})$. Il est facile de montrer que cette série converge (équivalent..). Donc $\ln u_n$ converge vers un certain réel ℓ et u converge vers $e^\ell > 0$.

* * * *

* * *

* *

*