

EXERCICES : ENDOMORPHISMES D'UN ESPACE EUCLIDIEN, AVEC CORRIGÉS**Exercice 1: (★)**

Reconnaître les endomorphismes de $\mathbb{R}^3$ (muni de sa structure euclidienne canonique) canoniquement associés aux matrices :

$$\text{a) } A = \frac{1}{3} \begin{pmatrix} -2 & -1 & 2 \\ 2 & -2 & 1 \\ 1 & 2 & 2 \end{pmatrix} \quad \text{b) } B = \frac{1}{9} \begin{pmatrix} -7 & -4 & 4 \\ 4 & -8 & -1 \\ -4 & -1 & -8 \end{pmatrix} \quad \text{c) } C = \begin{pmatrix} 8 & 1 & 4 \\ -4 & 4 & 7 \\ 1 & 8 & -4 \end{pmatrix}.$$

 **Solution:**

- a) Il est facile de vérifier que la matrice A est orthogonale (les colonnes forment une famille orthonormée de $\mathcal{M}_{3,1}(\mathbb{R})$).

De plus, on constate sans presque aucun calcul que $\det A > 0$, A est donc la matrice d'une rotation.

L'axe de cette rotation est la droite des vecteurs invariants. Or, si $V = (x \ y \ z)^T$:

$$AV = V \iff \begin{cases} -5x - y + 2z = 0 \\ 2x - 5y + z = 0 \\ x + 2y - z = 0 \end{cases} \iff \begin{cases} y = x \\ z = 3x. \end{cases}$$

L'axe de la rotation est donc la droite vectorielle de base le vecteur $(1, 1, 3)$. Son angle θ est tel que $\text{tr } A = 1 + 2\cos\theta$ soit $\theta = \pm \text{Arc cos}\left(-\frac{5}{6}\right)$.

- b) Il est facile de vérifier que la matrice B est orthogonale (les colonnes forment une famille orthonormée de $\mathcal{M}_{3,1}(\mathbb{R})$).

De plus, on constate sans presque aucun calcul que $\det B < 0$, B est donc la matrice d'une antirotation ou d'une réflexion. Or en dimension 3 la trace d'une réflexion est égale à 1 (les trois valeurs propres sont 1, 1 et -1), donc puisque $\text{tr } B \neq -1$, B est la matrice d'une antirotation.

L'axe de cette antirotation est la droite des vecteurs propres associés à la valeur propre -1 . Or, si $V = (x \ y \ z)^T$:

$$BV = -V \iff \begin{cases} 2x - 4y + 4z = 0 \\ 4x + y - z = 0 \\ -4x - y + z = 0 \end{cases} \iff \begin{cases} y = z \\ x = 0. \end{cases}$$

L'axe de l'anti rotation est donc la droite vectorielle de base le vecteur $(0, 1, 1)$. Son angle θ est tel que $\text{tr } A = -1 + 2\cos\theta$ soit $\theta = \pm \text{Arc cos}\left(-\frac{7}{9}\right)$.

- c) La matrice C n'est pas orthogonale, mais on constate que ses colonnes sont orthogonales et ont même norme, qui vaut 9.

La matrice $\frac{1}{9}C$ est donc, elle, une matrice orthogonale, que l'on caractérise comme dans les deux exemples précédents.

Au final, C est la matrice de la composée d'une isométrie et de l'homothétie de rapport 9.

Exercice 2: (★★)

Montrer que $A = \begin{pmatrix} a & b & c \\ c & a & b \\ b & c & a \end{pmatrix}$ est une matrice orthogonale positive si et seulement si a, b, c sont les racines d'une équation de la forme $x^3 - x^2 + k = 0$, k étant un réel tel que $0 \leq k \leq \frac{4}{27}$.

 **Solution:**

- Déjà, A est une matrice orthogonale si et seulement si ses colonnes forment une famille orthonormée, ce qui équivaut à :

$$ab + bc + ca = 0 \quad \text{et} \quad a^2 + b^2 + c^2 = 1.$$

Or $(a + b + c)^2 = a^2 + b^2 + c^2 + 2ab + 2bc + 2ca$ donc cela équivaut à

$$ab + bc + ca = 0 \quad \text{et} \quad a + b + c = \pm 1.$$

- Il s'agit alors d'une isométrie positive si et seulement si son déterminant est positif (forcément =1) soit :

$$a^3 + b^3 + c^3 - 3abc = 1.$$

Or $a^3 + b^3 + c^3 - 3abc = (a + b + c)(a^2 + b^2 + c^2 - ab - bc - ca)$ (factorisation que l'on peut obtenir directement en calculant différemment le déterminant) donc en rassemblant tous les résultats :

$$A \in \mathcal{O}_3^+(\mathbb{R}) \iff ab + bc + ca = 0 \text{ et } a + b + c = 1.$$

• Trois nombres réels α, β, γ sont toujours les solutions de l'équation $(x - \alpha)(x - \beta)(x - \gamma) = 0$, équation qui peut s'écrire

$$x^2 + px^2 + qx + r = 0$$

avec les relations coefficients-racines :

$$p = -(\alpha + \beta + \gamma) \quad , \quad q = \alpha\beta + \beta\gamma + \gamma\alpha \quad \text{et} \quad r = -\alpha\beta\gamma$$

Donc ici a, b, c sont les racines d'une équation de la forme $x^3 - x^2 + k = 0$ avec $k = -abc$.

Réciproquement, si l'on considère une telle équation, l'étude de la fonction $x \mapsto x^3 - x^2 + k$ montre qu'elle admet 3 racines réelles si et seulement si $0 \leq k \leq \frac{4}{27}$, et dans ce cas, ses racines a, b, c vérifient les relations précédentes, ce qui établit la réciproque.

• *Remarque* : il est facile de voir que le vecteur $(a \ b \ c)^\top$ est invariant par A , donc lorsque $A \neq I_3$, il s'agit d'un vecteur de base de l'axe de la rotation que représente A .

Exercice 3: (★★)

Déterminer les conditions sur les réels $\alpha, \beta, \gamma, u, v, w$ pour que la matrice :

$$M = \begin{pmatrix} 1-u & -2\alpha\beta & -2\alpha\gamma \\ -2\alpha\beta & 1-v & -2\beta\gamma \\ -2\alpha\gamma & -2\beta\gamma & 1-w \end{pmatrix}$$

soit orthogonale (on supposera α, β, γ non nuls).

Démontrer que c'est alors la matrice d'une réflexion que l'on caractérisera.

 *Solution:*

- La matrice M est orthogonale si et seulement si ses colonnes forment une famille orthonormée de $\mathcal{M}_{3,1}(\mathbb{R})$, ce qui équivaut aux deux systèmes :

$$\begin{cases} (1-u)^2 + 4\alpha^2\beta^2 + 4\alpha^2\gamma^2 = 1 \\ 4\alpha^2\beta^2 + (1-v)^2 + 4\beta^2\gamma^2 = 1 \\ 4\alpha^2\gamma^2 + 4\beta^2\gamma^2 + (1-w)^2 = 1 \end{cases} \quad \text{et} \quad \begin{cases} 2\alpha\beta(1-u) + 2\alpha\beta(1-v) - 4\alpha\beta\gamma^2 = 0 \\ -4\alpha^2\beta\gamma + 2\beta\gamma(1-v) + 2\beta\gamma(1-w) = 0 \\ 2\alpha\gamma(1-u) - 4\alpha\beta^2\gamma + 2\alpha\gamma(1-w) = 0 \end{cases}$$

En divisant les lignes du second système par $\alpha\beta \neq 0$ etc., il s'écrit :

$$\begin{cases} (1-u) + (1-v) = 2\gamma^2 \\ (1-v) + (1-w) = 2\alpha^2 \\ (1-u) + (1-w) = 2\beta^2 \end{cases}$$

d'où en faisant des combinaisons linéaires des lignes (comme $L_1 - L_2 + L_3$ etc...) :

$$1-u = \gamma^2 - \alpha^2 + \beta^2 \quad ; \quad 1-v = \gamma^2 + \alpha^2 - \beta^2 \quad ; \quad 1-w = -\gamma^2 + \alpha^2 + \beta^2.$$

La première ligne du premier système devient alors :

$$(\gamma^2 - \alpha^2 + \beta^2)^2 + 4\alpha^2\beta^2 + 4\alpha^2\gamma^2 = 1 \quad \text{soit} \quad (\gamma^2 + \alpha^2 + \beta^2)^2 = 1$$

et les deux autres lignes donnent la même chose.

Finalement, les 6 équations initiales sont simplement équivalentes à :

$$1-u = \gamma^2 - \alpha^2 + \beta^2 \quad ; \quad 1-v = \gamma^2 + \alpha^2 - \beta^2 \quad ; \quad 1-w = -\gamma^2 + \alpha^2 + \beta^2 \quad \text{et} \quad \alpha^2 + \beta^2 + \gamma^2 = 1$$

ou mieux, à :

$$\alpha^2 + \beta^2 + \gamma^2 = 1 \quad ; \quad u = 2\alpha^2 \quad ; \quad v = 2\beta^2 \quad \text{et} \quad w = 2\gamma^2.$$

- On a donc

$$M = \begin{pmatrix} 1-2\alpha^2 & -2\alpha\beta & -2\alpha\gamma \\ -2\alpha\beta & 1-2\beta^2 & -2\beta\gamma \\ -2\alpha\gamma & -2\beta\gamma & 1-2\gamma^2 \end{pmatrix} \quad \text{avec} \quad \alpha^2 + \beta^2 + \gamma^2 = 1.$$

Soit alors $V = (x \ y \ z)^\top \in \mathcal{M}_{3,1}(\mathbb{R})$; on a facilement, après simplification :

$$MV = V \iff \alpha x + \beta y + \gamma z = 0$$

donc le sous-espace propre $E_1(M)$ est un plan : on peut affirmer, directement d'après le cours, que M est la matrice de la réflexion par rapport au plan d'équation $\alpha x + \beta y + \gamma z = 0$ (dont un vecteur normal est (α, β, γ)).

Exercice 4: (★★)

Soit f un automorphisme orthogonal d'un espace vectoriel euclidien E .

Montrer que f est diagonalisable si et seulement si f est une symétrie orthogonale.

 *Solution:*

Soit $f \in \mathcal{O}(E)$, diagonalisable. Puisque les seules valeurs propres possibles de f sont ± 1 , il existe une base où la matrice de f est diagonale avec des ± 1 sur la diagonale.

On a donc $f^2 = \text{Id}_E$. Par suite, f est une symétrie; et si c'est aussi une isométrie, c'est une symétrie orthogonale (cf. théorème du cours sur la caractérisation des symétries orthogonales).

La réciproque est immédiate.

Exercice 5: (★★)

Soit $A = (a_{ij}) \in \mathcal{O}_n(\mathbb{R})$. Montrer que : $\left| \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n a_{ij} \right| \leq n$. Cas d'égalité?

 *Solution:*

- Si l'on munit $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ du produit scalaire canonique alors

$$\sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n a_{ij} = \langle A | J \rangle$$

où J est la matrice carrée d'ordre n dont tous les coefficients sont égaux à 1.

L'inégalité de Cauchy-Schwarz donne alors :

$$|\langle A | J \rangle| \leq \|A\| \|J\| = \sqrt{\text{tr}(A^T A)} \|J\| \underset{A \in \mathcal{O}_n(\mathbb{R})}{=} \sqrt{\text{tr } I_n} \sqrt{\sum_{i,j} 1^2} = n \sqrt{n}$$

donc cette inégalité est trop forte...

- En notant C_j les colonnes de la matrice A et U le vecteur colonne dont toutes les coordonnées sont égales à 1, on a, lorsque $\mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R})$ est muni du produit scalaire canonique :

$$\sum_{i=1}^n a_{ij} = \langle C_j | U \rangle$$

donc

$$\sum_{i,j} a_{ij} = \sum_{j=1}^n \langle C_j | U \rangle = \left\langle \sum_{j=1}^n C_j \middle| U \right\rangle$$

et l'inégalité de Cauchy-Schwarz pour le produit scalaire dans $\mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R})$ donne alors :

$$\left| \sum_{i,j} a_{ij} \right| = \left| \left\langle \sum_{j=1}^n C_j \middle| U \right\rangle \right| \leq \left\| \sum_{j=1}^n C_j \right\| \|U\|.$$

Or $\|U\| = \sqrt{\sum_{i=1}^n 1^2} = \sqrt{n}$ et, les colonnes de A formant une famille orthonormale, on a d'après la relation de Pythagore :

$$\left\| \sum_{j=1}^n C_j \right\|^2 = \sum_{j=1}^n \|C_j\|^2 = \sum_{j=1}^n 1 = n,$$

et l'on obtient ainsi le résultat demandé.

Il y a égalité si et seulement si $\sum C_j$ est colinéaire à U , ce qui équivaut à dire que U est un vecteur propre de A (forcément pour une valeur propre valant ± 1).

Exercice 6: ()**

Soient E un espace euclidien et $f : E \rightarrow E$ une application linéaire vérifiant :

$$\forall x, y \in E, \langle x | y \rangle = 0 \Rightarrow \langle f(x) | f(y) \rangle = 0.$$

a) Calculer $\langle u + v | u - v \rangle$ pour u, v vecteurs unitaires.

b) Établir qu'il existe $\alpha \in \mathbb{R}^+$ vérifiant

$$\forall x \in E, \|f(x)\| = \alpha \|x\|.$$

c) Conclure qu'il existe $g \in \mathcal{O}(E)$ vérifiant $f = \alpha g$.

 **Solution:**

a) Si u et v sont unitaires :

$$\langle u + v | u - v \rangle = \|u\|^2 + \langle v | u \rangle - \langle u | v \rangle - \|v\|^2 = \|u\|^2 - \|v\|^2 = 1 - 1 = 0.$$

b) On a donc, compte tenu de la linéarité de f et de l'hypothèse faite, pour tous vecteurs u, v unitaires :

$$\langle f(u + v) | f(u - v) \rangle = 0$$

donc

$$\langle f(u) + f(v) | f(u) - f(v) \rangle = \|f(u)\|^2 - \|f(v)\|^2 = 0.$$

Ainsi, la valeur de $\|f(u)\|$ est la même pour tous les vecteurs unitaires. Notons là α .

Si x est un vecteur non nul quelconque, le vecteur $u = \frac{x}{\|x\|}$ est unitaire donc $f\left(\frac{x}{\|x\|}\right) = \alpha \frac{x}{\|x\|}$ d'où par linéarité $\|f(x)\| = \alpha \|x\|$, et cela reste évidemment vrai pour $x = 0$.

c) – Si α est nul, alors f est l'application nulle, et la propriété demandée est vérifiée pour toute $g \in \mathcal{O}(E)$.

– Sinon, l'application $g = \frac{1}{\alpha}f$ vérifie $\|g(x)\| = \|x\|$ pour tout x , c'est une isométrie.

Exercice 7: ()**

Dans un espace euclidien E , soit $f \in \mathcal{L}(E)$. Montrer que deux des trois propriétés suivantes entraînent la troisième :

- (i) f est une isométrie vectorielle;
- (ii) $f^2 = -\text{Id}_E$;
- (iii) $f(x)$ est orthogonal à x pour tout x .

 **Solution:**

Dans tout le corrigé, on notera $\mathcal{B} = (e_1, \dots, e_n)$ une base orthonormée de E , A la matrice de f dans $\mathcal{B}$, et si x (resp. y) est un vecteur de E , on notera X (resp. Y) la matrice colonne de ses coordonnées dans $\mathcal{B}$.

• (i) et (ii) $\Rightarrow$ (iii)

Supposons f isométrie telle que $f^2 = -\text{Id}_E$, c'est-à-dire $A^\top A = I_n$ et $A^2 = -I_n$. On a donc $A^\top A = -A^2$ et puisque A est inversible, en simplifiant on a $A^\top = -A$.

On en déduit, pour tous $x, y \in E$:

$$\langle f(x) | y \rangle = \langle AX | Y \rangle = (AX)^\top Y = X^\top A^\top Y = -X^\top AY = -\langle x | f(y) \rangle$$

et, en particulier : $\langle f(x) | x \rangle = -\langle x | f(x) \rangle$ d'où $\langle f(x) | x \rangle = 0$.

• (ii) et (iii) $\Rightarrow$ (i)

Déjà, on remarque que si (iii) est vérifié alors, pour tous $x, y \in E$, $\langle f(x + y) | x + y \rangle = 0$ donc :

$$\langle f(x) + f(y) | x + y \rangle = \underbrace{\langle f(x) | x \rangle}_{=0} + \langle f(y) | x \rangle + \langle f(x) | y \rangle + \underbrace{\langle f(y) | y \rangle}_{=0} = 0$$

d'où

$$\langle f(x) | y \rangle = -\langle x | f(y) \rangle$$

En particulier, pour tous $i, j \in \llbracket 1; n \rrbracket$ on a $a_{ji} = \langle f(e_i) | e_j \rangle = -\langle e_i | f(e_j) \rangle = -a_{ij}$ c'est-à-dire que la matrice A est antisymétrique, et puisque $A^2 = -I_n$ on en déduit $A^\top A = I_n$ donc f est une isométrie.

• (iii) et (i) $\Rightarrow$ (ii) Même principe que ci-dessus.

Exercice 8: (*)**

Soient $(x_1, x_2, \dots, x_n) \in \mathbb{R}^n$, muni de sa structure euclidienne canonique. A l'aide de la méthode de Schmidt, prouver que : $|\det(x_1, x_2, \dots, x_n)| \leq \|x_1\| \cdot \|x_2\| \cdot \dots \cdot \|x_n\|$. Cas d'égalité ?

 Solution:

Si la famille $(x_1, x_2, \dots, x_n)$ est liée, le résultat est immédiat.

Sinon, soit $\mathcal{B}' = (x_1, x_2, \dots, x_n)$; $\mathcal{B}'$ est une base, que l'on peut orthonormaliser en une base $\mathcal{B}''$ par le procédé de Schmidt. En notant $\mathcal{B}$ la base canonique de $\mathbb{R}^n$, on a

$$\det_{\mathcal{B}} \mathcal{B}' = \det_{\mathcal{B}} \mathcal{B}'' \cdot \det_{\mathcal{B}''} \mathcal{B}' = \pm \det_{\mathcal{B}''} \mathcal{B}'$$

puisque les deux bases $\mathcal{B}$ et $\mathcal{B}''$ sont des bases orthonormées.

Pr la matrice de passage $P_{\mathcal{B}''}^{\mathcal{B}'}$ est triangulaire supérieure, et les coefficients diagonaux sont (avec des notations évidentes), les $\langle x_i | e_i'' \rangle$. Il ne reste plus qu'à utiliser l'inégalité de Cauchy-Schwarz.

Il y a égalité si et seulement si il y a égalité dans les inégalités précédentes, c'est-à-dire si et seulement si chaque x_i est colinéaire à e_i'' , ce qui équivaut à dire que la famille $(x_1, \dots, x_n)$ est orthogonale.

Exercice 9: (*)**

Soit $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$. Montrer qu'il existe une matrice orthogonale P telles que : $AA^\top = P(A^\top A)P^{-1}$.

 Solution:

On a déjà vu dans la feuille précédente que :

$$\chi_{A^\top A} = \chi_{AA^\top}.$$

Les deux matrices, qui sont symétriques réelles, ont donc mêmes valeurs propres avec les mêmes ordres de multiplicité donc d'après le théorème spectral elles sont orthogonalement semblables à la même matrice diagonale. D'où le résultat par transitivité.

Exercice 10: Matrices et déterminants de Gramm. (*)**

Soit E un espace vectoriel euclidien de dimension n . Étant donnés p vecteurs $v_1, \dots, v_p$ de E , on définit leur matrice de Gramm $G(v_1, \dots, v_p)$ par :

$$\forall (i, j) \in \llbracket 1; p \rrbracket^2, G_{ij} = \langle v_i | v_j \rangle$$

(ainsi, $G(v_1, \dots, v_p)$ est une matrice carrée symétrique d'ordre p).

- Montrer que le rang et le déterminant de $G(v_1, \dots, v_p)$ ne changent pas si l'on ajoute à un des vecteurs une combinaison linéaire des autres.
En déduire que le rang de $G(v_1, \dots, v_p)$ est égal au rang de la famille $(v_1, \dots, v_p)$.
- On suppose ici $p = n$. Exprimer $\det G(v_1, \dots, v_p)$ en fonction du déterminant de $(v_1, \dots, v_p)$ dans une base orthonormée de E .
- Application : Montrer que si A est une matrice réelle carrée d'ordre n , on a : $\text{rg}(A^\top A) = \text{rg } A$.
- Application : Soit F un sous-espace vectoriel de E , et $(v_1, \dots, v_p)$ une base de F . Exprimer, pour tout vecteur a de E , le déterminant de $G(a, v_1, \dots, v_p)$ en fonction de la distance de a à F , et en déduire une expression de cette distance (on pourra remarquer que l'on ne change pas ce déterminant en remplaçant a par $a - p(a)$, où p est la projection orthogonale sur F).

 Solution:

- Pour répondre à la question, il suffit de montrer que le rang et le déterminant de $G(v_1, \dots, v_p)$ ne changent pas si l'on ajoute à v_1 le vecteur λv_2 (en effet, les v_j jouent tous le même rôle, et en réitérant l'opération,

on pourra remplacer v_1 par $v_1 + \sum_{i=2}^n \lambda_i v_i$. Or :

$$G(v_1 + \lambda v_2, v_2, \dots, v_n) = \begin{pmatrix} \langle v_1 + \lambda v_2 | v_1 + \lambda v_2 \rangle & \langle v_1 + \lambda v_2 | v_2 \rangle & \dots & \langle v_1 + \lambda v_2 | v_n \rangle \\ \langle v_1 + \lambda v_2 | v_2 \rangle & \langle v_2 | v_2 \rangle & \dots & \langle v_2 | v_n \rangle \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \langle v_1 + \lambda v_2 | v_n \rangle & \dots & \dots & \langle v_n | v_n \rangle \end{pmatrix}$$

$$\stackrel{L_1 \leftarrow L_1 - \lambda L_2}{\sim} \begin{pmatrix} \langle v_1 + \lambda v_2 | v_1 \rangle & \langle v_1 | v_2 \rangle & \dots & \langle v_1 | v_n \rangle \\ \langle v_1 + \lambda v_2 | v_2 \rangle & \langle v_2 | v_2 \rangle & \dots & \langle v_2 | v_n \rangle \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \langle v_1 + \lambda v_2 | v_n \rangle & \langle v_2 | v_n \rangle & \dots & \langle v_n | v_n \rangle \end{pmatrix}$$

$$\stackrel{C_1 \leftarrow C_1 - \lambda C_2}{\sim} G(v_1, v_2, \dots, v_n).$$

Les matrices $G(v_1 + \lambda v_2, v_2, \dots, v_n)$ et $G(v_1, v_2, \dots, v_n)$ se déduisant l'une de l'autre par des opérations élémentaires, elles ont même rang et même déterminant.

- Soit r le rang de la famille $(v_1, \dots, v_p)$ (on suppose bien sûr $r \geq 1$. Sans perte de généralité, on peut supposer que la famille $(v_1, \dots, v_r)$ est libre, et que les vecteurs $v_{r+1}, \dots, v_p$ en sont des combinaisons linéaires. En soustrayant alors à chacun de ces vecteurs leur combinaison linéaire des r premiers, on obtient, compte tenu de la question précédente :

$$\text{rg}(G(v_1, \dots, v_p)) = \text{rg}(G(v_1, \dots, v_r, 0, \dots, 0)) = \text{rg} \begin{bmatrix} G(v_1, \dots, v_r) & 0 \\ 0 & 0_r \end{bmatrix} = \text{rg}(G(v_1, \dots, v_r)).$$

De plus, si l'on se donne une base orthonormée de E et si l'on note V_j la matrice colonne des coordonnées de v_j dans $\mathcal{B}$, on a $\langle v_i | v_j \rangle = V_i^\top V_j$, donc $G(v_1, \dots, v_r) = A^\top A$ où A est la matrice carrée d'ordre r dont les colonnes sont $V_1, \dots, V_r$. Cette matrice étant inversible puisque $(v_1, \dots, v_r)$ est libre, il en est de même de $G(v_1, \dots, v_r)$ donc $G(v_1, \dots, v_r)$ est de rang r , d'où le résultat.

- b) D'après le calcul ci-dessus, si A est la matrice de $(v_1, \dots, v_n)$ dans une base orthonormée de E , on a $G(v_1, \dots, v_n) = A^\top A$ donc $\det(G(v_1, \dots, v_n)) = (\det A)^2$.
- c) Découle directement de la question a).
- d) D'après la question a), puisque $p(a)$ est combinaison linéaire de $v_1, \dots, v_p$, le déterminant de $G(a, v_1, \dots, v_p)$ est égal à celui de $G(a - p(a), v_1, \dots, v_p)$.

Or le vecteur $a - p(a)$ appartient à $F^\perp$ donc est orthogonal à $v_1, \dots, v_p$ donc

$$\det(G(a - p(a), v_1, \dots, v_p)) = \begin{vmatrix} \|a - p(a)\|^2 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & \langle v_1 | v_1 \rangle & \dots & \langle v_1 | v_n \rangle \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & \langle v_n | v_1 \rangle & \dots & \langle v_n | v_n \rangle \end{vmatrix} = \|a - p(a)\|^2 \det(G(v_1, \dots, v_p)).$$

Lorsque a n'appartient pas à F (sinon $d(a, F) = 0$), la famille $(a, v_1, \dots, v_p)$ est libre donc la matrice $G(a, v_1, \dots, v_p)$ est inversible et l'on a :

$$d(a, F)^2 = \frac{\det(G(a, v_1, \dots, v_p))}{\det(G(v_1, \dots, v_p))}.$$

Exercice 11: (★★★)

On munit $\mathbb{R}_n[X]$ du produit scalaire $\langle P | Q \rangle = \int_{-1}^1 \frac{P(t)Q(t)}{\sqrt{1-t^2}} dt$.

Vérifier qu'il s'agit bien d'un produit scalaire.

Montrer que $u : P \mapsto (X^2 - 1)P'' + XP'$ est un endomorphisme auto-adjoint pour ce produit scalaire. Déterminer ses éléments propres.

 **Solution:**

- Il faut déjà vérifier que la définition a bien un sens, c'est-à-dire que l'intégrale impropre écrite existe :

En effet, la fonction $t \mapsto \frac{P(t)Q(t)}{\sqrt{1-t^2}}$ est continue sur $] -1; 1[$, et au voisinage de 1 (par exemple), c'est un $O\left(\frac{1}{(1-t)^{1/2}}\right)$, donc le résultat s'ensuit par comparaison à une fonction de Riemann.

- Les propriétés qu'il faut vérifier pour montrer qu'il s'agit d'un produit scalaire sont assez triviales (on utilise comme d'habitude le fait que si l'intégrale d'une fonction continue positive est nulle alors la fonction est nulle sur l'intervalle d'intégration).

- On calcule :

$$\langle u(P) | Q \rangle = \int_{-1}^1 \left(\frac{t}{\sqrt{1-t^2}} P'(t) - \sqrt{1-t^2} P''(t) \right) Q(t) dt$$

et on remarque que l'expression entre parenthèses dans l'intégrale est égale, au signe près, à la dérivée de $t \mapsto \sqrt{1-t^2} P'(t)$. Donc une intégration par parties (à justifier proprement) donne :

$$\langle u(P) | Q \rangle = \int_{-1}^1 \sqrt{1-t^2} P'(t) Q'(t) dt,$$

et sous cette forme il est clair que u est auto-adjoint.

- Soit, pour $p \in \mathbb{N}$, T_p le polynôme de Tchebychev de 1ère espèce défini par : $\forall \theta \in \mathbb{R}, T_p(\cos \theta) = \cos(p\theta)$.

En dérivant deux fois cette expression, il est facile de vérifier que $u(T_p) = p^2 T_p$, donc T_p est un vecteur propre de u pour la valeur propre p^2 . Et puisque les polynômes T_p pour $0 \leq p \leq n$ forment une famille de polynômes de degrés échelonnés de 0 à n , ils forment une base de $\mathbb{R}_n[X]$ donc on a bien tous les sous-espaces propres et toutes les valeurs propres.

On peut aussi s'amuser à vérifier que les polynômes T_p et T_q pour $p \neq q$ sont bien orthogonaux entre eux, ce que l'on savait d'après le théorème spectral.

Exercice 12: (★)

Soit E un espace euclidien de dimension $n \geq 2$, a un vecteur unitaire de E et k un réel avec $k \neq -1$.

- a) Montrer que

$$f(x) = x + k(x | a)a$$

définit un endomorphisme symétrique de E .

- b) Montrer que f est un automorphisme.

- c) Étudier les valeurs propres et les sous-espaces propres de f .

 *Solution:*

On n'oublie bien sûr pas de vérifier rapidement que f est bien un endomorphisme...

Le reste de l'exercice est trivial, si l'on pense à écrire la matrice de f dans une base orthonormée de la forme $(a, e_2, \dots, e_n) \dots$

Exercice 13: (★)

Soit $A = (a_{ij})$ une matrice réelle symétrique d'ordre n . On note $\lambda_1, \dots, \lambda_n$ ses valeurs propres (distinctes ou non). Prouver que : $\sum_{i=1}^n \lambda_i^2 = \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n a_{ij}^2$.

 *Solution:*

A étant symétrique réelle est (ortho)diagonalisable : $A = PDP^{-1}$ avec $P \in \mathcal{O}_n(\mathbb{R})$ et $D = \text{diag}(\lambda_1, \dots, \lambda_n)$.
On a alors :

$$\sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n a_{ij}^2 = \|A\|^2 = \text{tr}(A^\top A) = \text{tr}(A^2) = \text{tr}(D^2) = \sum_{i=1}^n \lambda_i^2.$$

Exercice 14: (★)

Soit $A = (a_{ij})$ une matrice réelle symétrique d'ordre n . Montrer que, s'il existe $k \in \mathbb{N}^*$ tel que $A^k = I_n$, alors $A^2 = I_n$.

 *Solution:*

A étant symétrique réelle est (ortho)diagonalisable : $A = PDP^{-1}$ avec $P \in \mathcal{O}_n(\mathbb{R})$ et $D = \text{diag}(\lambda_1, \dots, \lambda_n)$.
On a alors $A^k = PD^k P^{-1}$ donc la relation $A^k = I_n$ implique $D^k = I_n$ donc $\lambda_i^k = 1$ pour tout i .

On en déduit, puisque les λ_i sont réels, $\lambda_i = \pm 1$ pour tout i donc $D^2 = I_n$ puis $A^2 = I_n$.

Exercice 15: (★★)

Soit $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ telle que : $\text{Sp}(A^\top A - AA^\top) \subset \mathbb{R}_+$.
Montrer que A et $A^\top$ commutent.

 *Solution:*

On remarque déjà que la matrice $A^\top A - AA^\top$ est symétrique (calculer sa transposée) réelle, donc toutes ses valeurs propres $\lambda_1, \dots, \lambda_n$ sont réelles. De plus elles sont positives par hypothèse et

$$\sum_{i=1}^n \lambda_i = \text{tr}(A^\top A - AA^\top) = 0.$$

Il en résulte que tous les λ_i sont nuls. $A^\top A - AA^\top$ étant diagonalisable, elle est semblable à la matrice $\text{diag}(\lambda_1, \dots, \lambda_n)$ donc à la matrice nulle donc $A^\top A - AA^\top = 0$, cqfd.

Exercice 16: (★★)

Diagonaliser la matrice : $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & \dots & 1 & 1 \\ 1 & 0 & \dots & 0 & 1 \\ \vdots & \vdots & \dots & \vdots & \vdots \\ 1 & 0 & \dots & 0 & 1 \\ 1 & 1 & \dots & 1 & 1 \end{pmatrix}.$

 *Solution:*

A est symétrique réelle donc diagonalisable

$\text{rg}(A) = 2$ donc $\dim(\text{Ker } A) = n - 2$, donc 0 est valeur propre d'ordre 2 (exactement puisque A est diagonalisable.

On cherche alors les deux valeurs propres qui manquent en considérant $\text{tr}(A)$ et $\text{tr}(A^2)$...

Exercice 17: (★★)

Soit $A = \begin{pmatrix} a_1 & b_1 & 0 & \dots & 0 \\ c_1 & \ddots & \ddots & \ddots & \vdots \\ 0 & \ddots & \ddots & \ddots & 0 \\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & b_{n-1} \\ 0 & \dots & 0 & c_{n-1} & a_n \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ avec $c_k b_k > 0$ pour tout $k \in \llbracket 1; n-1 \rrbracket$.

- Montrer qu'il existe une matrice diagonale D dont le premier coefficient diagonal vaut 1 telle que $D^{-1}AD$ soit symétrique réelle.
- En déduire que A est diagonalisable.

Exercice 18: Diagonalisation simultanée de deux endomorphismes symétriques. (★★)

Soient u et v deux endomorphismes symétriques d'un espace vectoriel euclidien E . Démontrer que les quatre propositions suivantes sont équivalentes :

- $u \circ v$ est symétrique.
- $u \circ v = v \circ u$.
- il existe une base orthonormale $\mathcal{B}$ de E formée de vecteurs propres communs à u et v .
- Il existe une base orthonormale $\mathcal{B}$ de E telle que les matrices de u et v dans $\mathcal{B}$ soient diagonales.

 *Solution:*

- (i) $\iff$ (ii)

Notons A (resp. B) la matrice de u (resp. v) dans une base orthonormée $\mathcal{B}$ de E . Alors

$$(i) \iff AB \in \mathcal{S}_n(\mathbb{R}) \iff (AB)^\top = AB \iff B^\top A^\top = AB \iff BA = AB \iff (ii).$$

- (iii) $\iff$ (iv) est immédiat puisque dans une base formée de vecteurs propres la matrice d'un endomorphisme est diagonale.
- (iv) $\implies$ (ii) est immédiat, puisque deux matrices diagonales commutent entre elles.
- (ii) $\implies$ (iii)

Supposons que u et v sont deux endomorphismes symétriques qui commutent.

On sait que u est diagonalisable : $E = \bigoplus_{\lambda \in \text{Sp}(u)} E_{\lambda}(u)$.

Puisque v commute avec u , les sous-espaces vectoriels $E_{\lambda}(u)$ sont stables par v , et puisque v est diagonalisable, l'endomorphisme induit par v sur chaque $E_{\lambda}(u)$ est aussi diagonalisable. Cela signifie qu'il existe une base $\mathcal{B}_{\lambda}$ de $E_{\lambda}(u)$ formée de vecteurs propres de v . Mais ce sont aussi des vecteurs propres de u , puisqu'ils appartiennent à $E_{\lambda}(u)$!

Finalement, chaque $\mathcal{B}_{\lambda}$ est une base de $E_{\lambda}(u)$ formée de vecteurs propres propres communs à u et à v , puis

$\mathcal{B} = \bigcup_{\lambda \in \text{Sp}(u)} \mathcal{B}_{\lambda}$ est une base de E formée de vecteurs propres propres communs à u et à v .

Exercice 19: Matrices symétriques positives, définies positives. (★★★)

- Prouver que $A \in \mathcal{S}_n(\mathbb{R})$ est positive si et seulement si il existe $B \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ telle que $A = B^{\top} B$.
- Montrer que, pour toute matrice $A \in \mathcal{S}_n^+(\mathbb{R})$, il existe une et une seule matrice $B \in \mathcal{S}_n^+(\mathbb{R})$ telle que : $B^2 = A$.
- Matrice de Hilbert : Soit $n \geq 1$, et H_n la matrice carrée d'ordre n dont le terme d'indice (i, j) vaut $\frac{1}{i+j-1}$.
Montrer que : $H_n \in \mathcal{S}_n^{++}(\mathbb{R})$.

 Solution:

- Si $A = B^{\top} B$ alors pour tout $X \in \mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R})$ on a

$$X^{\top} A X = X^{\top} B^{\top} B X = (B X)^{\top} B X = \|B X\|^2$$

donc $X^{\top} A X \geq 0$ d'où $A \in \mathcal{S}_n^+(\mathbb{R})$.

- Réciproquement, supposons $A \in \mathcal{S}_n^+(\mathbb{R})$.

A étant symétrique réelle est (ortho)diagonalisable : $A = P D P^{-1}$ avec $P \in \mathcal{O}_n(\mathbb{R})$ et $D = \text{diag}(\lambda_1, \dots, \lambda_n)$.

D'après la question précédente, les λ_i sont des réels positifs, donc en posant $\Delta = \text{diag}(\sqrt{\lambda_1}, \dots, \sqrt{\lambda_n})$ on a $D = \Delta^2$, et puisque $\Delta^{\top} = \Delta$ on a $A = P \Delta \Delta^{\top} P^{\top} = B^{\top} B$ en posant $B = \Delta^{\top} P^{\top}$.

On peut démontrer de la même façon que A est définie positive si et seulement si il existe $B \in \text{GL}_n(\mathbb{R})$ telle que $A = B^{\top} B$.

- En reprenant les notations ci-dessus, si A est symétrique positive, on a $A = P \Delta^2 P^{-1} = B^2$ avec $B = P \Delta P^{-1}$.

Puisque $B = P \Delta P^{\top}$, B est bien symétrique, et puisque ses valeurs propres sont les coefficients diagonaux de Δ , qui sont positifs, elle est positive.

- Montrons que cette écriture est unique. Notons a (resp. b) l'endomorphisme de $\mathbb{R}^n$ canoniquement associé à A (resp. B).

a est diagonalisable (car symétrique), donc $\mathbb{R}^n = \bigoplus_{\lambda \in \text{Sp}(a)} E_{\lambda}(a)$. De plus a et b commutent (car

$AB = BA = B^3$), donc b laisse stable chaque sous-espace propre $E_{\lambda}(a)$, et puisque b est diagonalisable, l'endomorphisme induit par b sur chaque $E_{\lambda}(a)$ est aussi diagonalisable.

Soit alors μ une valeur propre de $b|_{E_{\lambda}(a)}$: il existe $x \neq 0$, $x \in E_{\lambda}(a)$ tel que $b(x) = \mu x$ donc $\lambda x = a(x) = b^2(x) = \mu^2 x$, d'où $\mu^2 = \lambda$.

B étant positive, μ est positif donc $\mu = \sqrt{\lambda}$. Ainsi, la seule valeur propre possible de $b|_{E_{\lambda}(a)}$ est $\sqrt{\lambda}$, et comme $b|_{E_{\lambda}(a)}$ est diagonalisable, cela signifie que $b|_{E_{\lambda}(a)}$ est l'homothétie de rapport $\sqrt{\lambda}$.

La restriction de b à chaque sous-espace propre $E_{\lambda}(a)$ est donc nécessairement l'homothétie de rapport $\sqrt{\lambda}$, ce qui détermine b de façon unique puisque ces sous-espaces propres sont supplémentaires.

Remarque :

On peut conclure plus rapidement si l'on utilise le résultat de l'exercice 18 : en effet, si $A = B^2$, alors A et B commutent donc sont codiagonalisables : il existe $P \in \text{GL}_n(\mathbb{R})$ et D, Δ diagonales telles que $A = P D P^{-1}$ et $B = P \Delta P^{-1}$. Donc $A = B^2 \iff D = \Delta^2$, et il est facile de conclure.

D'ailleurs la démonstration ci-dessus ressemble fortement à celle de l'exercice 18...

c) Notons $H_n = (a_{ij})$, de sorte que $a_{ij} = \frac{1}{i+j-1}$. Soit $X \in \mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R})$, $X = (x_1 \ x_2 \ \dots \ x_n)^\top$.

$$\text{Alors } X^\top H_n X = \sum_{(i,j) \in \llbracket 1;n \rrbracket^2} a_{ij} x_i x_j.$$

En « remarquant » alors que $\frac{1}{i+j-1} = \int_0^1 t^{i+j-2} dt$ (astuce!) on a :

$$X^\top H_n X = \int_0^1 \left(\sum_{i,j} x_i x_j t^{i+j-2} \right) dt = \int_0^1 \left(\sum_{i,j} (x_i t^{i-1})(x_j t^{j-1}) \right) dt = \int_0^1 \left(\sum_i x_i t^{i-1} \right)^2 dt \geq 0$$

Cela montre que la matrice H_n est symétrique positive. De plus, par stricte positivité de l'intégrale :

$$X^\top H_n X = 0 \iff \forall t \in [0;1], \sum_{i=1}^n x_i t^{i-1} = 0 \iff \underbrace{x_1 = \dots = x_n = 0}_{\text{justifiez!}} \iff X = 0$$

donc H_n est définie positive.

Exercice 20: (★★)

Soit A une matrice réelle antisymétrique d'ordre n .

- Montrer que les valeurs propres de A sont imaginaires pures.
- Montrer que la matrice $(I + A)(I - A)^{-1}$ existe et est orthogonale.
- Montrer que $\det(I + A) > 0$ (considérer l'application $\lambda \mapsto \det(I + \lambda A)$).

