DS N°1 (le 08/09/2012)

EXERCICE 1 : (E3A PSI 2011) (★)

Soit $\mathbb{C}[X]$ l'ensemble des polynômes à coefficients complexes. Dans tout cet exercice, on identifie les éléments de $\mathbb{C}[X]$ et leurs fonctions polynomiales associées.

Soit $P \in \mathbb{C}[X]$ un polynôme non nul vérifiant la relation

$$(*) \qquad P(X^2-1) = P(X-1)P(X+1)$$

1. Montrer que si a est racine de P alors $(a+1)^2-1$ et $(a-1)^2-1$ sont aussi des racines de P.

2. Soit $a_0 \in \mathbb{C}$. On définit la suite de nombres complexes $(a_n)_{n\geqslant 0}$ en posant, pour tout $n \geqslant 0$, $a_{n+1} = a_n^2 + 2a_n$.

- **a)** Vérifier que lorsque a_0 est une racine de P, pour tout entier naturel n le nombre complexe a_n est une racine de P.
- **b)** Montrer que lorsque a_0 est un réel >0, la suite $(a_n)_{n\geqslant 0}$ est une suite strictement croissante de réels positifs.
- **c)** En déduire que P n'admet pas de racine réelle strictement positive.
- **d)** Montrer que -1 n'est pas racine de P.
- **e)** Montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}$, $a_n + 1 = (a_0+1)^{2^n}$.

3. Déduire des questions précédentes que si a est une racine complexe de P alors $|a+1| = 1$. On admettra que l'on a aussi $|a-1| = 1$.

4. Montrer que si le degré de P est >0 alors P a pour unique racine 0.

5. Déterminer tous les polynômes $P \in \mathbb{C}[X]$ qui vérifient la relation $(*)$.

EXERCICE 2 : (TPE 1985, épreuve pratique, 2h) (★★★)

On considère le polynôme P tel que :

$$P(z) = z^3 + az^2 - \overline{a}z - 1\,,$$

où a est un nombre complexe.

1. On pose $a = \alpha + i\beta$ $((\alpha,\beta) \in \mathbb{R}^2)$. Discuter, suivant la position dans le plan complexe du point A d'affixe a, le nombre de racines réelles de l'équation $P(z) = 0$, et donner leurs valeurs.

2. Prouver que l'équation $P(z) = 0$ a toujours au moins une racine de module 1.

3. Prouver que, si $a \neq 0$, le module de toute racine de l'équation $P(z) = 0$ est strictement inférieur à $1 + |a|$.

4. Pour la suite, on prend

$$a = \frac{1 + i\sqrt{7}}{2}\,.$$

- **a)** Calculer $a^2, a^3, a^4, \overline{a}, \overline{a}^2, \overline{a}^3, \overline{a}^4$, en les exprimant sous la forme $p + qa$, $(p,q) \in \mathbb{Z}$.
- **b)** Déterminer le quotient et le reste de la division euclidienne de $P(X^2)$ par $P(X)$.

c) En déduire que si λ complexe est racine de P, $\mu = \lambda^2$ et $\nu = \lambda^4$ le sont aussi.
En déduire enfin les valeurs de λ, μ, ν.

5. Chercher tous les polynômes Q du troisième degré à coefficients complexes, unitaires, tels que $Q(X^2)$ soit divisible par $Q(X)$.

PROBLÈME : Localisation des racines d'un polynôme. (★★)

Question préliminaire :

Démontrer que, si $z_1, z_2, \ldots, z_n$ sont n nombres complexes ($n \in \mathbb{N}^*$), avec $z_n \neq 0$, l'égalité :

$$\left|z_1 + z_2 + \ldots z_n\right| = |z_1| + |z_2| + \ldots |z_n|$$

est possible si et seulement si il existe des réels positifs $\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_{n-1}$ tels que $z_i = \lambda_i z_n$ pour tout $i \in [\![1, n-1]\!]$. (*on pourra procéder par récurrence sur* n).

Problème :

Partie A : Une première majoration des modules des racines d'un polynôme.

1. Exemple numérique

On considère les nombres complexes $a_0 = 6-2i$, $a_1 = -3-5i$, $a_2 = -2+3i$, et on définit le polynôme $P \in \mathbb{C}[X]$ par :

$$P = X^3 + a_2 X^2 + a_1 X + a_0.$$

1.1 Montrer que P possède une racine réelle.

1.2 Résoudre dans $\mathbb{C}$ l'équation : $z^2 + 3iz - 3 + i = 0$.

1.3 Vérifier que les racines de P appartiennent au disque fermé de centre O et de rayon $A = \max\{|a_0|, 1 + |a_1|, 1 + |a_2|\}$.

2. Étude du cas général

On considère un polynôme unitaire S de degré n ($n \in \mathbb{N}^*$) défini par :

$$S = X^n + a_{n-1}X^{n-1} + \cdots + a_1 X + a_0$$

où les nombres complexes $(a_i)_{0 \leqslant i \leqslant n-1}$ sont non tous nuls.

À ce polynôme S, on associe le polynôme R à coefficients réels défini par :

$$R = X^n - |a_{n-1}|X^{n-1} - \cdots - |a_1|X - |a_0|.$$

2.1 Démontrer qu'il existe un unique réel r strictement positif tel que : $R(r) = 0$ (*on pourra étudier les variations de la fonction* $x \mapsto \dfrac{R(x)}{x^n}$ *pour* $x \in \mathbb{R}_+^*$).

Préciser le signe de $R(x)$ pour $x \geqslant 0$.

2.2 On pose

$$A = \max\Big(|a_0|, 1 + |a_1|, \ldots, 1 + |a_{n-1}|\Big).$$

Établir : $R(A) \geqslant 0$, et en déduire : $r \leqslant A$.

2.3 Établir la relation : $\forall z \in \mathbb{C}$, $\left|S(z)\right| \geqslant R(|z|)$.

En déduire que les racines de S sont toutes de module inférieur ou égal à r (et en particulier, elles appartiennent donc toutes au disque fermé de centre O et de rayon A).

2.4 Montrer que, si on suppose de plus $a_{n-1} \neq 0$, le polynôme S a au plus une racine complexe de module r.

Montrer que ce résultat peut tomber en défaut si on ne suppose pas $a_{n-1} \neq 0$.

Parie B : le théorème d'Eneström-Kakeya (1893 et 1913)

1. Soit $P \in \mathbb{R}[X]$, $P = \alpha_n X^n + \alpha_{n-1} X^{n-1} + \cdots + \alpha_1 X + \alpha_0$, avec $0 < \alpha_0 \leqslant \alpha_1 \leqslant \ldots \leqslant \alpha_n$.

En appliquant les résultats précédents au polynôme $S = \dfrac{1}{\alpha_n}(X-1)P$, démontrer que, pour toute racine complexe z de P, on a : $|z| \leqslant 1$.

Montrer que, si l'on suppose de plus $\alpha_{n-1} < \alpha_n$, alors toute racine complexe z de P est telle que $|z| < 1$.

2. Soit $Q \in \mathbb{R}[X]$, $Q = a_n X^n + a_{n-1} X^{n-1} + \cdots + a_1 X + a_0$, où les a_i sont des réels strictement positifs. On pose :

$$\beta = \min_{i \in [\![1,n]\!]} \left\{ \frac{a_{i-1}}{a_i} \right\} \quad \text{et} \quad \gamma = \max_{i \in [\![1,n]\!]} \left\{ \frac{a_{i-1}}{a_i} \right\}.$$

Démontrer que, pour toute racine complexe z de Q, on a :

$$\beta \leqslant |z| \leqslant \gamma.$$

(*on pourra appliquer les résultats de la question précédente aux polynômes* $Q(\gamma X)$ *et* $X^n Q\left(\dfrac{\beta}{X}\right)$).

Partie C : La borne de Cauchy et le théorème de Cohn (1922)

Soit $P \in \mathbb{C}[X]$, $P = a_n X^n + a_{n-1} X^{n-1} + \cdots + a_1 X + a_0$ un polynôme de degré $n \in \mathbb{N}^*$, où $a_n \neq 0$ et où les $(a_i)_{0 \leqslant i \leqslant n-1}$ sont non tous nuls.

1. Montrer que l'équation d'inconnue x

$$\sum_{k=0}^{n-1} |a_k| x^k = |a_n| x^n$$

possède une unique solution réelle strictement positive.

Cette racine est appelée *borne de Cauchy* de P, et sera notée $\rho(P)$ dans la suite.

2. Montrer que, pour toute racine complexe ζ de P, on a :

$$|\zeta| \leqslant \rho(P).$$

3. Soient $(\zeta_i)_{i \in [\![1,n]\!]}$ les n racines complexes (distinctes ou non) de P, avec :

$$0 \leqslant |\zeta_1| \leqslant |\zeta_2| \leqslant \cdots \leqslant |\zeta_n| \leqslant \rho(P).$$

3.1 Montrer que pour tout entier $k \in [\![0,n]\!]$ on a :

$$\left| \frac{a_k}{a_n} \right| \leqslant \binom{n}{k} |\zeta_n|^{n-k}$$

où $\dbinom{n}{k}$ désigne le coefficient binomial : $\dbinom{n}{k} = \dfrac{n!}{k!(n-k)!}$.

3.2 En déduire que :

$$\rho(P)^n \leqslant \sum_{k=0}^{n-1} \binom{n}{k} \rho(P)^k |\zeta_n|^{n-k}.$$

3.3 En déduire que :

$$\left(\sqrt[n]{2}-1\right)\rho(\mathrm{P}) \leqslant |\zeta_n|.$$

(*résultat dû à Cohn, 1922, amélioré par Berwald en 1934*).

3.4 On suppose que 0 n'est pas racine de P et on pose $\mathrm{Q} = \sum_{k=0}^{n} a_k \mathrm{X}^{n-k}$. On note $\rho(\mathrm{Q})$ la borne de Cauchy de Q. Montrer que :

$$\frac{1}{\rho(\mathrm{Q})} \leqslant |\zeta_1| \leqslant \frac{1}{\left(\sqrt[n]{2}-1\right)\rho(\mathrm{Q})}.$$

4. En reprenant le polynôme P de la question **1.** de la partie **A.**, déterminer à la calculatrice une valeur approchée de la borne de Cauchy de P, et vérifier pour ce polynôme les résultats obtenus aux questions **C.2.**et **C.3.3.**

Partie D : Un raffinement de la borne de Cauchy

On considère toujours $\mathrm{P} \in \mathbb{C}[\mathrm{X}]$, $\mathrm{P} = a_n\mathrm{X}^n + a_{n-1}\mathrm{X}^{n-1} + \cdots + a_1\mathrm{X} + a_0$ un polynôme de degré $n \in \mathbb{N}^*$, où les $(a_i)_{0\leqslant i\leqslant n-1}$ sont non tous nuls.
On pose

$$\mathrm{P}_1 = a_n\mathrm{X}^n + \sum_{k=0}^{n-2} a_k\mathrm{X}^k.$$

On se propose de montrer que les racines de P appartiennent à $\mathcal{D}_0 \cup \mathcal{D}_1$, où $\mathcal{D}_0$ et $\mathcal{D}_1$ sont les disques définis par :

$$\mathcal{D}_0 = \{z \in \mathbb{C},\ |z| \leqslant \rho(\mathrm{P}_1)\} \quad \text{et} \quad \mathcal{D}_1 = \left\{z \in \mathbb{C},\ \left|z + \frac{a_{n-1}}{a_n}\right| \leqslant \rho(\mathrm{P}_1)\right\}.$$

1. Montrer que $\rho(\mathrm{P}_1) \leqslant \rho(\mathrm{P})$.

2. Soit ζ une racine de P n'appartenant pas à $\mathcal{D}_0$. Montrer que :

$$|a_{n-1} + a_n\zeta| \leqslant \frac{1}{\rho(\mathrm{P}_1)^{n-1}} \sum_{k=0}^{n-2} |a_k|\,\rho(\mathrm{P}_1)^k = |a_n|\,\rho(\mathrm{P}_1).$$

3. Conclure.

4. Illustrer le résultat obtenu à l'aide du polynôme de la question **A.1.**

Inspiré de : Capes Externe de Mathématiques, 2009.

★ ★ ★ ★
★ ★ ★
★ ★
★