# CORRIGÉ DU DS°1

## EXERCICE 1 : (E3A PSI 2011)

**1.** Si $a$ est racine de $P$ alors $P(a) = 0$. Avec $(*)$, on a alors

$$P((a+1)^2 - 1) = P(a)P(a+2) = 0 \quad \text{et} \quad P((a-1)^2 - 1) = P(a-2)P(a) = 0$$

donc $(a+1)^2 - 1$ et $(a-1)^2 - 1$ sont racines de $P$.

**2.** **a)** On a $a_{n+1} = (a_n + 1)^2 - 1$ et si $a_n$ est racine de $P$, la question précédente montre qu'il en est de même pour $a_{n+1}$. Comme on suppose que c'est le cas pour $a_0$, une récurrence immédiate implique que tous les $a_n$ sont racines de $P$.

**b)** On a $a_{n+1}$ qui est $> 0$ quand $a_n$ l'est. Quand $a_0 > 0$, une récurrence immédiate donne alors que tous les $a_n$ sont $> 0$. On a alors $a_{n+1} - a_n = a_n^2 + a_n > 0$, et la suite $(a_n)$ croît strictement.

**c)** Si $P$ admet une racine $a_0 > 0$ alors, d'après le résultat précédent, les $a_n$ forment une infinité de racines distinctes pour $P$, ce qui contredit la non nullité du polynôme $P$ (un polynôme non nul n'admet qu'un nombre fini de racines).

**d)** Si $-1$ est racine de $P$ alors $(-1-1)^2 - 1 = 3$ l'est aussi ce qui est impossible d'après la question précédente. On a donc $P(-1) \neq 0$.

**e)** On prouve le résultat par récurrence sur $n$. Il est vrai pour $n = 0$ (car il s'écrit $a_0 + 1 = a_0 + 1$ !). Si on le suppose vérifié àun rang $n \in \mathbb{N}$ , on a alors

$$1 + a_{n+1} = (1 + a_n)^2 = ((1 + a_0)^{2^n})^2 = (1 + a_0)^{2^{n+1}}$$

ce qui montre le résultat au rang $n + 1$ et achève la récurrence.

**3.** *Première solution :*

Soit $a$ une racine complexe de $P$. On a alors $(a+1)^{2^n} - 1$ qui est, pour tout $n$, racine de $P$.

Si, par l'absurde, $|a+1| < 1$, la suite de terme général $(a+1)^{2^n}$ est de limite nulle, donc la suite $(a_n)$ a pour limite $-1$, et, $P$ étant continue, on a alors $P(-1) = \lim\limits_{n\to+\infty} P(a_n) = 0$ ce qui est faux. Ainsi, $|a+1| \geqslant 1$.

Si, par l'absurde, $|a+1| > 1$ alors $|1 + (a+1)^{2^n}| \geqslant |a+1|^{2^n} - 1 \to +\infty$ et on a donc une suite de racines de $P$ de module de plus en plus grand et donc une infinité de racines ce qui contredit $P \neq 0$. On a donc aussi $|a+1| \leqslant 1$.

*Deuxième solution :*

Puisque $P$ n'admet qu'un nombre fini de racines, la suite des nombres $a_n = (a+1)^{2^n} - 1$ ne prend qu'un nombre fini de valeurs. Il existe donc $n, m$ entiers distincts tels que $(a+1)^{2^n} = (a+1)^{2^m}$. Si l'on suppose $n > m$ par exemple, puisque $a + 1 \neq 0$ d'après **2.d**, on en déduit $(a+1)^{2^n - 2^m} = 1$ donc $a+1$ est une racine de l'unité, et, en particulier, $|a+1| = 1$.

**N.B :** La relation $|a-1| = 1$ se démontre de la même manière, en considérant cette fois-ci la suite $(b_n)$ définie par $b_0 = a$ et par la relation $b_{n+1} = b_n^2 - 2b_n$.

**4.** On suppose $P$ non constant. Il admet alors au moins une racine complexe, $a$. Son image dans le plan complexe doit être sur le cercle de centre $(-1, 0)$ de rayon $1$ (car $|a+1| = 1$)et sur le cercle de centre $(1, 0)$ de rayon $1$ (car $|a-1| = 1$).
On a donc nécessairement $a = 0$.

**5.** – Si $P$ est constant et vérifie $(*)$, alors $P = \lambda \in \mathbb{C}$ et $\lambda^2 = \lambda$, d'où $P = 0$ (exclu) ou $P = 1$.

– Sinon, P est scindé sur $\mathbb{C}$. D'après la question précédente, les seules solution envisageables sont les polynômes du type $P = \lambda X^d$ avec $d \in \mathbb{N}^*$ et $\lambda \neq 0$.

Réciproquement, pour $P = \lambda X^d$ avec $\lambda \neq 0$ et $d \in \mathbb{N}^*$, $P(X^2-1) = P(X-1)P(X+1)$ s'écrit $\lambda(X^2-1)^d = \lambda^2(X^2-1)^d$. Ceci n'a lieu (quand $\lambda \neq 0$) que pour $\lambda = 1$.

– En conclusion, les solutions sont donc les monômes $X^d$, avec $d \in \mathbb{N}$.

---

## EXERCICE 2 : (TPE MP 1985, épreuve pratique)

**1.** Posons $a = \alpha + i\beta$ et cherchons $z$ *réel* racine de P. Il vient, en considérant les parties réelle et imaginaire de l'équation $P(z) = 0$ :

$$\begin{cases} z^3 + \alpha z^2 - \alpha z - 1 = 0 \\ \beta(z^2 + z) = 0 \end{cases}.$$

– Si $\beta \neq 0$, puisque $z = 0$ ne peut être solution, on a nécessairement $z = -1$, et la première relation impose $\alpha = 1$, soit $a = 1 + i\beta$. L'équation $P(z) = 0$ s'écrit alors

$$z^3 + (1+i\beta)z^2 - (1-i\beta)z - 1 = 0 \quad \text{soit} \quad (z+1)(z^2 + i\beta z - 1) = 0.$$

L'équation $z^2 + i\beta z - 1 = 0$ ne peut avoir de solution réelle puisque $\beta \neq 0$.

Ainsi, lorsque $a = 1 + i\beta$ avec $\beta \neq 0$, l'équation possède une et une seule racine réelle.

– Si $\beta = 0$ c'est-à-dire si $a = \alpha$ est réel, on trouve $(z-1)(z^2 + (1+a)z + 1) = 0$, soit la racine réelle $z = 1$ éventuellement accompagnée d'une ou deux racines réelles selon le signe du discriminant $(1+a)^2 - 4 = (a-1)(a+3)$. Plus précisément :

$$\begin{cases} \text{si } a \in ]-3, 1[ \text{ alors } z = 1 \text{ est la seule racine réelle} \\ \text{si } a = -3, \text{ alors } z = 1 \text{ est racine triple} \\ \text{si } a = 1, \text{ alors } z = 1 \text{ est racine double et } z = -1 \text{ racine simple} \\ \text{si } a \notin [-3, 1], \ z = 1, \ z = -\frac{a+1 \pm \sqrt{a^2+2a-3}}{2} \text{ sont les racines réelles de P} \end{cases}$$

– *Conclusion :* L'équation admet (au moins) une racine réelle si et seulement si le point A appartient à la droite d'équation $x = 1$ ou à l'axe réel. Le nombre de ces racines réelles est précisé ci-dessus.

**2.** *Première méthode :*

Si $a$ est réel, on a vu que $z = 1$ est racine de P, donc P possède bien une racine de module 1. Sinon, posons $a = \rho e^{i\varphi}$ avec $\rho > 0$ et $\varphi \notin \pi\mathbb{Z}$, et cherchons $z = e^{i\theta}$ racine de P. En utilisant la formule $e^{i\alpha} - e^{i\beta} = e^{\frac{i(\alpha+\beta)}{2}}.2i\sin\frac{\alpha-\beta}{2}$, la relation $P(z) = 0$ s'écrit :

$$0 = 2ie^{\frac{3i\theta}{2}}\left[\sin\frac{3\theta}{2} + \rho\sin\left(\varphi + \frac{\theta}{2}\right)\right].$$

Introduisons alors la fonction $f(\theta) = \sin\frac{3\theta}{2} + \rho\sin\left(\varphi + \frac{\theta}{2}\right)$. Nous avons $f(0) = \rho\sin\varphi$ et $f(2\pi) = -\rho\sin\varphi$. Puisque $\rho\sin\varphi \neq 0$, $f$ s'annule pour $\theta \in ]0, 2\pi[$ en raison du théorème des valeurs intermédiaires et P admet $e^{i\theta}$ comme racine de module 1.

*Seconde méthode :*

Notons que

$$P\left(\frac{1}{\overline{z}}\right) = \frac{1}{\overline{z}^3}\left[1 + a\overline{z} - \overline{a}\,\overline{z}^2 - \overline{z}^3\right] = \frac{-1}{\overline{z}^3}\overline{P(z)}.$$

Si P n'a pas de racine de module 1, il a une racine $z_1$ et aussi la racine $z_2 = \dfrac{1}{\overline{z_1}} \neq z_1$, avec le même ordre de multiplicité (donc simple) ; l'une des deux (par exemple $z_1$) est de module strictement supérieur à 1 et l'autre de module strictement inférieur à 1. La dernière racine $z_3$ doit être de module 1 car sinon elle serait accompagnée d'une autre.

**3.** Pour $a=0$ le polynôme a pour racines $1, j, j^2$ de module 1.
Autrement, supposons que $z$ soit racine de P de module supérieur ou égal à $1+|a|$. On a donc $z(z^2+az-\overline{a})=1$, donc $1 \geqslant (1+|a|)\left|z^2+az-\overline{a}\right|$. En utilisant l'inégalité triangulaire $|x+y| \geqslant |x|-|y|$ on obtient :

$$1 \geqslant (1+|a|)\Big(|z|(|z|-|a|)-|a|\Big) \geqslant (1+|a|)(1+|a|-|a|) = 1+|a|$$

ce qui est impossible vu que $a$ n'est pas nul.

**4.** **a)** Nous calculons $a^2 = \dfrac{1-7+2i\sqrt{7}}{4} = \dfrac{-3+i\sqrt{7}}{2} = a-2$. Il vient ensuite $a^3 = a(a-2) = a-2-2a = -a-2$, puis $a^4 = (a-2)^2 = a-2-4a+4 = 2-3a$.
D'autre part, $\overline{a} = 1-a$ conduit à $\overline{a}^2 = -1-a, \overline{a}^3 = a-3, \overline{a}^4 = 3a-1$.

**b)** Les calculs qui précèdent permettent de poser explicitement la division euclidienne de $\mathrm{P}(\mathrm{X}^2)$ par P.

$$\begin{array}{ccccccc|l}
\mathrm{X}^6 & & +a\mathrm{X}^4 & & -(1-a)\mathrm{X}^2 & & -1 & \mathrm{X}^3 + a\mathrm{X}^2 - (1-a)\mathrm{X} - 1 \\ \cline{8-8}
-\big(\mathrm{X}^6 & +a\mathrm{X}^5 & -(1-a)\mathrm{X}^4 & -\mathrm{X}^3\big) & & & & \mathrm{X}^3 - a\mathrm{X}^2 + (a-1)\mathrm{X} + 1 \\ \cline{1-4}
 & -a\mathrm{X}^5 & +\mathrm{X}^4 & +\mathrm{X}^3 & -(1-a)\mathrm{X}^2 & & -1 & \\
 & -\big(-a\mathrm{X}^5 & -a^2\mathrm{X}^4 & +a(1-a)\mathrm{X}^3 & +a\mathrm{X}^2\big) & & & \\ \cline{2-5}
 & & \underbrace{(1+a^2)}_{=a-1}\mathrm{X}^4 & +\underbrace{(1-a+a^2)}_{=-1}\mathrm{X}^3 & -\mathrm{X}^2 & & -1 & \\
 & & -\big((a-1)\mathrm{X}^4 & +(a^2-a)\mathrm{X}^3 & +(1-a)^2\mathrm{X}^2 & +(1-a)\mathrm{X}\big) & & \\ \cline{3-6}
 & & & \underbrace{(-1+a-a^2)}_{=1}\mathrm{X}^3 & +\underbrace{(-(1-a)^2-1)}_{=a}\mathrm{X}^2 & +(a-1)\mathrm{X} & -1 & \\
 & & & -\big(\mathrm{X}^3 & +a\mathrm{X}^2 & -(1-a)\mathrm{X} & -1\big) & \\ \cline{4-7}
 & & & & & & 0 &
\end{array}$$

On a donc la relation :

$$\mathrm{P}(\mathrm{X}^2) = -\mathrm{P}(\mathrm{X})\mathrm{P}(-\mathrm{X}).$$

**c)** En conséquence, si $\lambda$ est racine de P, $\lambda^2$ puis $\lambda^4$ le sont aussi.

On ne peut pas avoir $\lambda = \lambda^2$, car cela donnerait $\lambda = 0$ ou $\lambda = 1$, qui ne sont pas racines de P. On n'aura pas davantage $\lambda^2 = \lambda^4$, pour la même raison. Enfin, $\lambda = \lambda^4$ amènerait $\lambda = 0$ (exclu) ou $\lambda^3 = 1$ qui obligerait à avoir $a\lambda^2 - \overline{a}\lambda = a\overline{\lambda} - \overline{a}\lambda = 0$, soit $\overline{a}\lambda \in \mathbb{R}$. Mais alors $\overline{a}^3 = (\overline{a}\lambda)^3 = a-3$ serait réel, ce qui n'est pas.

Ainsi, les trois racines <u>distinctes</u> de P sont bien $\lambda$, $\mu = \lambda^2$ et $\nu = \lambda^4$. Leur produit est l'opposé du coefficient constant de P, soit $\lambda^7 = 1$.

Posons alors $\omega = \mathrm{e}^{\frac{2\mathrm{i}\pi}{7}}$. Nous avons essentiellement deux choix possibles pour les racines de P : $\omega, \omega^2, \omega^4$ et $\omega^3, \omega^5, \omega^6$.

Or, la somme des racines de P vaut $-a = -\dfrac{1+\mathrm{i}\sqrt{7}}{2}$, de partie imaginaire négative, et :

$$\mathscr{I}m(\omega+\omega^2+\omega^4) = \sin\frac{2\pi}{7} + \sin\frac{4\pi}{7} + \sin\frac{8\pi}{7} = \sin\frac{2\pi}{7} + \sin\frac{4\pi}{7} - \sin\frac{\pi}{7} > 0 \quad \text{car} \quad \sin\frac{2\pi}{7} > \sin\frac{\pi}{7},$$

ce qui ne nous convient pas. Donc, $\lambda$ vaut $\omega^3 = \mathrm{e}^{\frac{6\mathrm{i}\pi}{7}}$, et les racines de P sont $\omega^3, \omega^5, \omega^6$.

**5.** Soit un polynôme Q du troisième degré à coefficients complexes, unitaire, tel que $Q(X^2)$ soit divisible par $Q(X)$.

Si $\lambda$ est racine de Q, il en est donc de $\lambda^2$, puis de $\lambda^4$ etc... Puisqu'il n'y a que trois racines, on doit alors avoir soit $\lambda = \lambda^2$ soit $\lambda = \lambda^4$ soit $\lambda = \lambda^8$, ce qui donne comme possibilités $\lambda \in \{0, 1, j, j^2, \omega, \omega^2, \omega^3, \omega^4, \omega^5, \omega^6\}$.

Avec les racines septièmes on obtient les polynômes P et $\overline{P}$ (les racines de P étant $\omega^3, \omega^5$ et $\omega^6$ et celles de $\overline{P}$ en étant les conjuguées, c'est-à-dire $\omega, \omega^2$ et $\omega^4$).

Autrement, avec la racine $j$ vient toujours $j^2$ et vice-versa. On a alors les polynômes $(X-1)(X^2+X+1) = X^3-1$ (convient car $X^6-1 = (X^3-1)(X^3+1)$) et $X(X^2+X+1)$ (convient : $P(X^2) = X^2(X^4+2X^2+1-X^2) = X^2(X^2-X+1)(X^2+$ ainsi que les polynômes comme $(X-j)^2(X-j^2)$ : il ne convient pas car $(X^2-j)^2(X^2-j^2) = (X^2-j^4)^2(X^2-j^2) = (X-$ n'a pas de racine double.

Il reste ensuite les polynômes n'ayant que 0 ou/et 1 comme racines : $X(X-1)^2$, $X^2(X-1)$, $X^3$ et $(X-1)^3$, qui conviennent bien comme on le vérifie facilement.

En conclusion :

$$\boxed{\begin{array}{c}\text{Les polynômes Q de degré 3, unitaires, tels que Q divise } Q(X^2) \text{ sont :}\\ X^3,\ (X-1)^3,\ X^3-1,\ X^3+X^2+X,\ X(X-1)^2,\ X^2(X-1),\ P \text{ et } \overline{P}.\end{array}}$$

---

# PROBLÈME : Localisation des racines d'un polynôme

*Question préliminaire :*

- Il est facile de vérifier que, si $z_i = \lambda_i z_n$ avec $\lambda_i$ réel positif pour tout $i$, alors on a bien la relation $\left|\sum_{i=1}^{n} z_i\right| = \sum_{i=1}^{n} |z_i|$.
- Démontrons la réciproque par récurrence sur $n$.
  - ∗ pour $n = 2$, il s'agit d'un résultat classique de Sup. Redémontrons-le :

    Supposons donc $|z_1 + z_2| = |z_1| + |z_2|$ avec $z_2 \neq 0$. Alors : $|z_1 + z_2|^2 = \Big[|z_1| + |z_2|\Big]^2$ d'où :

$$\begin{aligned}(z_1 + z_2)\overline{(z_1 + z_2)} &= |z_1|^2 + |z_2|^2 + 2|z_1||z_2|\\ |z_1|^2 + z_1\overline{z_2} + \overline{z_1}z_2 + |z_2|^2 &= |z_1|^2 + |z_2|^2 + 2|z_1||z_2|\\ \mathcal{R}e(z_1\overline{z_2}) &= |z_1||z_2| = |z_1\overline{z_2}|\end{aligned}$$

    ce qui équivaut à : $z_1\overline{z_2} \in \mathbb{R}_+$. Il existe donc $\lambda$ réel positif tel que $z_1\overline{z_2} = \lambda$, soit $z_1 = \dfrac{\lambda}{\overline{z_2}} = \dfrac{\lambda}{|z_2|^2} z_2 = \mu z_2$ avec $\mu$ réel positif, ce qui établit le résultat.
  - ∗ Supposons donc le résultat démontré à l'ordre $n$, et soient $z_1, \dots, z_n, z_{n+1}$ tels que $z_{n+1} \neq 0$ et $|z_1 + \cdots + z_{n+1}| = |z_1| + \cdots |z_{n+1}|$. Alors :
    - ⋄ $|z_1 + \cdots + z_n| = |z_1| + \cdots |z_n|$ ;

      en effet, on a $|z_1 + \cdots + z_n| \leqslant |z_1| + \cdots |z_n|$ par l'inégalité triangulaire, et si on avait l'inégalité stricte $|z_1 + \cdots + z_n| < |z_1| + \cdots |z_n|$, on aurait alors $|z_1 + \cdots + z_{n+1}| \leqslant |z_1 + \cdots + z_n| + |z_{n+1}| < |z_1| + \cdots + |z_{n+1}|$, ce qui est contraire à l'hypothèse. Donc :

      – Si $z_1, \dots, z_n$ sont tous nuls, le résultat est acquis !

      – Sinon, il existe au moins un des $z_i$ $(1 \leqslant i \leqslant n)$ qui est non nul. Supposons, quitte à changer l'ordre des termes, qu'il s'agisse de $z_n$. Alors, d'après l'hypothèse de récurrence, il existe des réels positifs $\lambda_i$ $(1 \leqslant i \leqslant n-1)$ tels que $z_i = \lambda_i z_n$ pour $i \in [\![1, n-1]\!]$.

◇ On a aussi : $|z_1+\cdots+z_{n+1}| = |z_1+\cdots+z_n|+|z_{n+1}|$ ;

en effet, on a déjà l'inégalité large $|z_1+\cdots+z_{n+1}| \leqslant |z_1+\cdots+z_n|+|z_{n+1}|$ par l'inégalité triangulaire, et si on avait l'inégalité stricte, on aurait $|z_1+\cdots+z_{n+1}| < |z_1+\cdots+z_n|+|z_{n+1}| = |z_1|+\cdots+|z_n|+|z_{n+1}|$, ce qui est faux.

D'après le résultat obtenu à l'ordre 2, il existe un réel $\mu \geqslant 0$ tel que $z_1+\cdots+z_n = \mu z_{n+1}$.

On a alors : $\left(1+\sum_{i=1}^{n-1}\lambda_i\right)z_n = \mu z_{n+1}$ d'où $z_n = \underbrace{\dfrac{\mu}{1+\sum_{i=1}^{n-1}\lambda_i}}_{\text{réel } \geqslant 0} z_{n+1}$ et, pour $i \in [\![1, n-1]\!]$,

$z_i = \underbrace{\dfrac{\lambda_i\mu}{1+\sum_{i=1}^{n-1}\lambda_i}}_{\text{réel } \geqslant 0} z_{n+1}$. Cela établit le résultat à l'ordre $n+1$, et achève la récurrence.

*Problème :*

## Partie A.

### 1. Exemple numérique

**1.1** $x$ est une racine réelle de P si et seulement si $x^3+(-2+3\mathrm{i})x^2+(-3-5\mathrm{i})x+(6-2\mathrm{i}) = 0$. En séparant les parties réelle et imaginaire de l'équation on obtient :

$$\begin{cases} x^3-2x^2-3x+6=0 \\ \quad 3x^2-5x-2=0 \end{cases}$$

La deuxième équation admet comme racines 2 et $-\dfrac{1}{3}$, mais seul 2 est aussi racine de la première.

La seule racine réelle de P est donc 2.

**1.2** Cette équation du second degré a pour discriminant $\Delta = 3-4\mathrm{i} = (2-\mathrm{i})^2$ ; on en déduit que ses deux racines sont $z_1 = -1-\mathrm{i}$ et $z_2 = 1-2\mathrm{i}$.

**1.3** La factorisation de P s'écrit : $\mathrm{P} = (\mathrm{X}-2)(x^2+3\mathrm{i}\mathrm{X}-3+\mathrm{i})$. Les trois racines de P sont donc 2, $-1-\mathrm{i}$ et $1-2\mathrm{i}$, de modules respectifs 2, $\sqrt{2}$ et $\sqrt{5}$. Ces trois valeurs sont bien toutes inférieures à $\mathrm{A} = \max\{|a_0|, 1+|a_1|, 1+|a_2|\} = \max\left\{2\sqrt{10}, 1+\sqrt{34}, 1+\sqrt{13}\right\} = 1+\sqrt{34}$.

### 2. Étude du cas général

**2.1** Soit $f$ l'application définie sur $\mathbb{R}_+^*$ par :

$$f(x) = \frac{\mathrm{R}(x)}{x^n} = 1 - \frac{|a_{n-1}|}{x} - \frac{|a_{n-2}|}{x^2} - \cdots - \frac{|a_1|}{x^{n-1}} - \frac{|a_0|}{x^n}.$$

Alors $f$ est de classe $\mathscr{C}^\infty$ sur $\mathbb{R}_+^*$ et

$$\forall x > 0\ ,\ f'(x) = \frac{|a_{n-1}|}{x^2} + \cdots + \frac{(n-1)|a_1|}{x^n} + \frac{n|a_0|}{x^{n+1}} \quad \text{donc} \quad f'(x) > 0.$$

$f$ est donc strictement croissante sur $\mathbb{R}_+^*$. De plus, $f(x) \underset{x\to 0^+}{\sim} -\dfrac{|a_0|}{x^n}$ donc $\lim\limits_{x\to 0^+} f(x) = -\infty$, et $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = 1$. On a donc le tableau de variations suivant :

| $x$ | $0$ | $r$ | $+\infty$ |
|---|---|---|---|
| $f(x)$ | $-\infty$ | $\nearrow$ $0$ $\nearrow$ | $1$ |

Le théorème de bijection assure alors l'existence et l'unicité d'une racine $r$ de $f$ sur $\mathbb{R}_+^*$, qui est aussi celle de $\mathrm{R}$.

De plus, puisque $f$ et $\mathrm{R}$ sont de mêmes signes, on obtient aussi le signe de $\mathrm{R}$ :

$$\begin{cases} \mathrm{R}(x) < 0 & \text{si } x \in ]0, r[ \\ \mathrm{R}(x) > 0 & \text{si } x > r \end{cases}.$$

**2.2** Par définition de A, on a $|a_0| \leqslant \mathrm{A}$ et $|a_i| \leqslant \mathrm{A}-1$ pour $i \in [\![1, n-1]\!]$. On en déduit :

$$\forall x \geqslant 0\ ,\ \mathrm{R}(x) \geqslant x^n - (\mathrm{A}-1)x^{n-1} - \cdots - (\mathrm{A}-1)x - \mathrm{A}$$

et en particulier : $\mathrm{R}(\mathrm{A}) \geqslant \mathrm{A}^n - (\mathrm{A}-1)\left[\mathrm{A}^{n-1} + \cdots + \mathrm{A}\right] - \mathrm{A}$.
Si $\mathrm{A} = 1$, on trouve bien $\mathrm{R}(\mathrm{A}) \geqslant 0$ et sinon :

$$\mathrm{R}(\mathrm{A}) \geqslant \mathrm{A}^n - (\mathrm{A}-1)\mathrm{A}\frac{\mathrm{A}^{n-1}-1}{\mathrm{A}-1} - \mathrm{A} = 0 \quad \text{(somme des termes d'une suite géométrique de raison } \mathrm{A} > 1)$$

Ainsi $\mathrm{R}(\mathrm{A}) \geqslant 0$, d'où $r \leqslant \mathrm{A}$ d'après l'étude de signes précédente.

**2.3**
- $|\mathrm{S}(z)| = \left|z^n + a_{n-1}z^{n-1} + \cdots + a_1 z + a_0\right| \geqslant |z^n| - \left|a_{n-1}z^{n-1} + \cdots + a_1 z + a_0\right|$ (d'après l'inégalité triangulaire $\left|x+y\right| \geqslant |x| - \left|y\right|$).
  Puisque $\left|a_{n-1}z^{n-1} + \cdots + a_1 z + a_0\right| \leqslant |a_{n-1}||z|^{n-1} + \cdots + |a_1||z| + |a_0|$, on en déduit
  $$|\mathrm{S}(z)| \geqslant |z^n| - |a_{n-1}||z|^{n-1} - \cdots - |a_1||z| - |a_0|$$
  c'est-à-dire : $|\mathrm{S}(z)| \geqslant \mathrm{R}(|z|)$.
- Si $z$ est racine de S, on a alors ,$\mathrm{S}(z) = 0$ d'où $\mathrm{R}(|z|) \leqslant 0$. L'étude du signe de R permet alors d'en déduire : $|z| \leqslant r$.
- Cela permet d'en déduire, puisque $r \leqslant \mathrm{A}$, que les racines de S sont toutes situées dans le disque de centre O et de rayon A.

**2.4** • Soit $z$ une racine de S telle que $|z| = r$ (s'il en existe). On a alors $\mathrm{S}(z) = \mathrm{R}(|z|) = 0$ donc les inégalités écrites ci-dessus sont en fait des égalités. On a donc en particulier :

$$\left|a_{n-1}z^{n-1} + \cdots + a_1 z + a_0\right| = |a_{n-1}||z|^{n-1} + \cdots + |a_1||z| + |a_0|.$$

Puisque $a_{n-1} \neq 0$ et $z \neq 0$ ($0$ n'est pas racine de S puisque $a_0 \neq 0$ par hypothèse), on déduit du résultat de la question préliminaire qu'il existe des réels $\lambda_i$ positifs tels que $a_i z^i = \lambda_i a_{n-1} z^{n-1}$ pour $1 \leqslant i \leqslant n-2$.
Comme d'autre part $z^n = -a_{n-1}z^{n-1} - \cdots - a_1 z - a_0$ (puisque $\mathrm{S}(z) = 0$), on a :

$$z^n = -\left(1 + \sum_{i=0}^{n-2} \lambda_i\right) a_{n-1} z^{n-1} = -\mu a_{n-1} z^{n-1} \quad (\text{en posant } \mu = 1 + \sum_{i=0}^{n-2} \lambda_i)$$

d'où $z = -\mu a_{n-1}$ ; et puisque $|z| = r$ et $\mu > 0$, on a nécessairement $\mu = \dfrac{r}{|a_{n-1}|}$ d'où nécessairement : $z = -r\dfrac{a_{n-1}}{|a_{n-1}|}$, et $z$ est donc unique.

• Ce résultat peut tomber en défaut si l'on ne suppose plus $a_{n-1} \neq 0$ : considérer par exemple $\mathrm{S}(z) = z^n - 1$ ...

## Partie B

**1.** On calcule :

$$\begin{aligned} S &= \frac{1}{\alpha_n}(X-1)P = X^{n+1} - \frac{\alpha_n - \alpha_{n-1}}{\alpha_n}X^{n-1} - \cdots - \frac{\alpha_1 - \alpha_0}{\alpha_n}X - \frac{\alpha_0}{\alpha_n} \\ &= X^{n+1} - a_n X^n - \cdots - a_1 X - a_0 \end{aligned}$$

où les $a_i$ sont tous $\geqslant 0$ et $a_0 \neq 0$.

En reprenant les notations précédentes (avec $n+1$ à la place de $n$), on a ici $R = S$, et puisque $1$ est racine évidente de $S$, on a $r = 1$ (car $S$ admet une unique racine positive). Toute racine complexe de $P$, étant racine de $S$, est donc de module inférieur ou égal à $1$ d'après le résultat obtenu à la question **A.2.3**.

De plus, si $\alpha_{n-1} < \alpha_n$, on aura $a_n \neq 0$, et d'après résultat obtenu à la question **A.2.4**, le polynôme $S$ possède au plus une racine complexe de module égal à $1$ ; mais cette racine, c'est $1$ ! Donc les autres racines complexes de $S$, c'est-à-dire celles de $P$ puisque $P(1) \neq 0$, ont un module strictement inférieur à $1$.

**2.**
- $Q(\gamma X) = \alpha_n X^n + \alpha_{n-1}X^{n-1} + \ldots + \alpha_1 X + \alpha_0$, avec $\alpha_i = \gamma^i a_i$ pour $i \in [\![0,n]\!]$. Les $\alpha_i$ sont bien des réels strictement positifs ; de plus, pour $i \in [\![1,n]\!]$, l'inégalité $\dfrac{a_{i-1}}{a_i} \leqslant \gamma$ (qui découle de la simple définition de $\gamma$), implique $\gamma^{i-1}a_{i-1} \leqslant \gamma^i a_i$, soit $\alpha_{i-1} \leqslant \alpha_i$.
  On peut donc appliquer au polynôme $Q(\gamma X)$ les résultats de la question précédente : si $z'$ est une racine de ce polynôme, c'est-à-dire si $Q(\gamma z') = 0$, on aura $|z'| \leqslant 1$. Donc, si $z$ est une racine de $Q$, en prenant $z' = \dfrac{z}{\gamma}$, on en déduit $\left|\dfrac{z}{\gamma}\right| \leqslant 1$, soit : $|z| \leqslant \gamma$.
- $X^n Q\left(\dfrac{\beta}{X}\right) = \alpha_n X^n + \alpha_{n-1}X^{n-1} + \ldots + \alpha_1 X + \alpha_0$, avec ici $\alpha_i = a_{n-i}\beta^{n-i}$ pour $i \in [\![0,n]\!]$. Les $\alpha_i$ sont bien des réels strictement positifs ; de plus, pour $i \in [\![1,n]\!]$, l'inégalité $\beta \leqslant \dfrac{a_{n-i}}{a_{n-i+1}}$, qui résulte de la définition de $\beta$, implique $\beta^{n-i+1}a_{n-i+1} \leqslant \beta^{n-i}a_{n-i}$ soit $\alpha_{i-1} \leqslant \alpha_i$.
  On peut donc appliquer au polynôme $X^n Q\left(\dfrac{\beta}{X}\right)$ les résultats de la question précédente : si $z'$ est une racine de ce polynôme, c'est-à-dire si $Q\left(\dfrac{\beta}{z'}\right) = 0$ ($z'$ ne peut être nul), on aura $|z'| \leqslant 1$. Donc, si $z$ est une racine de $Q$, en prenant $z' = \dfrac{\beta}{z}$ ($z$ ne peut être nul), on en déduit $\left|\dfrac{\beta}{z}\right| \leqslant 1$, soit : $|z| \geqslant \beta$.

## Partie C

**1.** Il suffit d'appliquer directement le résultat de la question **A.2.1** au polynôme $S = \dfrac{1}{a_n}P$.

**2.** De même, on applique ici le résultat de la question **A.2.3**.

**3.** **3.1** On a :

$$P = a_n(X-\zeta_1)(X-\zeta_2)\ldots(X-\zeta_n) = a_n(X^n - \sigma_1 X^{n-1} + \sigma_2 X^{n-2} - \cdots + (-1)^n\sigma_n)$$

où les $\sigma_k$ sont les fonctions symétriques élémentaires des racines :

$$\sigma_1 = \sum_{i=1}^n \zeta_i \quad , \quad \sigma_2 = \sum_{1 \leqslant i < j \leqslant n} \zeta_i\zeta_j \quad , \quad \sigma_k = \sum_{1 \leqslant i_1 < i_2 < \cdots < i_k \leqslant n} \zeta_{i_1}\zeta_{i_2}\ldots\zeta_{i_k} \quad , \quad \sigma_n = \zeta_1\zeta_2\ldots\zeta_n .$$

Dans la somme définissant $\sigma_k$, il y a $\dbinom{n}{k}$ termes de la forme $\zeta_{i_1}\zeta_{i_2}\ldots\zeta_{i_k}$, et l'on a $\left|\zeta_{i_1}\zeta_{i_2}\ldots\zeta_{i_k}\right| \leqslant |\zeta_n|^k$, donc $|\sigma_k| \leqslant \dbinom{n}{k}|\zeta_n|^k$.

Et puisque $a_k = (-1)^{n-k}a_n\sigma_{n-k}$, on en déduit :

$$\left|\frac{a_k}{a_n}\right| = |\sigma_{n-k}| \leqslant \binom{n}{n-k}|\zeta_n|^{n-k} = \binom{n}{k}|\zeta_n|^{n-k} .$$

**3.2** Par définition, $\rho(\mathrm{P})$ est solution de l'équation $\displaystyle\sum_{k=0}^{n-1}|a_k|x^k = |a_n|x^n$, donc :

$$\rho(\mathrm{P})^n = \sum_{k=0}^{n-1}\frac{|a_k|}{|a_n|}\rho(\mathrm{P})^k \leqslant \sum_{k=0}^{n-1}\binom{n}{k}|\zeta_n|^{n-k}\rho(\mathrm{P})^k.$$

**3.3** La formule du binôme donne alors directement :

$$\rho(\mathrm{P})^n \leqslant \left[\rho(\mathrm{P})+\zeta_n\right]^n - \rho(\mathrm{P})^n$$

d'où

$$2\rho(\mathrm{P})^n \leqslant \left[\rho(\mathrm{P})+\zeta_n\right]^n - \rho(\mathrm{P})^n \quad \text{puis} \quad \sqrt[n]{2}\rho(\mathrm{P}) \leqslant \rho(\mathrm{P})+\zeta_n$$

soit enfin : $|\zeta_n| \geqslant \left(\sqrt[n]{2}-1\right)\rho(\mathrm{P})$.

**3.4** On vérifie facilement que $\mathrm{P}(\mathrm{X}) = \mathrm{X}^n\mathrm{Q}\left(\dfrac{1}{\mathrm{X}}\right)$. Les racines de Q sont donc les $\dfrac{1}{\zeta_k}$. Puisque 0 n'est pas racine de P, le coefficient dominant de Q est $a_0 \neq 0$, donc on peut appliquer à Q le résultat de la question précédente. Le plus grand des modules des racines de Q étant $\dfrac{1}{|\zeta_1|}$, on aura :

$$\left(\sqrt[n]{2}-1\right)\rho(\mathrm{Q}) \leqslant \frac{1}{|\zeta_1|} \leqslant \rho(\mathrm{Q})$$

ce qui donne directement le résultat demandé.

**4.** Dans le cas du polynôme $\mathrm{P} = \mathrm{X}^3+(-2+3i)\mathrm{X}^2+(-3-5i)\mathrm{X}+(6-2i)$, $\rho(\mathrm{P})$ est l'unique solution positive de l'équation : $x^3-\sqrt{13}x^2-\sqrt{34}x-2\sqrt{10}=0$. MAPLE® donne $\rho(\mathrm{P}) \approx 5{,}019$, et le plus grand module des trois racines vaut $\sqrt{5} \approx 2{,}236$ : cela illustre le résultat de la question **C.2**.

On a aussi $(\sqrt[3]{2}-1)\rho(\mathrm{P}) \approx 1{,}304$, ce qui illustre la question **C.3.3**.

## Partie D

**1.** Par définition, $\rho(\mathrm{P})$ est l'unique racine positive de la fonction $f : x \mapsto |a_n|x^n - \displaystyle\sum_{k=0}^{n-1}|a_k|x^k$, et nous avons vu que $f$ est négative sur $[0,\rho(\mathrm{P})]$ et positive sur $[\rho(\mathrm{P}),+\infty[$.

Or $\rho(\mathrm{P}_1)$ est solution de l'équation $|a_n|x^n = \displaystyle\sum_{k=0}^{n-2}|a_k|x^k$, donc $f\big(\rho(\mathrm{P}_1)\big) = -|a_{n-1}|\rho(\mathrm{P}_1)^{n-1}$ est négatif : cela prouve que $\rho(\mathrm{P}_1) \leqslant \rho(\mathrm{P})$.

**2.** Si $\zeta$ est racine de P, on a :

$$a_n\zeta^n + a_{n-1}\zeta^{n-1} = -\sum_{k=0}^{n-2}a_k\zeta^k,$$

donc :

$$\left|a_n\zeta^n + a_{n-1}\zeta^{n-1}\right| \leqslant \sum_{k=0}^{n-2}|a_k||\zeta|^k$$

puis

$$|a_n\zeta + a_{n-1}| \leqslant \sum_{k=0}^{n-2}|a_k|\frac{1}{|\zeta|^{n-1-k}}.$$

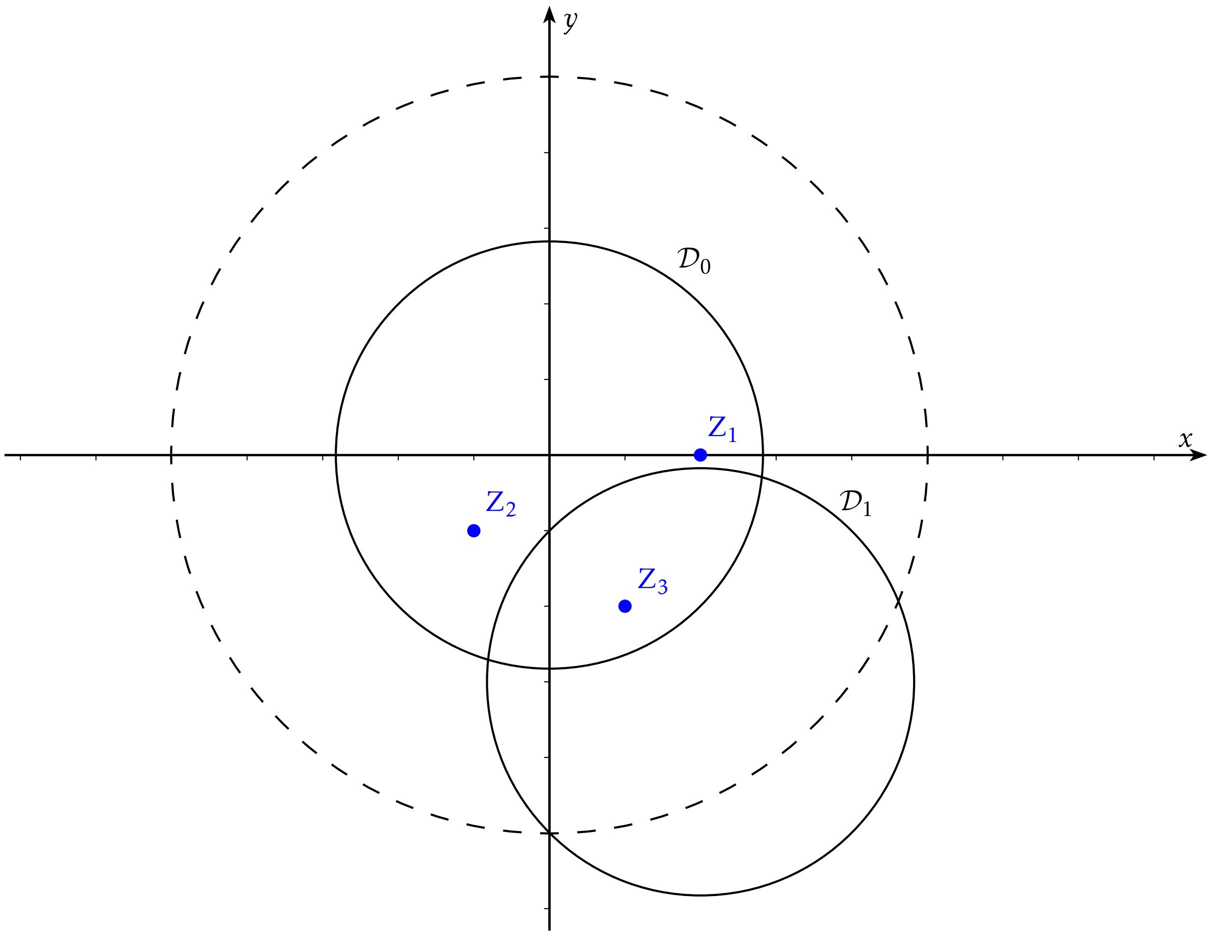
Donc, si $\zeta$ n'appartient pas à $\mathcal{D}_0$, on a $|\zeta| > \rho(\mathrm{P}_1)$, d'où

$$|a_n\zeta + a_{n-1}| \leqslant \sum_{k=0}^{n-2}|a_k|\frac{1}{\rho(\mathrm{P}_1)^{n-1-k}} = \frac{1}{\rho(\mathrm{P}_1)^{n-1}}\sum_{k=0}^{n-2}|a_k|\rho(\mathrm{P}_1)^k = |a_n|\rho(\mathrm{P}_1).$$

**3.** On en déduit que, si $\zeta$ est une racine de P qui n'appartient pas à $\mathcal{D}_0$, on a $\left|\zeta + \dfrac{a_{n-1}}{a_n}\right| \leqslant \rho(P_1)$, c'est-à-dire que $\zeta$ appartient alors à $\mathcal{D}_1$.

**4.** Dans le cas du polynôme $P = X^3 + (-2+3i)X^2 + (-3-5i)X + (6-2i)$, on a $P_1 = X^3 + (-3-5i)X + (6-2i)$ et $\rho(P_1)$ est l'unique racine positive de l'équation $x^3 - \sqrt{34}x - 2\sqrt{10} = 0$. MAPLE® donne : $\rho(P_1) \approx 2,83881$. On a ici : $\dfrac{a_{n-1}}{a_n} = -2+3i$, donc $\mathcal{D}_0$ est le disque de ventre O et de rayon $\rho(P_1)$ et $\mathcal{D}_1$ celui de centre le point de coordonnées $(2,-3)$ et de même rayon.

Sur la figure ci-dessous, nous avons représenté ces deux disques, ainsi que celui de centre O et de rayon $\rho(P) =\approx 5,019$ (en pointillés) donné par la question **C.2.** Nous avons également fait figurer les images des racines $z_1, z_2$ et $z_3$.




⋆ ⋆ ⋆ ⋆
⋆ ⋆ ⋆
⋆ ⋆
⋆