CORRIGÉ DM N°1 (d'après ENSI 1992, épreuve pratique)

PARTIE A : Nombre de racines réelles d'un polynôme

1. a) Si $\lambda > 0$, $V(\lambda_0 a_0, \lambda_1 a_1, \dots, \lambda_n a_n) = V(a_0, a_1, \dots, a_n)$. En effet, cela est vrai si tous les a_i sont nuls ; sinon, soit $(a'_0, \dots, a'_m)$ la suite obtenue à partir de $(a_0, \dots, a_n)$ en retirant les termes nuls, et $(\varepsilon_0, \dots, \varepsilon_m)$ comme dans l'énoncé.

Alors la suite obtenue à partir de $(\lambda_0 a_0, \lambda_1 a_1, \dots, \lambda_n a_n)$ en retirant les termes nuls est $(\lambda_0 a'_0, \dots, \lambda_m a'_m)$, et les ε_i associés sont inchangés puisque $\lambda > 0$. La somme $\dfrac{1}{2}\sum_{i=1}^{m} \left|\varepsilon_i - \varepsilon_{i-1}\right|$ est donc inchangée.

Si $\lambda < 0$, les ε_i sont changés en leur opposés, mais là encore, la somme est inchangée à cause des valeurs absolues.

b) Puisque $a_r \neq 0$, la suite $(a'_0, \dots, a'_m)$ obtenue à partir de $(a_0, \dots, a_n)$ en retirant les termes nuls contiendra encore a_r, que l'on notera par exemple a'_s.

On a alors $V(a_0, a_1, \dots, a_r) = V(a'_0, \dots, a'_s) = \dfrac{1}{2}\sum_{i=1}^{s} \left|\varepsilon_i - \varepsilon_{i-1}\right|$ et $V(a_r, a_{r+1}, \dots, a_n) = V(a'_s, \dots, a'_m) = \dfrac{1}{2}\sum_{i=s+1}^{n} \left|\varepsilon_i - \varepsilon_{i-1}\right|$, où les ε_i sont construits comme dans l'énoncé à partir de la suite $(a'_0, \dots, a'_m)$.

Or $\dfrac{1}{2}\sum_{i=1}^{s} \left|\varepsilon_i - \varepsilon_{i-1}\right| + \dfrac{1}{2}\sum_{i=s+1}^{m} \left|\varepsilon_i - \varepsilon_{i-1}\right| = \dfrac{1}{2}\sum_{i=1}^{m} \left|\varepsilon_i - \varepsilon_{i-1}\right|$, ce qui donne l'égalité cherchée.

c) On peut ici supposer tous les a_i non nuls, puisque la suite obtenue en supprimant les termes nuls éventuels commencera encore par a_0 et finira encore par a_n, puisqu'on suppose ici $a_0 a_n \neq 0$.

Soit alors $(\varepsilon_0, \dots, \varepsilon_n)$ comme dans l'énoncé. Pour tout $i \in [\![1, n]\!]$, $\dfrac{1}{2}\left|\varepsilon_i - \varepsilon_{i-1}\right|$ a la même parité que $\dfrac{1}{2}(\varepsilon_i - \varepsilon_{i-1})$, donc $V(a_0, \dots, a_n) = \dfrac{1}{2}\sum_{i=1}^{n} \left|\varepsilon_i - \varepsilon_{i-1}\right|$ a même parité que $\dfrac{1}{2}\sum_{i=1}^{n} \varepsilon_i - \varepsilon_{i-1}$, somme qui est égale à $\dfrac{1}{2}(\varepsilon_n - \varepsilon_0)$. Si a_0 et a_n sont de mêmes signes, $\varepsilon_n = \varepsilon_0$ et $V(a_0, \dots, a_n)$ est pair ; sinon, $\varepsilon_0 = -\varepsilon_n$ et $V(a_0, \dots, a_n)$ est impair.

2. a) Soit P de degré $n \in \mathbb{N}^*$ et de valuation r. On peut le factoriser ainsi :

$$P = a_n X^r \prod_i (X - \alpha_i) \prod_j (X - \beta_j) \prod_k Q_k$$

où les α_i sont les (éventuelles) racines strictement positives de P, les β_j les (éventuelles) racines strictement négatives, et les Q_k des (éventuels) trinômes toujours positifs.

En comparant les termes de plus bas degrés dans les deux expressions, on obtient $a_r = a_n \prod_i (-\alpha_i) \prod_j (-\beta_j) \prod_k Q_k(0)$. Les $-\beta_j$ et les $Q_k(0)$ étant positifs, le signe de $a_r a_n$ est celui de $\prod_i (-\alpha_i)$, donc est positif s'il y a un nombre pair de α_i et négatif sinon, ce qui répond à la question.

Si r est la valuation de P, on a $a_0 = \dots = a_{r-1} = 0$, donc $V(a_0, \dots, a_n) = V(a_r, \dots, a_n)$ qui est pair si $a_r a_n$ est positif et impair sinon, comme dans la question 1.c. Donc $V(a_0, \dots, a_n)$ a la même parité que le nombre de racines strictement positives (éventuelles) de P.

b) Soit m le nombre de racines réelles strictement positives de P, comptées avec leur ordre de multiplicité ; notons $x_1 < x_2 < \dots < x_k$ ces racines, chaque racine x_i étant d'ordre de multiplicité $\lambda_i \in \mathbb{N}^*$. Ainsi, $\sum_{i=1}^{k} \lambda_i = m$

Chaque x_i est aussi une racine de P′ d'ordre de multiplicité $\lambda_i - 1$ (en convenant de dire qu'une racine d'ordre de multiplicité 0 n'est pas une racine !). De plus, d'après le théorème de Rolle, P′ compte au moins une racine dans chaque intervalle $]x_i, x_{i+1}[$. Il y a donc au moins $(k-1) + \sum_{i=1}^{k} (\lambda_i - 1) = k - 1 + (m - k) = m - 1$ racines réelles strictement positives de P′. C'est l'inégalité demandée.

c) Procédons par récurrence sur le degré de P.

- Si $\deg P = 0$ alors $P = a_0$ et n'a pas de racine, donc l'inégalité $0 = \mathscr{R}(P, \mathbb{R}_+^*) \leqslant V(a_0) = 0$ est vérifiée !

- Supposons le résultat démontré pour tout polynôme de degré $\leqslant n-1$, et soit P de degré n. On a alors, en utilisant l'hypothèse de récurrence et la question précédente :
  $\mathcal{R}(\mathrm{P},\mathbb{R}_+^*) \leqslant \mathcal{R}(\mathrm{P}',\mathbb{R}_+^*)+1 \leqslant \mathrm{V}(a_1,2a_2,\dots,na_n)+1 = \mathrm{V}(a_1,\dots,a_n)+1$ (d'après 1.a) .
  Puisque, de façon évidente, $\mathrm{V}(a_0,a_1,\dots,a_n) \leqslant \mathrm{V}(a_1,\dots,a_n)$, on en déduit $\mathcal{R}(\mathrm{P},\mathbb{R}_+^*) \leqslant \mathrm{V}(a_0,a_1,\dots,a_n)+1$. Cependant, on ne peut avoir l'égalité $\mathcal{R}(\mathrm{P},\mathbb{R}_+^*) = \mathrm{V}(a_0,a_1,\dots,a_n)+1$, puisque cela contredirait le résultat obtenu en 2.a concernant la parité. On a donc forcément $\mathcal{R}(\mathrm{P},\mathbb{R}_+^*) \leqslant \mathrm{V}(a_0,a_1,\dots,a_n)$, ce qui établit le résultat à l'ordre n.

d) Il suffit d'appliquer le résultat précédent à $\mathrm{P}(-\mathrm{X})$!

e) — Lorsqu'on parcourt la suite $(a_0,\dots,a_n)$, si l'un au moins des a_i, a_{i+1} est nul, on ne compte pas de changement de signe ; il en sera donc de même entre $(-1)^i a_i$ et $(-1)^{i+1}a_{i+1}$. Sinon, s'il y a un changement de signe entre a_i et a_{i+1}, il n'y en a pas entre $(-1)^i a_i$ et $(-1)^{i+1}a_{i+1}$, et vice-versa. Donc $\mathrm{V}(a_0,a_1,\dots,a_n)+\mathrm{V}(a_0,-a_1,\dots,(-1)^n a_n)$ est au plus égal au nombre de couples (a_i,a_{i+1}), c'est-à-dire n.

— On suppose ici que P n'a que des racines réelles non nulles. On a donc :

$$n = \mathcal{R}(\mathrm{P},\mathbb{R}_-^*)+\mathcal{R}(\mathrm{P},\mathbb{R}_+^*) \underbrace{\leqslant}_{\text{d'après c) d)}} \mathrm{V}(a_0,a_1,\dots,a_n)+\mathrm{V}(a_0,-a_1,\dots,(-1)^n a_n) \underbrace{\leqslant}_{\text{quest. préc}} n$$

donc toutes les inégalités précédentes sont en fait des égalités, i.e :

$$\mathcal{R}(\mathrm{P},\mathbb{R}_+^*) = \mathrm{V}(a_0,a_1,\dots,a_n) \quad \text{et} \quad \mathcal{R}(\mathrm{P},\mathbb{R}_-^*) = \mathrm{V}(a_0,-a_1,\dots,(-1)^n a_n)$$

PARTIE B : Suites de Sturm

1. Si on multiplie par des coefficients positifs, on ne change ni le signe, ni les racines...

2.
- La suite des restes dans les divisions euclidiennes est une suite de polynômes dont les degrés forment une suite d'entiers naturels strictement décroissante. La division ne peut donc se produire indéfiniment !
- La suite des divisions euclidiennes peut s'écrire :

$$\begin{cases} \mathrm{P}_0 = \mathrm{Q}_1\mathrm{P}_1 - \mathrm{P}_2 \\ \mathrm{P}_1 = \mathrm{Q}_2\mathrm{P}_2 - \mathrm{P}_3 \\ \quad\vdots \\ \mathrm{P}_{m-2} = \mathrm{Q}_{m-1}\mathrm{P}_{m-1} - \mathrm{P}_m \\ \mathrm{P}_{m-1} = \mathrm{Q}_m\mathrm{P}_m \end{cases}$$

donc :
— P_m divise P_{m-1} (dernière ligne), donc il divise $\mathrm{Q}_{m-1}\mathrm{P}_{m-1}-\mathrm{P}_m$ i.e P_{m-2} donc il divise $\mathrm{Q}_{m-2}\mathrm{P}_{m-2}-\mathrm{P}_{m-1}$ i.e P_{m-3} etc.... Ainsi, par récurrence (non rédigée), P_m divise tous les P_k.
— Si un polynôme A divise P_0 et P_1, alors il divise P_2 (première ligne), donc il divise $\mathrm{P}_3 = \mathrm{Q}_2\mathrm{P}_2 - \mathrm{P}_1$ etc... Ainsi, par récurrence (non rédigée), A divise tous les P_k, et en particulier P_m.

3. **a)** Notons d'abord que les f_k sont bien des polynômes , puisque P_m divise tous les P_k.
Si a est une racine de f_0, c'est une racine de P puisque $\mathrm{P} = \mathrm{P}_m f_0$. Si cette racine est d'ordre de multiplicité m dans P, alors c'est une racine d'ordre $m-1$ dans P′, donc dans P_m (puisque $(\mathrm{X}-a)^{m-1}$ divise P et P′, il divise P_m) et c'est donc une racine simple de $f_0 = \dfrac{\mathrm{P}}{\mathrm{P}_m}$ Ainsi, f_0 a les mêmes racines que P, mais simples.

b) Si f_{k-1} et f_k avait une racine commune c, puisque $f_{k-1} = \mathrm{Q}_k f_k - f_{k+1}$ on aurait aussi c racine de f_{k+1} etc.. et ce serait aussi finalement une racine de f_m. Mais $f_m = 1$, c'est donc impossible.

c) Montrons que $(f_0,\dots,f_m)$ est une suite de Sturm pour tout intervalle $[a,b]$ tel que $\mathrm{P}(a)\mathrm{P}(b) \neq 0$.
- La condition (α) est vérifiée par hypothèse.
- La condition (β) est vérifiée, puisque $f_m = 1$.
- Soit c une racine de f_0. Alors c'est une racine de P ; si cette racine est d'ordre de multiplicité m dans P, elle sera d'ordre $m-1$ dans P_m (voir ci-dessus). On peut donc écrire : $\mathrm{P}_m = (\mathrm{X}-c)^{m-1}\mathrm{Q}$, $\mathrm{P} = (\mathrm{X}-c)^m\mathrm{QR}$ d'où $f_0 = (\mathrm{X}-c)\mathrm{R}$, puis $f_0' = (\mathrm{X}-c)\mathrm{R}'+\mathrm{R}$ et $f_1 = \dfrac{(\mathrm{X}-c)^{m-1}\big(m\mathrm{QR}+(\mathrm{X}-c)(\mathrm{Q}'\mathrm{R}+\mathrm{QR}')\big)}{(\mathrm{X}-c)^{m-1}\mathrm{Q}} = m\mathrm{R}+(\mathrm{X}-c)(\dots) = .$
  Donc $f_1(c)f_0'(c) = m\mathrm{R}(c)^2 > 0$. La condition (γ) est donc vérifiée.
- Enfin, si c est racine de f_k pour $k \in [\![1,m-1]\!]$, on a $f_{k-1}(c) = \mathrm{Q}_k(c)f_k(c) - f_{k+1}(c) = -f_{k+1}(c)$ et ce terme ne peut être nul sinon c serait racine de f_k et f_{k-1}. Donc $-f_{k+1}(c)f_{k-1}(c) < 0$ et la condition (δ) est bien vérifiée.

4. **a)**
- h ne peut varier que si l'un des f_j change de signe, i.e au voisinage d'une racine d'un des f_j (en effet, par continuité, si f_j ne s'annule pas en un point, il reste de signe constant au voisinage de ce point).
- Soit c racine de f_j (avec $j \in [\![1, m-1]\!]$). Les racines de tous les f_k étant en nombre fini, il n'y a aucun autre zéro que c dans un voisinage de c, donc h est constante sur un voisinage à droite et sur un voisinage à gauche de c, c exclu. De plus, en c, on a $f_{j-1}(c)f_{j+1}(c) < 0$; cela reste vrai, par continuité, dans un voisinage de c, et on peut écrire, sur ce voisinage :

$$h(x) = \mathrm{V}(f_0(x), \ldots, f_{j-1}(x)) + \mathrm{V}(f_{j-1}(x), f_j(x), f_{j+1}(x)) + \mathrm{V}(f_{j+1}(x), \ldots, f_m(x))$$

  Supposons dans un premier temps que c n'est racine d'aucun autre polynôme de la suite autre que f_j et f_0. Alors, dans la somme ci dessus , les termes de gauche et de droite sont constants au voisinage de c puisque c n'est racine d'aucun polynôme qui figure dans la liste. Quant au terme $\mathrm{V}(f_{j-1}(x), f_j(x), f_{j+1}(x))$, il ne change pas au voisinage de c (il reste égal à 1) car, dans un voisinage de c, par continuité, $f_{j-1}f_{j+1}$ reste strictement négatif.

  Si c est racine d'un autre f_k avec $k \geqslant 1$, on refait le même raisonnement en faisant apparaître $\mathrm{V}(f_{k-1}(x), f_k(x), f_{k+1}(x))$, et on obtient le même résultat.
- Finalement, h ne peut varier qu'au voisinage d'une racine c de f_0. Or $f_1(c)f_0'(c) > 0$ dont $f_1 f_0'$ reste, par continuité, strictement positif dans un voisinage de c et on peut écrire $h(x) = \mathrm{V}(f_0(x), f_1(x)) + \mathrm{V}(f_1(x), \ldots, f_m(x))$. Le deuxième terme de la somme ne change pas au voisinage de c pour les mêmes raisons qu'auparavant. Si $f_1(c) > 0$, f_0 croit au voisinage de c donc est négative à gauche et positive à droite ; donc h diminue de 1 quand on passe de $x < c$ à $x > c$. Et on a le même résultat si $f_1(c) < 0$.

b) Ainsi h diminue de 1 au voisinage de chaque racine de f_0 donc de P. Le nombre de racines (distinctes) de P sur $[a, b]$ est donc égal à $h(a) - h(b)$.

c) Le nombre total des racines de tous les f_j étant fini, il existe un intervalle $[a, b]$ contenant toutes ces racines. Le nombre de racines de P sur $\mathbb{R}$ est égal à celui sur $[a, b]$, donc à $h(a) - h(b)$. Mais, pour $x < a$ ou $x > b$, les $f_j(x)$ ne changent pas de signe, ce signe étant le même que celui obtenu quand $x \to -\infty$ ou quand $x \to +\infty$, et ne dépendant que du coefficient dominant a_j de f_j et de son degré d_j. On posera donc $h(+\infty) = \mathrm{V}(a_0, a_1, \ldots, a_m) = h(b)$ et $h(-\infty) = \mathrm{V}((-1)^{d_0}a_0, (-1)^{d_1}a_1, \ldots, a_m) = h(a)$. Et le nombre de racines réelles distinctes de Psera alors égal à $h(-\infty) - h(+\infty)$.

5.
- On utilise la question B.1 pour multiplier les polynômes par des constantes positives et en enlever les dénominateurs, afin de simplifie les calculs.

  On divise : $4(\mathrm{X}^4 - 2\mathrm{X}^3 - \mathrm{X}^2 + 4\mathrm{X} - 2) = (4\mathrm{X}^3 - 6\mathrm{X}^2 - 2\mathrm{X} + 4)(\mathrm{X} - \dfrac{1}{2}) - 5\mathrm{X}^2 + 11\mathrm{X} - 6$, soit $\mathrm{P}_2 = 5\mathrm{X}^2 - 11\mathrm{X} + 6$ par exemple.

  Puis : $25(4\mathrm{X}^3 - 6\mathrm{X}^2 - 2\mathrm{X} + 4) = (5\mathrm{X}^2 - 11\mathrm{X} + 6)(20\mathrm{X} + \dfrac{50}{3}) - 16\mathrm{X} + 16$, et l'on prend : $\mathrm{P}_3 = \mathrm{X} - 1$, d'où $f_3 = 1, f_2 = 5\mathrm{X} - 6, f_1 = 2\mathrm{X}^2 - \mathrm{X} - 2, f_0 = \mathrm{X}^3 - \mathrm{X}^2 - 2\mathrm{X} + 2$.
- Pour $\mathrm{P} = \mathrm{X}^4 - 2\mathrm{X}^3 - \mathrm{X}^2 + 4\mathrm{X} - 2$, et $f_0 = \mathrm{X}^3 - \mathrm{X}^2 - 2\mathrm{X} + 2, f_1 = 2\mathrm{X}^2 - \mathrm{X} - 2, f_2 = 5\mathrm{X} - 6$, on a : $h(+\infty) = \mathrm{V}(1, 2, 5, 1) = 0$ et $h(-\infty) = \mathrm{V}(-1, 2, -5, 1) = 3$ et P possède 3 racines réelles exactement (donc la quatrième est forcément réelle, et est racine double). On a aussi : $h(0) = \mathrm{V}(2, -2, -6, 1) = 2$, donc P possède 1=3 - 2 racine négative et 2 racines positives distinctes. Comme la règle de Descartes avec la parité donne 1 ou 3 racines positives (éventuellement confondues), il doit y avoir exactement 3 racines dont une double sur $]0, +\infty[$ (c'est 1, en fait).

  Après factorisation par $(\mathrm{X} - 1)^2$, on trouve les deux autres racines : $\pm\sqrt{2}$.

PARTIE C : Localisation des racines d'un polynôme

1. Soit ξ une racine de P.
On a donc $a_n \xi^n = -a_{n-1}\xi^{n-1} - \ldots - a_0$, d'où

$$\left|a_n\right| |\xi^n| \leqslant \left|a_{n-1}\right| \left|\xi^{n-1}\right| + \ldots + \left|a_0\right| \leqslant m(\mathrm{P})(\left|\xi^{n-1}\right| + \ldots + |\xi| + 1)$$

- Supposons d'abord $|\xi| > 1$. Alors $\left|a_n\right| |\xi^n| \leqslant m(\mathrm{P}) \left(\dfrac{|\xi^n| - 1}{|\xi| - 1}\right) \leqslant m(\mathrm{P}) \left(\dfrac{|\xi^n|}{|\xi| - 1}\right)$ d'où $\left|a_n\right| \leqslant m(\mathrm{P}) \left(\dfrac{1}{|\xi| - 1}\right)$ donc $|\xi| \leqslant 1 + \dfrac{m(\mathrm{P})}{\left|a_n\right|}$.
- et, bien sûr, cette inégalité reste vraie si l'on suppose $|\xi| \leqslant 1$!

2. Soit $\alpha > 0$, et $Q(X) = P(\alpha X)$. Alors ξ est racine de P si et seulement si $\dfrac{\xi}{\alpha}$ est racine de Q, et l'inégalité précédente appliquée à Q donne : $\left|\dfrac{\xi}{\alpha}\right| \leqslant 1 + \dfrac{m(Q)}{\left|a_n \alpha^n\right|}$ d'où $|\xi| \leqslant \alpha + \dfrac{m(Q)}{\left|a_n\right| \alpha^{n-1}}$.

En prenant $\alpha = \max\left\{\sqrt[k]{\left|\dfrac{a_{n-k}}{a_n}\right|},\ 1 \leqslant k \leqslant n\right\} = \max\left\{\sqrt[n-k]{\left|\dfrac{a_k}{a_n}\right|},\ 0 \leqslant k \leqslant n-1\right\}$, on a

$\dfrac{m(Q)}{\left|a_n\right| \alpha^{n-1}} \leqslant \max\left(\dfrac{\left|a_k\right| \alpha^k}{\left|a_n\right| \alpha^{n-1}}\right) \leqslant \max\left(\dfrac{\left|a_k\right| \alpha}{\left|a_n\right| \alpha^{n-k}}\right)$. Or $\alpha^{n-k} \geqslant \dfrac{\left|a_k\right|}{\left|a_n\right|}$ pour tout $k \in [\![0, n-1]\!]$ donc $\left(\dfrac{\left|a_k\right| \alpha}{\left|a_n\right| \alpha^{n-k}}\right) \leqslant \alpha$ pour tout $k \in [\![0, n-1]\!]$ donc $\dfrac{m(Q)}{\left|a_n\right| \alpha^{n-1}} \leqslant \alpha$ et $|\xi| \leqslant 2\alpha$, ce qui est le résultat voulu.

3. Voir TD Info.

⋆ ⋆ ⋆ ⋆
⋆ ⋆ ⋆
⋆ ⋆
⋆