POLYNÔMES DIVIBLES PAR LEUR DÉRIVÉE SECONDE

Le but du problème est d'étudier les polynômes de $\mathbb{C}[X]$ divisibles par leur polynôme dérivée seconde.

PARTIE A : Étude de cas particuliers

1°) Quels sont les polynômes de degré 2 divisibles par leur polynôme dérivée seconde ?

2°) Montrer qu'un polynôme P de degré 3 est divisible par son polynôme dérivée seconde si et seulement si il existe $(a,b,c) \in \mathbb{C}^3$, avec $a \neq 0$, tels que : $P = a(X-c)^3 + b(X-c)$.

3°) Soit P un polynôme de degré n $(n \geqslant 2)$ divisible par son polynôme dérivée seconde. Il existe donc $Q \in \mathbb{C}[X]$ tel que $P = QP"$.

a) Quel est le degré de Q ? Quel est son coefficient dominant ?

b) On suppose ici que Q admet une racine double, notée c. c est alors racine de P. Soit r son ordre de multiplicité dans P.
En écrivant $P = (X-c)^r R$, avec $R(c) \neq 0$, puis en calculant $P"$, montrer que $r = n$. Quelle est alors la forme du polynôme P ?

PARTIE B : Résolution du problème simplifié

On dira que $P \in \mathbb{C}[X]$ est solution du problème $(\mathcal{P}'_n)$ $(n \geqslant 2)$ si il vérifie les trois conditions :

$$\begin{cases} (i) & \deg(P) = n \\ (ii) & P \text{ est normalisé} \\ (iii) & P = \dfrac{1}{n(n-1)}(X^2-1)P" \end{cases}$$

Dans toute cette partie, P_n désigne un polynôme solution du problème $(\mathcal{P}'_n)$ (*on supposera provisoirement qu'un tel polynôme existe*) .

Si A est un polynôme, et si $k \in \mathbb{N}^*$, on note $A^{(k)}$ le k-ième polynôme dérivé de A; on note $A^{(0)} = A$.

1°) A partir de la relation (iii), et en utilisant la formule de Leibniz, démontrer, pour tout entier $k \in \mathbb{N}$, la relation :

$$(X^2-1)P_n^{(k+2)} + 2kXP_n^{(k+1)} = \big(n(n-1) - k(k-1)\big)P_n^{(k)} \ .$$

2°) Soit $R_k = (X^2-1)^{k-1}P_n^{(k)}(k \in \mathbb{N})$, et $a_k = \dfrac{1}{n(n-1)-k(k-1)}(k \neq n)$.

Déduire de la question précédente l'égalité : $R_k = a_k R'_{k+1}$.

3°) **a)** En déduire : $R_0 = a_0 a_1 \dots a_{n-1} R_n^{(n)}$.

b) En déduire : $P_n = \dfrac{(n-2)!}{(2n-2)!}(X^2-1)\big((X^2-1)^{n-1}\big)^{(n)}$
(on pourra remarquer que : $n(n-1) - k(k-1) = (n-k)(n+k-1)$).

PARTIE C : Etude de la réciproque

Dans cette partie, on démontre que le polynôme P_n défini par :

$$P_n = \frac{(n-2)!}{(2n-2)!}(X^2-1)\big((X^2-1)^{n-1}\big)^{(n)} \quad (n \geqslant 2)$$

est effectivement solution du problème $(\mathcal{P}'_n)$.

1°) Calculer P_2,P_3,P_4 .

2°) Quel est le degré de P_n ? son coefficient dominant ? sa parité ?

3°) On pose : $P_n = \sum\limits_{k=0}^{n} a_k X^k$. Démontrer que, pour $l \in \{1,2,\dots,\mathrm{E}(n/2)\}$, on a :

$a_{n-2l+1} = 0$ et $a_{n-2l} = (-1)^l \dfrac{C_n^{2l} C_{n-1}^l}{C_{2n-2}^{2l}}$.

(on pourra développer $(X^2-1)^{n-1}$ à l'aide de la formule du binôme).

4°) En déduire que P_n est effectivement solution du problème $(\mathcal{P}'_n)$.

PARTIE D : Résolution du cas général

On dira que $P \in \mathbb{C}[X]$ est solution du problème $(\mathcal{P}_n)$ $(n \geqslant 2)$ si il vérifie les trois conditions :

$$\begin{cases} (i) & \text{il existe } Q \in \mathbb{C}[X] \text{ tel que } P = QP\text{''} \\ (ii) & Q \text{ possède deux racines distinctes} \\ (iii) & \deg(P) = n. \end{cases}$$

1°) **a)** Si P est solution du problème $(\mathcal{P}_n)$, et si Q désigne le polynôme défini par (i), montrer qu'il existe deux nombres complexes a et b, avec $a \neq 0$, tels que : $Q(aX+b) = \dfrac{a^2}{n(n-1)}(X^2-1)$.

b) Montrer que, alors, le polynôme $R = P(aX+b)$ vérifie la relation :

$R = \dfrac{1}{n(n-1)}(X^2-1)R\text{''}$.

2°) Résoudre complètement le problème $(\mathcal{P}_n)$ à partir de la solution du problème $(\mathcal{P}'_n)$ trouvée à la question B.3 .

3°) Conclure : Quels sont tous les polynômes de $\mathbb{C}[X]$ divisibles par leur polynôme dérivée seconde ?

PARTIE E : Etude de quelques propriétés des polynômes P_n

(P_n désigne ici, pour n entier $\geqslant 2$, le polynôme considéré dans les parties B et C).

1°) Démontrer que, pour tout entier k compris entre 2 et n, le polynôme $P_n^{(n-k)}$ possède exactement k racines réelles distinctes, comprises entre -1 et 1, et séparées par les racines du polynôme $P_n^{(n-k+1)}$ (on pourra procéder par récurrence sur k et utiliser la relation établie en B.1).

Que peut-on en déduire, en particulier, pour les racines de P_n ?

2°) Soit H un polynôme normalisé de $\mathbb{R}[X]$,de degré $n \geqslant 1$, dont les zéros $x_1,x_2,\dots,x_n$ sont réels et distincts.
Pour tout entier j compris entre 1 et n, on note $H'_j = H'(x_j)$ et $H''_j = H''(x_j)$.

a) Montrer que la décomposition en éléments simples de la fraction rationnelle $\dfrac{1}{H}$ s'écrit :

$$\frac{1}{H} = \sum_{j=1}^{n} \frac{1}{H'_j}\frac{1}{X-x_j}$$

.

b) Montrer que la décomposition en éléments simples de la fraction rationnelle $\dfrac{1}{H^2}$ s'écrit :

$$\frac{1}{H^2} = \sum_{j=1}^{n} \frac{1}{(H_j')^2} \frac{1}{(X - x_j)^2} - \sum_{j=1}^{n} \frac{H_j''}{(H_j')^3} \frac{1}{X - x_j}$$

3°) On note ici $x_1, x_2, \ldots, x_n$ les zéros de P_n, rangés par ordre croissant.

a) Démontrer que la décomposition en éléments simples de la fraction rationnelle $\dfrac{1}{P_n^2}$ s'écrit :

$$\frac{1}{P_n^2} = \sum_{j=1}^{n} \frac{1}{(P_n'(x_j))^2} \frac{1}{(X - x_j)^2} - \frac{n(n-1)}{2\,(P_n'(1))^2} \left(\frac{1}{X-1} - \frac{1}{X+1} \right)$$

b) Soit k un entier compris entre 2 et $n - 1$. On note A la fraction rationnelle :

$$A(X) = \sum_{\substack{j=1 \\ j \neq k}}^{n} \frac{1}{P_n'(x_j)} \frac{1}{X - x_j}$$

En utilisant les résultats de la question précédente, montrer que : $A(x_k) = 0$.
