CORRIGÉ DU PROBLÈME : CONJECTURE D'ILIEFF-SENDOV

A.

Partie I : quelques cas simples de la conjecture

1°) **a)** On a ici $P = a_2(X - z_1)(X - z_2)$ et $P' = 2a_2 - 2\left(X - \dfrac{z_1 + z_2}{2}\right)$. Or

$$\left| z_1 - \frac{z_1 + z_2}{2} \right| = \left| \frac{z_1 - z_2}{2} \right| \leqslant \frac{|z_1| + |z_2|}{2} \leqslant 1.$$

On fait de même pour z_2 et donc P vérifie (IS).

b) Dans le cas où $n_0 \geqslant 2$, z_0 est aussi racine de P' donc P et z_0 vérifient (IS).

2°) **a)** P' est un polynôme de degré $n - 1 = \displaystyle\sum_{i=0}^{m}(n_i - 1) + m$, dont les z_i sont racines d'ordres respectifs $n_i - 1$, et de coefficient dominant na_n.

On peut donc écrire : $P' = na_n \displaystyle\prod_{i=0}^{m}(X - z_i)^{n_i - 1}Q$, avec Q normalisé de degré m et n'ayant pas les z_i comme racines, d'où la formule demandée.

b) $P = a_n(X - z_0)\displaystyle\prod_{i=1}^{m}(X - z_i)^{n_i}$ d'où (dériver) : $P'(z_0) = a_n \displaystyle\prod_{i=1}^{m}(z_0 - z_i)^{n_i}$, puis, d'après l'expression précédente (avec $n_0 = 1$ et z_0 à la place de x), on a

$$P'(z_0) = a_n \prod_{i=1}^{m}(z_0 - z_i)^{n_i} = na_n \prod_{i=1}^{m}(z_0 - z_i)^{n_i - 1} \prod_{j=1}^{m}(z_0 - w_j)$$

et donc $\displaystyle\prod_{j=1}^{m}(z_0 - w_j) = \frac{1}{n}\prod_{i=1}^{m}(z_0 - z_i)$.

c) Soit $n \geqslant 2^m$ et $n_0 = 1$, on a alors

$$\left| \prod_{j=1}^{n}(z_0 - w_j) \right| = \frac{1}{n}\prod_{j=1}^{m}|z_0 - z_j| \leqslant \frac{2^m}{n} \leqslant 1$$

(car $|z_0 - z_j| \leqslant |z_0| + |z_j| \leqslant 2$) ce qui prouve que l'un au moins des $|z_0 - w_j|$ est inférieur ou égal à 1.

Si $n_0 \geqslant 2$ alors on sait (I.1.b.) que P et z_0 vérifient (IS).

Comme on peut faire ce même raisonnement avec toutes les autres racines de P on peut conclure : $\underline{P \text{ vérifie (IS)}}$.

d) Exemple possible : $P = X^3(X - 1)$

3°) **a)** Si on appelle $(y_i)_{1 \leqslant i \leqslant n}$ les racines distinctes ou non de P, de sorte que $P = a_n \displaystyle\prod_{i=1}^{n}(X - y_i)$, un simple calcul de dérivée donne $\dfrac{P'}{P} = \displaystyle\sum_{i=1}^{n}\frac{1}{X - y_i}$, d'où, en regroupant les racines avec leur ordre de multiplicité :

$$\frac{P'}{P} = \sum_{i=0}^{m}\frac{n_i}{X - z_i}$$

donc, en substituant w_j à X on obtient

$$\frac{P'(w_j)}{P(w_j)} = 0 = \sum_{i=0}^{m}\frac{n_i}{w_j - z_i} = \sum_{i=0}^{m}\frac{n_i}{|w_j - z_i|^2}\overline{(w_j - z_i)}.$$

D'où, en prenant alors le conjugué : $\sum_{i=0}^{m} \frac{n_i}{|w_j - z_i|^2}(w_j - z_i)$, et w_j est le barycentre des points pondérés $\left(z_i, \frac{n_i}{|w_j - z_i|^2}\right)$, d'où le résultat (*connu sous le nom de : théorème de Lucas*).

Comme tous les z_i sont dans le disque unité (qui est convexe), il en est de même des w_j.

b) Enfin, si $z_0 = 0$, on distingue deux cas :

- Si $P = a_{n_0} X^{n_0} \prod_{j=1}^{m} (X - z_i)^{n_i}$ avec $n_0 \geqslant 2$, le résultat est déjà acquis.
- sinon (i.e 0 racine simple), on utilise le résultat que l'on vient de prouver.

B.

1°) On a $\frac{P''(X)}{P'(X)} = \sum_{i=1}^{n-1} \frac{1}{X - t_i}$ et, vu que $n_0 = 1$, z_0 n'est pas racine de P', on a

$$\sum_{i=1}^{n-1} \frac{1}{|z_0 - t_i|} \geqslant \left| \frac{P''(z_0)}{P'(z_0)} \right| \geqslant n - 1$$

donc l'un des termes de la première somme est nécessairement supérieur ou égal à 1 i.e. $\exists t_i \in [\![1, n-1]\!]$ tel que $|z_0 - t_i| \leqslant 1$ et, par conséquent, P et z_0 vérifient (IS).

2°) On pose $Q = \frac{P}{X - z_0}$ alors $Q = a_n \prod_{i=1}^{m} (X - z_i)^{n_i}$ d'où

$$\frac{Q'(z_0)}{Q(z_0)} = \sum_{i=1}^{m} \frac{n_i}{X - z_0}.$$

Or $P' = (X - z_0)Q' + Q$, $P'' = (X - z_0)Q'' + 2Q'$ et donc $P'(z_0) = Q(z_0)$, $P''(z_0) = 2Q'(z_0)$ d'où

$$\frac{P''(z_0)}{P'(z_0)} = 2\frac{Q'(z_0)}{Q(z_0)} = 2\sum_{i=1}^{n} \frac{n_i}{z_0 - z_i}.$$

3°) On écrit $z = re^{i\theta}$ avec $0 \leqslant r < 1$ ce qui donne

$$\Re\left(\frac{1}{1 - z}\right) = \frac{1 - r\cos\theta}{1 - 2r\cos\theta + r^2} \geqslant \frac{1 - r\cos\theta}{2 - 2r\cos\theta} = \frac{1}{2}.$$

4°) On reprend le résultat du I.B.2.

$$\frac{P''(1)}{P'(1)} = 2\sum_{i=1}^{m} \frac{n_i}{1 - z_i}$$

et, puisque $|z_i| \leqslant 1$, $z_i \neq 1$, d'après la question précédente :

$$\Re\left(\frac{P''(1)}{P'(1)}\right) \geqslant \sum_{i=1}^{m} n_i = n - 1$$

d'où P et z_0 vérifient (IS) d'après I.B.1 .

5°) On a aussi

$$\frac{P''(1)}{P'(1)} = 2\sum_{i=1}^{m} \frac{n_i}{1 - z_i} = \sum_{i=1}^{n-1} \frac{1}{1 - t_i}$$

d'où les inégalités

$$\Re\left(\frac{1}{1-t_1}\right) \geqslant \frac{1}{n-1}\Re\left(\sum_{i=1}^{n-1}\frac{1}{1-t_i}\right) = \frac{2}{n-1}\sum_{i=1}^{m} n_i \Re\left(\frac{1}{1-z_i}\right)$$
$$\geqslant \frac{2}{n-1}\sum_{i=1}^{m}\frac{n_i}{2} = 1 \text{ grâce à la question précédente}$$

et donc $\Re\left(\dfrac{1}{1-t_1}\right) \geqslant 1$.
On reprend alors les calculs de la question 3. avec $t_1 = re^{i\theta}$, et donc la dernière inégalité se traduit par $\dfrac{1-r\cos\theta}{1+r^2-2r\cos\theta} \geqslant 1$ qui donne $r^2 - r\cos\theta \leqslant 0$. On a donc

$$\left|t_1 - \frac{1}{2}\right|^2 = r^2 + \frac{1}{4} - r\cos\theta \leqslant \frac{1}{4}$$

d'où $\left|t_1 - \dfrac{1}{2}\right| \leqslant \dfrac{1}{2}$ et, par l'inégalité triangulaire, $|t_1 - 1| \leqslant 1$.

6°) Si z_0 est de module 1, on l'écrit $z_0 = e^{i\theta}$, on pose alors $P_1(X) = P(e^{i\theta}X)$. P_1 admet 1 comme racine simple donc P_1 et 1 vérifient (IS). Les racines de P_1' sont les $e^{-i\theta}t_j$ et donc s'il existe j tel que $|1 - e^{-i\theta}t_j| \leqslant 1$ alors, pour ce même j, on a $|z_0 - t_j| \leqslant 1$.
Conclusion : $\underline{P \text{ et } z_0 \text{ vérifient bien (IS)}}$.

Partie II : Cas d'une racine réelle

1°) Par un calcul aisé, on trouve $T^2(w) = w$.

$$|T(re^{i\theta})|^2 - 1 = \frac{(re^{i\theta}-a)(re^{-i\theta}-a)}{(are^{i\theta}-1)(are^{-i\theta}-1)}$$
$$= \frac{r^2 + a^2 - 2ar\cos\theta - (a^2r^2 + 1 - 2ar\cos\theta)}{|are^{i\theta}-1|^2}$$
$$= \frac{(r^2-1)(1-a^2)}{|are^{i\theta}-1|^2} \leqslant 0$$

Donc, si $\mathbb{R}$ désigne le cercle unité, $T(\mathbb{U}) \subset \mathbb{U}$ et comme $T^2(\mathbb{U}) = \mathbb{U} \subset \mathbb{U}$ on a $T(\mathbb{U}) = \mathbb{U}$.
La même égalité permet de vérifier que l'intérieur du cercle unité est stable par T, de même que son extérieur privé de $1/a$.

2°)
- $b_0 = \tilde{P}(0) = 0$ puisque $P(a) = 0$.
- Comme $\tilde{P}(X) = (aX-1)^n P(T(X))$, les racines de $\tilde{P}$ sont les $\tilde{z}_i = T^{-1}(z_i) = T(z_i)$ avec les mêmes ordres de multiplicité. Ces racines, comme on vient de le voir, sont aussi de module inférieur ou égal à 1.
- Puis, les relations entre coefficients et racines d'un polynôme nous donnent alors que

$$\left|\prod_{i=1}^{m}\tilde{z}_i^{\,n_i}\right| = \left|\frac{b_1}{b_n}\right| \leqslant 1$$

et

$$\left|\sum_{i=1}^{m} n_i\tilde{z}_i\right| = \left|\frac{b_{n-1}}{b_n}\right| \leqslant \sum_{i=1}^{m} n_i = n-1.$$

3°) Le coefficient constant de $R(X)$ vaut $\dfrac{b_1}{a}$ et le coefficient de X^{n-1} (coeff. dominant) vaut $\dfrac{nb_n}{a} + b_{n-1}$. Cette dernière expression est non nulle car $|b_{n-1}| \leqslant (n-1)|b_n|$. On a donc, toujours en utilisant les relations coefficients-racines,

$$\prod_{k=1}^{n-1} |\gamma_k| \leqslant \left| \frac{b_1}{nb_n + ab_{n-1}} \right| \leqslant \frac{|b_1|}{n|b_n| - a|b_{n-1}|} \leq \frac{1}{n - a(n-1)}$$

4°) On part de la relation $P(T(X)) = \dfrac{\tilde{P}(X)}{(aX-1)^n}$ et on dérive :

$$\begin{aligned} P'(T(X))T'(X) &= \frac{\left(\sum\limits_{i=1}^{n} ib_i X^{i-1} \right)(aX-1) - \left(\sum\limits_{i=1}^{n} b_i X^i \right) na}{(aX-1)^{n+1}} \\ &= \frac{-a}{(aX-1)^{n+1}} R(X). \end{aligned}$$

Comme $T'(X) = \dfrac{a^2-1}{(aX-1)^2}$ on obtient

$$P'(T(w)) = \frac{a}{1-a^2} \frac{R(w)}{(aw-1)^{n-1}}.$$

On remarque en particulier que les racines de P' sont les transformées par T des racines de R.

5°) Si x et y sont des nombres complexes distincts de $\dfrac{1}{a}$ alors

$$|T(x) - T(y)| = \frac{(1-a^2)|y-x|}{|ax-1|.|ay-1|}.$$

D'où, en prenant $x = 0$, $y = \gamma_1$ et en posant $\zeta = T(\gamma_1)$, on a ζ racine de P' d'après la remarque précédente, puis, d'après l'égalité ci-dessus :

$$|a - \zeta| = \frac{(1-a^2)|\gamma_1|}{|a\gamma_1 - 1|} \leqslant \frac{\mu(1-a^2)}{1-a\mu}$$

car $|a\gamma_1 - 1| \geqslant 1 - a|\gamma_1| \geqslant 1 - a\mu > 0$.
Si $\mu < \dfrac{1}{1+a-a^2}$ (et donc $\mu < \dfrac{1}{a}$) on a

$$\frac{\mu(1-a^2)}{1-a\mu} \leqslant 1 \Rightarrow |\zeta - a| \leqslant 1.$$

6°) **a)** Étudions la fonction $\varphi(x) = \ln(n - x(n-1)) - (n-1)\ln(1 + x - x^2)$ sur $]0,1[$:

$$\begin{aligned} \varphi'(x) &= -\frac{(n-1)}{n - x(n-1)} - \frac{(n-1)(1-2x)}{1+x-x^2} \\ &= -\frac{n-1}{[n - x(n-1)](1+x-x^2)}(x-1)[x(2n-3) - (n+1)] \end{aligned}$$

φ' s'annule donc pour $x = 1$ et $x = \dfrac{n+1}{2n-3}$ et cette dernière valeur est supérieure à 1 pour $n \leqslant 4$ et donc, comme $\varphi'(0) > 0$ et que $\varphi(1) = 0$, on en déduit que $\varphi(x)$ est positif pour $x \in]0,1[$.

b) Vu la question II.3, on a donc

$$|\gamma_1|^{n-1} \leqslant \prod_{k=1}^{n-1} |\gamma_k| \leqslant \frac{1}{n - a(n-1)} \leqslant \frac{1}{(1+a-a^2)^{n-1}}$$

i.e. $|\gamma_1| \leqslant \dfrac{1}{1+a-a^2}$ ce qui permet de choisir μ comme à la question précédente et de conclure.

Dans le cas général, on fait une rotation comme au I.B.6 et on arrive à la même conclusion.

7°) Soit P un polynôme de degré 3 ou 4 et z_0 une racine de P.
Si $n_0 \geqslant 2$ alors, d'après I.A.1.b., P et z_0 vérifient (IS).

Si $n_0 = 1$ et $|z_0| = 1$, P et z_0 vérifient (IS) d'après I.A.6
Si $n_0 = 1$ et $z_0 = 0$ alors, d'après I.A.3, P et z_0 vérifient (IS).
Si $n_0 = 1$ et $0 < |z_0| < 1$ alors, d'après la question précédente, P et z_0 vérifient (IS).

Conclusion : en vertu de l'étude exhaustive que l'on vient de faire, on peut dire qu'en effet, si P est un polynôme de degré inférieur ou égal à 4 alors il vérifie (IS).

8°) On étudie $\psi(x) = (n-2)\ln(1+x-x^2) - \ln[n-(n-1)x]$. On a :

$$\begin{aligned}\psi'(x) &= \frac{(n-2)(1-2x)(n-(n-1)x)+(n-1)(1+x-x^2)}{(1+x-x^2)(n-(n-1)x)}\\ &= -\frac{[(n-1)(2n-5)x^2-(3n^2-8n+3)x+n^2-n-1}{(1+x-x^2)(n-(n-1)x)}\end{aligned}$$

On vérifie alors que le trinôme du numérateur n'a pas de racine pour $n = 5, 6, 7$. ψ est donc décroissante et, comme $\psi(1) = 0$, alors $\psi(x) > 0$ pour $x \in]0,1[$.
Soit z_0 le zéro double au moins, de module 1, de P. z_0 est aussi racine de P' et donc $T(z_0)$ est une racine du polynôme R (défini au II.2.). On a donc $T(z_0) = \gamma_i$ où γ_i est une racine de module 1.
On a alors

$$|\gamma_1|^{n-2} \leqslant \prod_{k=1,k\neq i}^{n-1} |\gamma_k| = \prod_{k=1}^{n-1} |\gamma_k| \leqslant \frac{1}{n-a(n-1)} \leqslant \frac{1}{(1+a-a^2)^{n-2}}$$

et donc $|\gamma_1| \leqslant \dfrac{1}{1+a-a^2}$ et on applique le II.5.

9°) Le raisonnement précédent s'étend par rotation au cas où a est un zéro simple et où $|a| \in]0,1[$. On peut alors conclure comme à la question précédente.

Partie III : Continuité des racines d'un polynôme

1°) Soit z une racine de S, si $|z| \leqslant 1$, l'inégalité est évidente car $\|S\| \geqslant s_n$.
Si $|z| > 1$ alors

$$|z|^{n-1}\sum_{i=0}^{n-1}|s_i| \geqslant |s_0 + \cdots + s_{n-1}z^{n-1}| = |s_n z^n| \text{ d'où}$$

$$\|S\| \geqslant \sum_{i=0}^{n-1}|s_i| \geqslant |s_n|.|z|$$

CQFD.

2°) **a)** Soit $s_{n,k}$ le coefficient (non nul) de X^n dans S_k. Comme $\lim\limits_{k\to+\infty} s_{n,k} = s_n \neq 0$ alors la suite $\left(\dfrac{\|S_k\|}{|s_{n,k}|}\right)$ est convergente donc bornée.
Vu l'inégalité prouvée à la question précédente, on en déduit que l'ensemble des $\{x_{i,k},\ i \in [1,n],\ k \in \mathbb{N}\}$ est borné.

b) Par l'absurde, on suppose que pour tout $k_0 \in \mathbb{N}$, il existe $k \geqslant k_0$ tel que $|z - x_{i,k}| \geqslant \varepsilon$ pour $i \geqslant p$.
On peut alors construire une suite extraite $\left(S_{\varphi(k)}\right)$ telle que l'on ait cette propriété.

Si on considère la suite $\big((x_{1,\varphi(k)},\dots,x_{n,\varphi(k)})\big)_{k\in\mathbb{N}}$ alors elle appartient à un fermé borné de $\mathbb{C}^n$ donc compact. On peut alors en extraire une suite convergente $\big((x_{1,\varphi\circ\psi(k)},\dots,x_{n,\varphi\circ\psi(k)})\big)_{k\in\mathbb{N}}$ et soit $(y_1,\dots,y_n)$ sa limite.

Or, comme $S_{\varphi\circ\psi(k)} = s_{n,\varphi\circ\psi(k)}\displaystyle\prod_{i=1}^{n}(X - x_{\varphi\circ\psi(k)})$ admet pour limite $S = s_n\displaystyle\prod_{i=1}^{n}(X-y_i)$ ceci prouve qu'au moins p des nombres y_i sont égaux à z_i. Or ceci est impossible car, par construction, $|y_i - z| \geqslant \varepsilon$ pour $i \geqslant p$.

Partie IV : Polynômes extrémaux

1°) **a)** Les racines de S' sont dans l'enveloppe convexe des racines de S (résultat du I.A.3.b.), elles sont donc de module au plus 1. Les racines z de S et z' de S' étant dans le disque fermé de centre 0 et de rayon 1 vérifient $|z-z'| \leqslant 2$. Donc, pour tout z, on a $I_S(z) \leqslant 2$ et, en conséquence $I(S) \leqslant 2$.

b) Évident, il suffit de revenir à la définition.

Pour montrer l'inégalité, il suffit de trouver un polynôme P de $\mathbb{C}_n[X]$ tel que $I(P) = 1$. Or $P(X) = X^n - 1 = \displaystyle\prod_{k=1}^{n}(X - e^{2ik\pi/n})$ répond à la question.

2°) **a)** Comme on est en dimension finie, il suffit de prouver que $P_n(k)$ est fermé borné.

$P_n(k)$ borné : comme toutes les racines de $S \in P_n(k)$ sont de module inférieur ou égal à 1, on sait alors que $|\sigma_k| \leqslant C_n^k$ car cette fonction symétrique des racines de S est la somme de C_n^k termes tous produits de k racines de S.

On a donc $\|S\| \leqslant \displaystyle\sum_{k=0}^{n}|\sigma_k| \leqslant 2^n$.

$P_n(k)$ est fermé : on utilise le résultat du III, soit $S \in \mathbb{C}_n(X)$ et $\varepsilon = \dfrac{1}{2}\min\limits_{z\neq z'}|z-z'|$ où z et z' sont les racines de S. On suppose que S a $p+1$ racines distinctes.

Soit $(S_h)_{h\in\mathbb{N}}$ une suite de polynômes de $P_n(k)$ convergeant vers S.

On remarque tout d'abord que S est unitaire. il reste à prouver que S a au plus $k+1$ racines distinctes. Si l'on prend h suffisamment grand alors les racines des polynômes S_h seront partitionnées dans les disques $D(z,\varepsilon/2)$ et donc S_h aura au moins $p+1$ racines distinctes. On a donc $p \leqslant k$ et $S \in P_n(k)$.

Conclusion : $P_n(k)$ est compact.

b) On utilise le critère séquentiel de continuité. Soit $(S_h)_{h\in\mathbb{N}}$ une suite de polynômes de $P_n(k)$ convergeant vers S. Comme $\|S'_h - S'\| \leqslant n\|S_h - S\|$, la suite (S'_h) converge vers S'. On va utiliser le résultat prouvé à la question précédente, on prend $a > 0$ tel que les disques centrés sur les racines de S (respectivement S'), de rayon a soient disjoints.

Soit $\varepsilon > 0$ inférieur à a. Dans chaque disque $D(z,\varepsilon)$, il y a q racines de S_h (pour $h \geqslant h_0$) si q désigne l'ordre de multiplicité de z dans S. Et, si on choisit h_0 suffisamment grand, ce sera pareil pour S'_h et S'.

Soit z une racine de S, il existe une racine de S_h, z_h telle que $|z - z_h| \leqslant \varepsilon$. Soit z'_h racine de S' telle que $|z_h - z'_h| = I_{S_h}(z_h)$ et enfin z' racine de S' telle que $|z'_h - z'| \leqslant \varepsilon$. Alors :

$$I_S(z) \leqslant |z-z'| \leqslant |z_h - z'_h| + 2\varepsilon \leqslant I(S_h) + 2\varepsilon$$

pour toute racine z de S donc

$$I(S) \leqslant I(S_h) + 2\varepsilon.$$

De la même façon, en partant de z_h racine de S_h (pour h suffisamment grand), on lui associe z racine de S, puis z' racine de S' telle que $|z - z'| = I_S(z)$ et enfin z'_h racine de S'_h telle que $|z' - z'_h| \leqslant \varepsilon$, on obtient

$$I(S_h) \leqslant I(S) + 2\varepsilon.$$

Les deux inégalités ainsi obtenues permettent d'affirmer que I est continue.

Enfin, $P_n(k)$ étant un compact, I est bornée sur $P_n(k)$ et y atteint ses bornes, il existe donc un polynôme P de $P_n(k)$ tel que $I(P) = I(P_n(k)$.

3°) Supposons que le polynôme extrémal S a toutes ses racines de module inférieur strictement à 1. Soit $r \in]0,1[$ tel que le disque $D(0,r)$ contienne toutes les racines de S alors le polynôme $S_r = \dfrac{1}{r^n}S(rX)$ est aussi un élément de $P_n(k)$ et vu que $I(S) = rI(S_r)$ alors S n'est pas extrémal, d'où la conclusion.

4°) Supposons que pour $\theta \in \mathbb{R}$ le polynôme extrémal S n'ait aucune racine de la forme $e^{i\alpha}$ avec $\alpha \in [\theta,\theta+\pi[$ alors on peut trouver une translation $z \mapsto z - a$ telle que le polynôme $S(X - a)$ ait toutes ses racines dans le disque ouvert $D(0,1)$ (un petit dessin est suffisamment explicite). Le polynôme $S(X - a)$ est aussi un polynôme extrémal de $P_n(k)$ et il a toutes ses racines dans $D(0,1)$ ce qui contredit le résultat de la question IV.3.
Conclusion : S possède au moins deux racines de module 1 et si S possède exactement deux racines de module 1 alors elles sont forcément opposées.

5°) Si a est racine double de S alors $I_S(a) = 0$, si S a une racine double de module 1, le II.8 permet de conclure.
On suppose donc maintenant que a est racine simple et que toutes les racines de S de module 1 sont simples elles aussi. D'après le IV.4, il y a au moins 2 racines de module 1 (et qui seront simples), on les note (comme le préconise l'énoncé) u et v. Comme $\deg S \geqslant 5$ on sait alors qu'il existe une autre racine b d'ordre $n - 3 \geqslant 2$ et qui ne peut être de module 1. u et v sont donc opposées.
S s'écrit donc sous la forme :

$$S = (X - a)(X - u)(X - v)(X - b)^{n-2}$$

et donc

$$S' = n(X - b)^{n-4}(X - t_1)(X - t_2)$$

d'où

$$S'(a) = (a - u)(a - v)(a - b)^{n-3} = n(a - b)^{n-4}(a - t_1)(a - t_2)(a - t_3).$$

Si ζ est la racine de S' la plus proche de a alors

$$\begin{aligned} n|a - \zeta|^3.|a - b|^{n-4} &\leqslant |a - u|.|a - v|.|a - b|^{n-3} \\ n|a - \zeta|^3 &\leqslant |a - u|.|a - v|.|a - b| \leqslant 2|a - u|.|a - v|. \end{aligned}$$

Mais, en posant $u = e^{i\theta}$, on peut écrire :

$$\begin{aligned} |a - u|^2.|a - v|^2 = |a^2 - u^2|^2 = |a^2 - e^{2i\theta}|^2 &= a^4 - 2a^2\cos 2\theta + 1 \\ &\leqslant a^4 + 2a^2 + 1 = (a^2 + 1)^2 \end{aligned}$$

et, en conclusion

$$|a - \zeta|^3 \leqslant \frac{2}{n}(a^2 + 1) \leqslant \frac{2}{5}(a^2 + 1) < \frac{4}{5}$$

car $n \geqslant 5$ et donc $|a - \zeta| < 1$.
Par rotation, comme on l'a déjà fait, on étend ce résultat à toute racine de S dont le module est strictement compris entre 0 et 1.

6°) On procède comme au II.7, en distinguant pour une racine z_0 d'ordre n_0, les cas $n_0 \geqslant 2$, $n_0 = 1$ et $|z_0| = 1$, $n_0 = 1$ et $z_0 = 0$, $n_0 = 1$ et $0 < |z_0| < 1$ (cas que l'on vient de traiter.
Conclusion : $I(S) = I(P_n(3)) \leqslant 1$.

7°) On vient de voir que si $\deg S \leqslant 7$ et si S a au plus 4 racines distinctes, alors S vérifie (IS) (pour $n = 5$, 6 ou 7, c'est le résultat de la question précédente, pour $n = 4$, on utilise le II.7).
Si $n \geqslant 8 = 2^3$ alors la réponse est donnée dans la question I.A.2.c.
