CORRIGÉ : POLYNÔMES À COEFFICIENTS ± 1. PAIRES DE RUDIN-SHAPIRO (X PC, 2006)

Première partie : propriétés de $\mathscr{L}$

1. — Pour $\ell = 2$, la condition de corrélation s'écrit $a_0 a_1 + b_0 b_1 = 0$. Donc $\underline{a} = (1,1)$ et $\underline{b} = (1,-1)$ forment une paire complémentaire et $\boxed{2 \in \mathscr{L}.}$

— Pour $\ell = 3$, les conditions de corrélation C_1 et C_2 sont respectivement

$$(a_0 + a_2)a_1 + (b_0 + b_2)b_1 = 0 \quad \text{et} \quad a_0 a_2 + b_0 b_2 = 0.$$

Si $b_0 = b_2$, la deuxième égalité donne $a_0 = -a_2$ ainsi $(a_0 + a_2)a_1 + (b_0 + b_2)b_1 = 2b_0 b_1 \neq 0$.
Si $b_0 = -b_2$, la deuxième égalité donne $a_0 = a_2$ ainsi $(a_0 + a_2)a_1 + (b_0 + b_2)b_1 = 2a_0 a_1 \neq 0$.
C_1 et C_2 ne peuvent être vérifiées donc $\boxed{3 \notin \mathscr{L}.}$

2.a) • On a $\mathrm{P}_{\underline{a}}(x)\mathrm{P}_{\underline{a}}(x^{-1}) \sim a_0 a_{\ell-1} x^{\ell-1}$ lorsque x tend vers $+\infty$ (car $a_0 a_{\ell-1} \neq 0$).
Si $\underline{a}$ et $\underline{b}$ sont deux séquences de longueur différentes, la plus longue ayant une longueur $\ell > 1$, on obtient $\lim\limits_{x\to+\infty} \mathrm{P}_{\underline{a}}(x)\mathrm{P}_{\underline{a}}(x^{-1}) + \mathrm{P}_{\underline{b}}(x)\mathrm{P}_{\underline{b}}(x^{-1}) = \pm\infty$.

$\boxed{\text{La fonction } x \mapsto \mathrm{P}_{\underline{a}}(x)\mathrm{P}_{\underline{a}}(x^{-1}) + \mathrm{P}_{\underline{b}}(x)\mathrm{P}_{\underline{b}}(x^{-1}) \text{ n'est donc pas bornée sur }]0,+\infty[.}$

• On a :

$$\begin{aligned}
\mathrm{P}_{\underline{a}}(x)\mathrm{P}_{\underline{a}}(x^{-1}) &= \sum_{0\leqslant i,j\leqslant \ell-1} a_i a_j x^{i-j} \\
&= \sum_{i=0}^{\ell-1} a_i^2 + \sum_{0\leqslant j<i\leqslant \ell-1} a_i a_j x^{i-j} + \sum_{0\leqslant i<j\leqslant \ell-1} a_i a_j x^{i-j} \\
&= \sum_{i=0}^{\ell-1} a_i^2 + \sum_{k=1}^{\ell-1}\left(\sum_{j=0}^{\ell-1-k} a_{j+k}a_j\right)x^k + \sum_{k=1}^{\ell-1}\left(\sum_{i=0}^{\ell-1-k} a_i a_{i+k}\right)x^{-k} \\
&= \sum_{i=0}^{\ell-1} a_i^2 + \sum_{k=1}^{\ell-1}\left(\sum_{i=0}^{\ell-1-k} a_i a_{i+k}\right)(x^k + x^{-k})
\end{aligned}$$

en ayant posé $k = i - j$ dans la première somme et $k = j - i$ dans la seconde.
Ainsi pour deux séquences $\underline{a}$ et $\underline{b}$ de même longueur ℓ, on obtient

$$\mathrm{P}_{\underline{a}}(x)\mathrm{P}_{\underline{a}}(x^{-1}) + \mathrm{P}_{\underline{b}}(x)\mathrm{P}_{\underline{b}}(x^{-1}) = \sum_{i=0}^{\ell-1}(a_i^2 + b_i^2) + \sum_{k=1}^{\ell-1}\left(\sum_{i=0}^{\ell-1-k} a_i a_{i+k} + b_i b_{i+k}\right)(x^k + x^{-k}) \ (*)$$

Si $\underline{a}$ et $\underline{b}$ forment une paire complémentaire alors, pour tout $x \neq 0$,

$$\mathrm{P}_{\underline{a}}(x)\mathrm{P}_{\underline{a}}(x^{-1}) + \mathrm{P}_{\underline{b}}(x)\mathrm{P}_{\underline{b}}(x^{-1}) = \sum_{i=0}^{\ell-1}(a_i^2 + b_i^2) = 2\ell.$$

$\boxed{\text{Ainsi la fonction } x \mapsto \mathrm{P}_{\underline{a}}(x)\mathrm{P}_{\underline{a}}(x^{-1}) + \mathrm{P}_{\underline{b}}(x)\mathrm{P}_{\underline{b}}(x^{-1}) \text{ est constante sur } \mathbb{R}^*.}$

• Inversement supposons la fonction constante sur $\mathbb{R}\setminus\{0\}$. D'après le début de cette question, $\underline{a}$ et $\underline{b}$ sont de même longueur ℓ (car la fonction est bornée) ; on peut donc reprendre le calcul précédent.
En multipliant $(*)$ par x^{l-1}, on obtient deux fonctions polynomiales égales pour tout $x \neq 0$. En identifiant les coefficients de part et d'autre de l'égalité, on obtient $\displaystyle\sum_{i=0}^{\ell-1-k} a_i a_{i+k} + b_i b_{i+k} = 0$ pour tout $k \in [\![1, n-1]\!]$, donc

$\boxed{\text{la paire } \underline{a},\ \underline{b} \text{ est complémentaire.}}$

2.b) — Si $\underline{a}$ est de longueur ℓ, alors $\mathrm{P}_{\underline{a}}(1) = \ell - 2k$ où k est le nombre de coefficients égaux à -1, donc $\mathrm{P}_{\underline{a}}(1)$ a même parité que ℓ.
Il en résulte que si $\underline{a}$ et $\underline{b}$ sont de même longueur, alors $\boxed{\mathrm{P}_{\underline{a}}(1) \text{ et } \mathrm{P}_{\underline{b}}(1) \text{ sont des entiers de même parité.}}$

— Soient $\ell \in \mathscr{L}$ et $\underline{a}$, $\underline{b}$ une paire complémentaire de longueur ℓ.
D'après les calculs précédents, $\mathrm{P}_{\underline{a}}(1)^2 + \mathrm{P}_{\underline{b}}(1)^2 = 2\alpha^2 + 2\beta^2 = 2\ell$,
d'où $\ell = \left(\dfrac{\mathrm{P}_{\underline{a}}(1) + \mathrm{P}_{\underline{b}}(1)}{2}\right)^2 + \left(\dfrac{\mathrm{P}_{\underline{a}}(1) - \mathrm{P}_{\underline{b}}(1)}{2}\right)^2$ avec $\dfrac{\mathrm{P}_{\underline{a}}(1) + \mathrm{P}_{\underline{b}}(1)}{2}$ et $\dfrac{\mathrm{P}_{\underline{a}}(1) - \mathrm{P}_{\underline{b}}(1)}{2}$ entiers d'après le résultat précédent, donc $\boxed{\ell \text{ peut s'écrire comme la somme de deux carrés d'entiers.}}$

— *Autre solution :* On note $I = \{i \text{ tq } a_i = b_i\}$, $J = \{i \text{ tq } a_i = -b_i\}$, $\alpha = \sum_{i \in I} a_i$ et $\beta = \sum_{i \in J} a_i$.
On a $P_{\underline{a}}(1) = \alpha + \beta$ et $P_{\underline{b}}(1) = \alpha - \beta$ donc $P_{\underline{a}}(1)^2 + P_{\underline{b}}(1)^2 = 2\alpha^2 + 2\beta^2 = 2\ell$...

Rem : on retrouve $3 \notin \mathscr{L}$.

2.c) Si $m = 2k$ alors $m^2 \equiv 0(4)$ et si $m = 2k+1$ alors alors $m^2 \equiv 1(4)$, ainsi pour tout $\ell \in \mathscr{L}$, on a $\ell \equiv 0+0(4)$ ou $\ell \equiv 0+1(4)$ ou $\ell \equiv 1+0(4)$ ou $\ell \equiv 1+1(4)$.
L'ensemble infini des entiers congrus à 3 modulo 4 ne contient donc aucun élément de $\mathscr{L}$.

Ainsi $\boxed{\text{le complémentaire de } \mathscr{L} \text{ dans } \mathbb{N} \text{ est un ensemble infini.}}$

3.a) Soient $\underline{a}$ et $\underline{b}$ deux séquences de même longueur et $U = \frac{1}{2}(P_{\underline{a}} + P_{\underline{b}})$ et $V = \frac{1}{2}(P_{\underline{a}} - P_{\underline{b}})$.
Un calcul rapide donne $U(x)U(x^{-1}) + V(x)V(x^{-1}) = \dfrac{1}{2}\left(P_{\underline{a}}(x)P_{\underline{a}}(x^{-1}) + P_{\underline{b}}(x)P_{\underline{b}}(x^{-1})\right)$.
Il résulte directement de **2.a)** que
$\boxed{\underline{a} \text{ et } \underline{b} \text{ forment une paire complémentaire ssi la fonction } x \mapsto U(x)U(x^{-1}) + V(x)V(x^{-1}) \text{ est constante sur } \mathbb{R}^*}$ (cette constante étant égale à ℓ).

3.b) Pour les séquences $\underline{a} = (1,1,-1,1,-1,1,-1,-1,1,1)$ et $\underline{b} = (1,1,-1,1,1,1,1,1,-1,-1)$ de longueur 10, on a

$$\left\{\begin{array}{l} U(x) = 1 + x - x^2 + x^3 + x^5 \\ V(x) = -x^4 - x^6 - x^7 + x^8 + x^9 = -x^4(1 + x^2 + x^3 - x^4 - x^5) \end{array}\right.$$

Le calcul donne

$$\begin{aligned} U(x)U(x^{-1}) + V(x)V(x^{-1}) &= (1 + x - x^2 + x^3 + x^5)(1 + \frac{1}{x} - \frac{1}{x^2} + \frac{1}{x^3} + \frac{1}{x^5}) \\ &\quad + (1 + x^2 + x^3 - x^4 - x^5)(1 + \frac{1}{x^2} + \frac{1}{x^3} - \frac{1}{x^4} - \frac{1}{x^5}) \\ &= 10. \end{aligned}$$

Donc $\boxed{\underline{a} \text{ et } \underline{b} \text{ forment une paire complémentaire et } 10 \in \mathscr{L}.}$

4. Soit $\underline{v}$ une séquence de longueur paire $2m > 0$ et n le nombre de coordonnées de $\underline{v}$ égales à -1.
On a $\sum_{i=0}^{2m-1} v_i = 2m - 2n$, donc l'assertion (i) «4 divise la somme $\sum_{i=0}^{2m_1} v_i$» équivaut à $m - n$ pair, c'est-à-dire l'assertion (ii) «n a la même parité que m».
On a $\prod_{i=0}^{2m-1} v_i = (-1)^n$ donc l'assertion (ii) équivaut à l'assertion (iii) «$\prod_{i=0}^{2m_1} v_i = (-1)^m$».

5.a) Soit j un entier tel que $1 \leqslant j \leqslant \ell - 1$.
La somme des coordonnées de la séquence $(a_0 a_j, \dots, a_{\ell-1-j} a_{\ell-1}, b_0 b_j, \dots, b_{\ell-1-j} b_{\ell-1})$ de longueur paire $2(\ell - j)$ est nulle d'après la j-ième condition de corrélation.
Elle est donc divisible par 4 et il résulte de l'assertion (iii) de **4.** que

$$\boxed{\prod_{k=0}^{\ell-1-j} x_k x_{k+j} = (-1)^{\ell-j}}$$

5.b) — D'après la relation précédente :
— pour $j = \ell - 1$: $x_0 x_{\ell-1} = -1$;
— pour $j = \ell - 2$ (si $\ell \geqslant 3$) : $x_0 x_{\ell-2} x_1 x_{\ell-1} = (-1)^2$, d'où, d'après la relation précédente $x_1 x_{\ell-2} = -1$.
— pour $j = \ell - 3$ (si $\ell \geqslant 4$) : $x_0 x_{\ell-3} x_1 x_{\ell-2} x_2 x_{l-1} = (-1)^3 = -1$, d'où $x_2 x_{l-3} = -1$
— etc...
et finalement : $\boxed{\forall j \in [\![0, \ell-1]\!], \quad x_j x_{\ell-1-j} = -1.}$

— Pour $j = 1$, la même relation donne $x_0 x_1^2 \dots x_{\ell-2}^2 x_{\ell-1} = (-1)^{\ell-1}$, donc, sachant que $x_i^2 = 1$ et que $x_0 x_{\ell-1} = -1$, on a $(-1)^{\ell-1} = -1$ donc $\boxed{\ell \text{ est pair.}}$

Deuxième partie : paires de Rudin-Shapiro

6.a) Le calcul donne $P_1(X) = 1 + X$ et $Q_1(X) = 1 - X$ puis $P_2(X) = 1 + X + X^2 - X^3$ et $Q_2(X) = 1 + X - X^2 + X^3$.

6.b) Les premiers calculs donnent $P_0(1) = Q_0(1) = P_0(-1) = Q_0(-1) = 1$,
$P_1(1) = Q_1(-1) = 2$ et $Q_1(1) = P_1(-1) = 0$,
$P_2(1) = Q_2(1) = P_2(-1) = -Q_2(-1) = 2$,
$P_3(1) = Q_3(-1) = 4$ et $Q_3(1) = P_3(-1) = 0$,
$P_4(1) = Q_4(1) = P_4(-1) = -Q_4(-1) = 4$.

Montrons par récurrence sur $k \geqslant 1$ que :

$\boxed{P_{2k}(1) = Q_{2k}(1) = P_{2k}(-1) = -Q_{2k}(-1) = 2^k,\ P_{2k-1}(1) = Q_{2k-1}(-1) = 2^k \text{ et } P_{2k-1}(-1) = Q_{2k-1}(1) = 0.}$

— Le résultat est vrai pour $k = 1$ et $k = 2$.
— On suppose le résultat vrai jusqu'à l'ordre $k \geqslant 2$.
On a $P_{2k+1}(1) = P_{2k}(1) + Q_{2k}(1) = 2^k + 2^k = 2^{k+1}$ et $Q_{2k+1}(1) = P_{2k}(1) - Q_{2k}(1) = 2^k - 2^k = 0$,
$P_{2k+1}(-1) = P_{2k}(-1) + Q_{2k}(-1) = 2^k - 2^k = 0$ et $Q_{2k+1}(-1) = P_{2k}(-1) - Q_{2k}(-1) = 2^k + 2^k = 2^{k+1}$
ensuite $P_{2k+2}(1) = P_{2k+1}(1) + Q_{2k+1}(1) = 2^{k+1} + 0 = 2^{k+1}$ et $Q_{2k+2}(1) = P_{2k+1}(1) - Q_{2k+1}(1) = 2^{k+1}$,
$P_{2k+2}(-1) = P_{2k+1}(-1) + Q_{2k+1}(-1) = 0 + 2^{k+1} = 2^{k+1}$ et $Q_{2k+2}(-1) = P_{2k+1}(-1) - Q_{2k+1}(-1) = -2^{k+1}$,
le résultat est donc vrai à l'ordre $k + 1$.

7. • On commence par démontrer par récurrence sur $n \in \mathbb{N}$ que les degrés de P_n et Q_n sont égaux à $2^n - 1$.

• Cela permet de montrer ensuite par récurrence que les coefficients de P_n et Q_n sont égaux à ± 1 (en effet, il n'y aura pas de terme commun dans P_n et $X^{2^n} Q_n$ par exemple).

• Montrons alors par récurrence sur $n \in \mathbb{N}$ que P_n et Q_n forment une paire complémentaire de polynômes.
— Par convention, c'est vrai pour $n = 0$ car $P_0 = 1$ et $Q_0 = 1$.
— On suppose le résultat vrai jusqu'à l'ordre n.
On a

$$\begin{aligned} P_{n+1}(x)P_{n+1}(x^{-1}) &= (P_n(x) + x^{2^n} Q_n(x))(P_n(x^{-1}) + x^{-2^n} Q_n(x^{-1})) \\ &= P_n(x)P_n(x^{-1}) + Q_n(x)Q_n(x^{-1}) + x^{2^n} Q_n(x)P_n(x^{-1}) + x^{-2^n} P_n(x)Q_n(x^{-1}). \end{aligned}$$

et

$$\begin{aligned} Q_{n+1}(x)Q_{n+1}(x^{-1}) &= (P_n(x) - x^{2^n} Q_n(x))(P_n(x^{-1}) - x^{-2^n} Q_n(x^{-1})) \\ &= P_n(x)P_n(x^{-1}) + Q_n(x)Q_n(x^{-1}) - x^{2^n} Q_n(x)P_n(x^{-1}) - x^{-2^n} P_n(x)Q_n(x^{-1}) \end{aligned}$$

ainsi

$$P_{n+1}(x)P_{n+1}(x^{-1}) + Q_{n+1}(x)Q_{n+1}(x^{-1}) = 2P_n(x)P_n(x^{-1}) + 2Q_n(x)Q_n(x^{-1})$$

est constant. Le résultat est donc vrai à l'ordre $n + 1$, d'après I.2.a.

• Enfin, P_k et Q_k sont associés à des séquences de longueur 2^k. On a donc $\boxed{2^k \in \mathscr{L} \text{ pour tout } k \in \mathbb{N}.}$

8. Montrons par récurrence sur $n \geqslant 0$ que pour tout $z \in \mathbb{C}^*$, on a $Q_n(z) = (-1)^n z^{2^n - 1} P_n(-z^{-1})$.
— Pour $n = 0$ le résultat est trivial car $P_0 = Q_0 = 1$
Pour $n = 1$, on a $-zP_1(-z^{-1}) = -z + 1 = Q_1(z)$.
— On suppose l'égalité établie jusqu'à l'ordre $n \geqslant 1$.
On a $P_{n+1}(-z^{-1}) = P_n(-z^{-1}) + z^{-2^n} Q_n(-z^{-1})$ avec $Q_n(-z^{-1}) = (-1)^{n+1} z^{-2^n+1} P_n(z)$
ainsi $P_{n+1}(-z^{-1}) = P_n(-z^{-1}) + (-1)^{n+1} z^{-2^{n+1}+1} P_n(z)$
et $(-1)^{n+1} z^{2^{n+1}-1} P_{n+1}(-z^{-1}) = (-1)^{n+1} z^{2^{n+1}-1} P_n(-z^{-1}) + P_n(z)$.
Par ailleurs $Q_{n+1}(z) = P_n(z) - z^{2^n} Q_n(z) = P_n(z) + (-1)^{n+1} z^{2^{n+1}-1} P_n(-z^{-1})$.
D'où l'égalité à l'ordre $n + 1$.

9.a) Soit $T(X) = t_0 + t_1 X + \ldots + t_d X^d \in \mathbb{C}[X]$ de degré $d \geqslant 1$. Montrons que toute racine $z \in \mathbb{C}$ de T vérifie $|z| \leqslant 1 + M$ où $M = \sup\limits_{0 \leqslant i \leqslant d-1} |t_i / t_d|$.

Par l'absurde, supposons qu'il existe une racine z de T telle que $|z| > M + 1$, soit $\dfrac{M}{|z| - 1} < 1$.

On a $z^d = -\dfrac{t_0}{t_d} - \dfrac{t_1}{t_d} z \ldots - \dfrac{t_{d-1}}{t_d} z^{d-1}$ donc $|z|^d \leqslant M(1 + |z| + \ldots + |z|^{d-1})$. Puisque $|z| \neq 1$ on en déduit

$|z|^d \leqslant \dfrac{M}{|z| - 1}(|z|^d - 1) < |z|^d - 1$, d'où la contradiction.

9.b) — Soit z une racine (complexe) du polynôme P_nQ_n pour $n \geqslant 1$. Alors z est racine de P_n ou de Q_n et $z \neq 0$. Comme les coefficients de P_n ou Q_n valent ± 1, on obtient, d'après **9.a)** $|z| \leqslant 2$.

D'après **8.**, on a $Q_n(z) = (-1)^n z^{2^n-1} P_n(-z^{-1})$ donc $P_n(z) = (-1)^{n+1} z^{2^n-1} Q_n(-z^{-1})$ ainsi $-z^{-1}$ est racine de P_n ou de Q_n donc, pour la même raison, $|z^{-1}| \leqslant 2$. Finalement

$$\boxed{\frac{1}{2} \leqslant |z| \leqslant 2.}$$

— Si on regarde la démonstration de **9.a)**, il est facile de voir que l'inégalité obtenue est stricte ! (c'est presque la même démonstration, il faut juste traiter à part le cas $M = 0$). Donc $\boxed{\text{les deux inégalités sont strictes.}}$

10.a) P_n est la partie de P_{n+1} tronquée au degré $2^n - 1$, il existe donc une série entière, $S(z) = \displaystyle\sum_{p=0}^{\infty} u_p z^p$, dont les P_n sont des sommes partielles.

Comme $|u_p z^p| = |z^p|$ pour tout p, $\boxed{\text{le rayon de convergence est égal à 1.}}$

10.b) Supposons que la somme de la série S ait un zéro z_0 tel que $|z_0| < \dfrac{1}{2}$.

On a alors $u_0 = -\displaystyle\sum_{p=1}^{\infty} u_p z_0^p$, d'où $\left|u_0\right| \leqslant \displaystyle\sum_{p=1}^{\infty} \left|z_0^p\right| = \dfrac{\left|z_0\right|}{1 - \left|z_0\right|} < 1$

d'où contradiction.

⋆ ⋆ ⋆ ⋆
⋆ ⋆ ⋆
⋆ ⋆
⋆