Corrigé DS n° 1

Exercice 1 :

(1) a) Soient A et B comme dans l'énoncé.

i) Alors : $X \mid X(A'B-AB') + X(A^2-B^2)$ donc $X \mid AB$.

Or X est un polynôme irréductible donc, d'après le cours, $X \mid A$ ou $X \mid B$.

Mais on ne peut pas avoir $X \mid A$ et $X \mid B$, puisque $A \wedge B = 1$.

Donc X divise un et un seul des deux polynômes.

ii) * Supp., par ex., $d^\circ A > d^\circ B$. Notons $A = a_n X^n + \dots + a_1 X + a_0$ $\quad a_n \neq 0$

$B = b_m X^m + \dots + b_1 X + b_0$ $\quad b_m \neq 0$, $m < n$

(Rem : si $A=0$ ou $B=0$, alors, en remplaçant dans (1), on aurait $A=B=0$.

Ce cas étant sans intérêt, on peut supposer A et B non nuls).

Le terme de plus haut degré de $X(A'B-AB')$ est $(ma_nb_m - ma_nb_m)X^{n+m}$

et celui de $X(A^2-B^2)$ est $a_n^2 X^{2n+1}$, et celui de aAB est $a a_n b_m X^{n+m}$.

Puisque $2n+1 > n+m$, le terme de + haut degré de $X(A'B-AB') + X(A^2-B^2) + aAB$ est égal à $a_n^2 X^{2n+1}$. Compte tenu de (1), on devrait avoir $a_n^2 = 0$, ce qui est exclu.

On procède de la même façon si on suppose $d^\circ A < d^\circ B$.

En conclusion : $d^\circ A = d^\circ B$.

* On a donc $n = m$. Avec les notations précédentes, le terme de plus haut degré de $X(A'B-AB') + X(A^2-B^2) + aAB$ est $(a_n^2 - b_n^2)X^{2n+1}$. On a donc $a_n^2 = b_n^2$ soit $a_n = \pm b_n$.

iii) Supposons que $X \mid B$. La relation (1) s'écrit aussi : $XB(A'-B) + XA(A-B') + aAB = 0$

donc $A \mid XB(A'-B)$. Or X ne divise pas A, donc $X \wedge A = 1$ (X irréductible)

et, puisque $A \wedge B = 1$, on a $A \wedge XB = 1$. D'après le th. de Gauss, on a donc :

$A \mid A'-B$. Il existe donc $Q \in \mathbb{R}[X]$ tq : $B - A' = QA$.

Mais $d^\circ(B-A') = d^\circ B = d^\circ A$, d'où $Q = $ cste. Et, puisque les coefficients dominants de A et B sont égaux au signe près, on a : $B - A' = \varepsilon A$ avec $\varepsilon = \pm 1$.

b) * On a : $B - A' = \varepsilon A$ d'où (1) $\Rightarrow XB(-\varepsilon A) + XA(A-B') + aAB = 0$

$\Rightarrow -\varepsilon XB + X(A-B') + aB = 0$ (3)

(on a supposé $A \neq 0$)

* On a ensuite : $B' = A'' + \varepsilon A'$ d'où :

$$(3) \Rightarrow -\varepsilon XB + X(A - A'' - \varepsilon A') + aB = 0$$
$$\Rightarrow -\varepsilon X(A' + \varepsilon A) + X(A - A'' - \varepsilon A') + a(A' + \varepsilon A) = 0$$
$$\Rightarrow \underline{X(2\varepsilon A' + A'') = a(A' + \varepsilon A)} \quad (4) \qquad (\text{car } \varepsilon^2 = 1)$$

---

c) Soit $a_n X^n$ le terme de plus haut degré de A ($a_n \neq 0$). Alors, le terme de plus haut degré de $X(2\varepsilon A' + A'')$ est $2\varepsilon n a_n X^n$, et celui de $a(A' + \varepsilon A)$ est $a a_n \varepsilon X^n$.

On a donc, d'après (4) : $a a_n = 2n a_n$, d'où $\underline{a = 2n}$

Ainsi, a est un entier pair (et le degré de A est forcément $\frac{a}{2}$).

---

d) On sait que X divise A ou (exclusif) B.

Si on avait $X | A$, on trouverait, de la même façon que ci-dessus, que B vérifie la relation $X(2\varepsilon B' + B'') = -a(\varepsilon B + B')$ (car, si (A, B) est solution de (1), (B, A) est solution de la même équation mais avec $-a$ à la place de a).

Si p désigne le degré de B, on trouverait alors, comme en 1.c, $a = -2p$ ce qui contredit $a = 2n > 0$!

<u>On a donc néc^t $X | B$.</u>

---

2 a) On procède par récurrence sur k :

- pour $k = 2$, la relation s'écrit : $XA'' = 2\varepsilon n A + (2n - 2\varepsilon X)A'$, ce qui découle directement de (4) (puisque $a = 2n$)
- supp. la relation démontrée à l'ordre k. Alors, en dérivant, on obtient :

$$XA^{(k+1)} + A^{(k)} = 2\varepsilon(n - k + 2)A^{(k-1)} + (2n - k + 2 - 2\varepsilon X)A^{(k)} - 2\varepsilon A^{(k-1)}$$

d'où : $$XA^{(k+1)} = 2\varepsilon(n - (k+1) + 2)A^{(k-1)} + (2n - (k+1) + 2 - 2\varepsilon X)A^{(k)}$$

ce qui est la relation à l'ordre $k+1$: <u>cqfd</u>.

---

b) Supposons $A(0) = 0$. Puisque $X | B$, on a $B(0) = 0$ d'où, d'après (2), $A'(0) = 0$.

On en déduit alors facilement par récurrence (en faisant $X = 0$ dans la relation (5)), que $A^{(k)}(0) = 0$ pour $k \in [\![0, n]\!]$. On aurait alors $A^{(n)}(0) = 0$, i.e. que le coeff. dominant de A serait nul : contradiction.

Ainsi, $\underline{A(0) \neq 0}$ (et, par suite, <u>X ne divise pas A</u>)

c) Soit P tq $P | A$ et $P | B$. Alors, $P | A'$ d'après (2). Puis, par récurrence, si

$P \mid A^{(k-1)}$ et $P \mid A^{(k-2)}$, alors $P \mid X A^{(k)}$. Mais $P \wedge X = 1$ (car sinon, X étant irréductible, on aurait $X \mid P$ d'où $X \mid A\ldots$). D'après le th. de Gauss, on a alors $P \mid A^{(k)}$, ce qui achève la récurrence. (3)

On en déduit que $P \mid A^{(n)}$; or $A^{(n)} = cste$, d'où $P = cste$ i.e. $\underline{A \wedge B = 1}$

---

(3) a) * Soit $A = \sum_{k=0}^{n} a_k X^k$, avec $a_n = 1$, vérifiant (4). On a alors :

$$A' = \sum k a_k X^{k-1} \qquad A'' = \sum k(k-1) a_k X^{k-2}$$

d'où $X\left(2\varepsilon \sum k a_k X^{k-1} + \sum k(k-1) a_k X^{k-2}\right) = 2n\left(\varepsilon \sum a_k X^k + \sum k a_k X^{k-1}\right)$

soit : $2\varepsilon \sum k a_k X^k + \sum k(k-1) a_k X^{k-1} = 2n\varepsilon \sum a_k X^k + 2n \sum k a_k X^{k-1}$

" $2\varepsilon \sum (k-n) a_k X^k = \sum [2nk - k(k-1)] a_k X^{k-1}$

En comparant les coefficients des termes de d° k dans les deux membres, on a :

$$2\varepsilon(k-n)a_k = [2n(k+1) - (k+1)k] a_{k+1} \quad \text{pour } \forall k \in [\![0, n-1]\!]$$

On en tire, pour $k \in [\![0, n]\!]$: $\underline{a_k = \varepsilon . \dfrac{(2n-k)(k+1)}{2(k-n)} a_{k+1}}$

* Sachant que $a_n = 1$, on peut alors calculer les a_k par récurrence (de $n-1$ à 0).

On montre alors : $\underline{a_{n-k} = \dfrac{\varepsilon^k (n+k)!}{(n-k)!\, k!\, (-2)^k}}$

Il y a donc $\underline{\text{deux}}$ polynômes solutions (selon la valeur de ε)

* $\underline{\text{Les coeff. ci-dessus sont entiers}}$: en effet, $2^k k! = 2^k \times 1 \times 2 \times \ldots \times k$

$= 2 \times 4 \times \ldots \times 2k$

$= \dfrac{(2k)!}{3 \times 5 \times \ldots \times (2k-1)}$

d'où $\dfrac{(n+k)!}{(n-k)!\, k!\, 2^k} = \dfrac{(n+k)!}{(n-k)!\, (2k)!} \times 3 \times 5 \times \ldots \times (2k-1) = C_{n+k}^{2k} \times 3 \times \ldots \times (2k-1) \in \mathbb{N}$.

b) * Soit (A, B) solution de (1). On a vu que $X \mid B$, donc A est solution de (4). D'après la question précédente, il est donc de la forme λA_0 ou λA_1, avec $\lambda \in \mathbb{R}$ et où A_0, A_1 sont les deux solutions (normalisées) trouvés ci-dessus.

Puis on a alors $B = A' + \varepsilon A$, d'après (2).

* Réciproquement : si $A = \lambda A_0$ ou $A = \lambda A_1$ et $B = A' + \varepsilon A$, alors A vérifie (4) (d'après la question 3.a), et on vérifie alors facilement que (A, B) vérifie (1).

Les solutions sont donc : $A = \lambda A_0$ ou $A = \lambda A_1$, $B = A' + \varepsilon A$ avec $\lambda \in \mathbb{R}^*$ quelconque et A_0, A_1 trouvés en 3.a.

* Cas $n=2$: D'après les formules du 3.a, on a alors (calculs...)

$$A_0 = X^2 - 3X + 3 \quad (\varepsilon = 1) \quad \text{et} \quad A_1 = X^2 + 3X + 3 \quad (\varepsilon = -1)$$

D'où les solutions : $\begin{cases} A = \lambda(X^2-3X+3) \text{ et } B = \lambda(X^2 - X) \\ A = \lambda(X^2+3X+3) \text{ et } B = \lambda(X^2-X) \end{cases}$ avec $\lambda \in \mathbb{R}$

Exercice 2:

Question préliminaire :

* Il est facile de vérifier que, si $z_i = \lambda_i z_n$ avec $\lambda_i \geq 0$ pour tout i, alors $\left|\sum_{i=1}^{n} z_i\right| = \sum_{i=1}^{n} |z_i|$
* Démontrons la réciproque par récurrence sur n.
  - pour $n=2$, il s'agit d'un résultat de Sup. Redémontrons-le :

si $|z_1+z_2| = |z_1| + |z_2|$ alors $|z_1+z_2|^2 = (|z_1|+|z_2|)^2$

d'où $(z_1+z_2)(\overline{z_1+z_2}) = |z_1|^2 + |z_2|^2 + 2|z_1||z_2|$

" $|z_1|^2 + z_2\bar{z_1} + z_1\bar{z_2} + |z_2|^2 = |z_1|^2 + |z_2|^2 + 2|z_1||z_2|$

" $Re(z_1\bar{z_2}) = |z_1||z_2| = |z_1\bar{z_2}|$

" $z_1\bar{z_2} \in \mathbb{R}_+$

Il existe donc $\lambda \geq 0$ tq $z_1\bar{z_2} = \lambda$, d'où $z_1 = \frac{\lambda}{\bar{z_2}} = \frac{\lambda}{|z_2|^2} z_2$, avec $\frac{\lambda}{|z_2|^2} \geq 0$.

- Supposons le résultat démontré à l'ordre n, et soient $z_1, \dots z_{n+1}$ avec $z_{n+1} \neq 0$ tq $|z_1+\dots+z_{n+1}| = |z_1|+|z_2|+\dots+|z_{n+1}|$. Alors

  • $|z_1+\dots+z_n| = |z_1|+\dots+|z_n|$: en effet, on a $|z_1+\dots+z_n| \leq |z_1|+\dots+|z_n|$

et, si on avait $|z_1+\dots+z_n| < |z_1|+\dots+|z_n|$, on aurait $|z_1+\dots+z_{n+1}| \leq |z_1+\dots+z_n| + |z_{n+1}|$
$< |z_1|+\dots+|z_n| + |z_{n+1}|$

Si $z_1, \dots z_n$ sont tous nuls, le résultat voulu est acquis.
Sinon, il en existe au moins un non nul, par ex. z_n, et d'après l'hyp. de récurrence il existe $\lambda_1, \dots, \lambda_{n-1} \geq 0$ tq $z_i = \lambda_i z_n$ pour $i \in [\![1, n-1]\!]$

  • on a aussi $|z_1+\dots+z_{n+1}| = |z_1+\dots+z_n| + |z_{n+1}|$. En effet

on a $|z_1+\dots+z_{n+1}| \leq |z_1+\dots+z_n| + |z_{n+1}|$, et si on avait l'inégalité stricte, on aurait $|z_1+\dots+z_{n+1}| < |z_1+\dots+z_n| + |z_{n+1}| = |z_1|+\dots+|z_{n+1}|$.
D'après le résultat pour $n=2$, il existe $\lambda_n \geq 0$ tq $z_1+\dots+z_n = \lambda_n z_{n+1}$.

• On a alors : $\left(\sum_{i=1}^{n-1} \lambda_i + 1\right) z_n = \lambda_n z_{n+1}$ d'où $z_n = \dfrac{\lambda_n}{\sum_{i=1}^{n-1}\lambda_i + 1} z_{n+1}$ >0

et $z_i = \dfrac{\lambda_i \lambda_n}{\sum_{i=1}^{n} \lambda_{i+1}} z_{n+1}$ pour $i \in [\![1, n-1]\!]$: CQFD.

---

1) Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R}_+^*$ par :

$$f(x) = \frac{R(x)}{x^n} = 1 - \frac{A_{n-1}}{x} - \frac{A_{n-2}}{x^2} - \dots - \frac{A_1}{x^{n-1}} - \frac{A_0}{x^n}$$

Alors f est C^∞ sur $\mathbb{R}_+^*$ et $f'(x) = \dfrac{A_{n-1}}{x^2} + \dots + \dfrac{(n-1)A_1}{x^n} + \dfrac{n A_0}{x^{n+1}}$, d'où $f'(x) > 0$

pour $\forall x > 0$ $(A_0 \neq 0)$. Le tableau de variation de f est donc le suivant :

$$\begin{array}{c||ccc} x & 0 & & +\infty \\ \hline f & -\infty & \nearrow & 1 \end{array}$$

$\left(\lim\limits_{0^+} f = -\infty, \text{ car } f(x) \underset{0^+}{\sim} -\dfrac{A_0}{x^n}\right)$

Il résulte alors du "théorème de bijection" que f admet une et une seule racine sur $\mathbb{R}_+^*$, qui est aussi celle de R.

On obtient aussi le signe de f, qui est celui de R : $\begin{cases} R(x) < 0 \text{ si } x \in]0, r[\\ R(x) > 0 \text{ si } x > r \end{cases}$

* On a, puisque $A_i \leq A$ pour $\forall i$:

$\forall x \geq 0$, $R(x) \geq x^n - Ax^{n-1} - \dots - Ax - A$

d'où $R(1+A) \geq (1+A)^n - A\left[(1+A)^{n-1} + \dots + A + 1\right]$

$\geq (1+A)^n - A\left[\dfrac{(1+A)^n - 1}{(1+A) - 1}\right]$

$\geq (1+A)^n - \left[(1+A)^n - 1\right]$

≥ 1

Donc $R(1+A) > 0$ et d'après l'étude précédente : $\underline{r < 1+A}$

---

2) a) • $|S(z)| = |z^n + a_{n-1}z^{n-1} + \dots + a_1 z + a_0| \geq |z^n| - |a_{n-1}z^{n-1} + \dots + a_1 z + a_0|$ (car $|z_1 + z_2| \geq |z_1| - |z_2|$)

et, puisque $|a_{n-1}z^{n-1} + \dots + a_1 z + a_0| \leq A_{n-1}|z|^{n-1} + \dots + A_1 z + A_0$ (inég. triangulaire), on en déduit : $|S(z)| \geq |z^n| - A_{n-1}|z|^{n-1} - \dots - A_1 z - A_0$, soit $\underline{|S(z)| \geq R(|z|)}$

• Si z est racine de S, on a alors $S(z) = 0$ d'où $R(|z|) \leq 0$. L'étude du signe de R donne $\underline{|z| \leq r}$

b) Soit z une racine de S telle que $|z| = r$. On a alors $S(z) = R(|z|) = 0$, donc les inégalités écrites ci-dessus sont des égalités. On a donc, en particulier :

$$|a_{n-1}z^{n-1} + \dots + a_1 z + a_0| = |a_{n-1}||z|^{n-1} + \dots + |a_1||z| + |a_0|$$

Puisque $a_{n-1} \neq 0$ et $z \neq 0$ (car $r > 0$), on déduit du résultat préliminaire qu'il existe des réels $\lambda_i \geq 0$ tels que $a_i z^i = \lambda_i a_{n-1} z^{n-1}$ pour $i \in [\![0, n-2]\!]$.

Comme, d'autre part, $z^n = -a_{n-1} z^{n-1} - \dots - a_1 z - a_0$ (car $S(z)=0$), on a :

$$z^n = -\left(1 + \sum_{i=0}^{n-2} \lambda_i\right) a_{n-1} z^{n-1} = -\mu a_{n-1} z^{n-1}, \text{ en posant } \mu = 1 + \sum \lambda_i \quad \mu \geq 1$$

D'où $z = -\mu a_{n-1}$; et puisque $|z| = r$ et $\mu > 0$, on a nécessairement $\mu = \dfrac{r}{|a_{n-1}|}$

d'où $z = -r \dfrac{a_{n-1}}{|a_{n-1}|}$, et z est donc unique

---

(Ce résultat précédent peut tomber en défaut si on ne suppose plus $a_{n-1} \neq 0$.

Ex : $S(z) = z^n - 1$.

) $S = \dfrac{1}{\alpha_n}(X-1)P = X^{n+1} - \dfrac{\alpha_n - \alpha_{n-1}}{\alpha_n} X^n - \dfrac{\alpha_{n-1} - \alpha_{n-2}}{\alpha_n} X^{n-1} - \dots - \dfrac{\alpha_1 - \alpha_0}{\alpha_n} X - \dfrac{\alpha_0}{\alpha_n}$

$$= X^{n+1} - a_n X^n - \dots - a_1 X - a_0$$

où les a_i sont tous > 0 (car $0 < \alpha_0 < \alpha_1 < \dots < \alpha_n$). Or, avec les notations précédentes $R = S$ et, puisque 1 est racine de S, on a ici $r = 1$. Toute racine complexe de S est donc de module ≤ 1, et S a au plus une racine complexe de module 1 (c'est 1 !)

Donc, si z est racine de S et $z \neq 1$, on a $|z| < 1$.

Puisque $P(1) \neq 0$, les racines de P sont donc celles de S excepté 1, et ont donc bien toutes un module strictement inférieur à 1