**Matrices de transvection. Automorphismes de l'algèbre $\mathcal{L}(E)$.**
**INT 1990**

$\mathbb{R}$ est le corps des réels, $n$ un entier naturel donné, $n \geqslant 2$. On note $\mathcal{M}_n$ l'algèbre des matrices carrées d'ordre $n$ à coefficients réels, et $\mathcal{GL}_n$ le groupe des matrices carrées d'ordre $n$ inversibles. On note $I_n$ la matrice unité de $\mathcal{M}_n$.

Pour $i,j \in \{1,...,n\}$, on définit l'élément $E_{i,j}$ de $\mathcal{M}_n$ comme étant la matrice dont tous les éléments sont nuls sauf celui de la $i$-ième ligne et $j$-ième colonne valant 1.

On appelle matrice de transvection toute matrice de type $I_n + \lambda E_{ij}$, $\lambda \in \mathbb{R}$, $i \neq j$.

## Partie I

**1°)** **a.** Calculer les produits $E_{i,j}E_{h,k}$ pour $i,j,h,k \in \{1,...,n\}$.
**b.** Que peut-on dire de la famille $(E_{i,j})_{1\leqslant i,j\leqslant n}$?
**c.** Soient $\lambda,\mu \in \mathbb{R}, i,j,h,k \in \{1,...,n\}$, avec $i \neq j, h \neq k, j \neq h$. Calculer $(I_n + \lambda E_{i,j})(I_n + \mu E_{h,k})$. En déduire l'inverse de $I_n + \lambda E_{i,j}$.

**2°)** Soit $A \in \mathcal{M}_n$.
**a.** Montrer que l'addition à une ligne de $A$ d'un vecteur proportionnel à une autre ligne peut se faire en multipliant $A$ à gauche par une matrice de transvection.
**b.** Etablir un résultat analogue sur les colonnes.

**3°)** Soit $A \in \mathcal{M}_n$ de coefficients $a_{i,j}$. On suppose que la première ligne de $A$ ou sa première colonne possède un élément non nul.
Montrer qu'il existe deux matrices $P$ et $Q$ de $\mathcal{M}_n$, produits de matrices de transvection, telles que la matrice $B = PAQ$ soit une matrice de coefficients $b_{i,j}$ telle que $b_{1,1} = 1$ et $b_{i,1} = b_{1,i} = 0$ pour $2 \leqslant i \leqslant n$.
On pourra envisager les cas suivants: i) $a_{1,1} = 1$; ii) $\exists i > 1, a_{i,1} \neq 0$ ou $a_{1,i} \neq 0$; iii) $a_{1,1} \neq 1$ et $\forall i > 1, a_{1,i} = a_{i,1} = 0$.

**4°)** Soit $A \in \mathcal{M}_n$ et $r$ son rang, supposé strictement positif.
Montrer qu'il existe deux matrices $P$ et $Q$ de $\mathcal{M}_n$, produits de matrices de transvection, telles que la matrice $B = PAQ$ soit une matrice diagonale de coefficients $b_{i,j}$ telle que
i) $b_{i,i} = 1$ si $1 \leqslant i < r$; ii) $b_{i,i} = 0$ si $r < i \leqslant n$; iii) $b_{r,r} = d$ avec $d = 1$ si $r < n$ et $d = \det A$ si $r = n$.
Faire une démonstration par récurrence en commençant par le cas où $n = 2$.

**5°)** Montrer que le groupe des matrices carrées d'ordre $n$ de déterminant égal à 1 est engendré par les matrices de transvection.

**6°)** On suppose dans cette question seulement que $n \geqslant 3$. Soit $f : \mathcal{M}_n \to \mathbb{R}$, telle que
i) $\forall A,B \in \mathcal{M}_n, f(AB) = f(A)f(B)$;
ii) Pour toute matrice diagonale $A$, $f(A)$ est égal au produit des coefficients de la diagonale.
**a.** Montrer que tout matrice $I_n + aE_{\alpha,\beta}, \alpha \neq \beta$, peut s'écrire sous la forme:
$I_n + aE_{\alpha,\beta} = (I_n + \lambda E_{i,j})(I_n + \mu E_{h,k})(I_n + \lambda E_{i,j})^{-1}(I_n + \mu E_{h,k})^{-1}$, expression dans laquelle on précisera les valeurs de $\lambda,\mu,i,j,h,k$, avec $i \neq j, h \neq k$.
**b.** Calculer $f(A)$ si $A$ est une matrice de transvection.
**c.** Calculer $f(A)$ si $A$ est un élément quelconque de $\mathcal{M}_n$.

## Partie II

Si $M \in \mathcal{M}_n$, on note $\mathrm{Tr}(M)$ la trace de la matrice $M$.

**1°)** Vérifier que $M \mapsto \mathrm{Tr}(M)$ est une forme linéaire sur $\mathcal{M}_n$, telle que $\forall A,B \in \mathcal{M}_n, \mathrm{Tr}(AB) = \mathrm{Tr}(BA)$.

**2°)** Soit $\sigma$ une forme linéaire sur $\mathcal{M}_n$, telle que $\forall A,B \in \mathcal{M}_n, \sigma(AB) = \sigma(BA)$.
**a.** Soient $i,j \in \{1,...,n\}$, $i \neq j$, calculer $\sigma(E_{i,j})$.
**b.** Comparer $\sigma(E_{i,i})$ et $\sigma(E_{j,j})$ pour $i,j \in \{1,...,n\}$.
**c.** Montrer: $\exists \lambda \in \mathbb{R}, \forall M \in \mathcal{M}_n, \sigma(M) = \lambda \,\mathrm{Tr}(M)$.

**3°)** Soit $\mathcal{T}$ le sous-espace vectoriel de $M$ engendré par les matrices de la forme $AB - BA$, $A,B \in \mathcal{M}_n$, et soit $\mathcal{H} = \mathbb{R}I_n$. Montrer que $\dim \mathcal{T} = n^2 - 1$. En déduire que $\mathcal{M}_n = \mathcal{T} \oplus \mathcal{H}$.

**4°)** Pour $i,j \in \{1,...,n\}$, on pose $F_{i,j} = I_n + E_{i,j}$. Calculer pour $i,j,h,k \in \{1,...,n\}$, $h \neq k$, le produit matriciel $F_{h,k}^{-1} F_{i,j} F_{h,k}$.

**5°)** Soit $\theta$ une forme linéaire sur $\mathcal{M}_n$ telle que $\forall A \in \mathcal{M}_n, \forall B \in \mathcal{GL}_n, \theta(AB) = \theta(BA)$. Montrer: $\exists \lambda \in \mathbb{R}, \forall M \in \mathcal{M}_n, \theta(M) = \lambda \,\mathrm{Tr}(M)$.

## Partie III

Soit $E$ un $\mathbb{R}$-espace vecoriel de dimension $n \geqslant 2$, et soit $E^*$ son dual. On note $(e_1,...,e_n)$ une base de $E$, et $(e_1^*,...,e_n^*)$ sa duale.
On note $\mathrm{Ł}(E)$ l'algèbre des endomorphismes de $E$, $\mathcal{GL}(E)$ le groupe de ses automorphismes, $Id$ l'endomorphisme identité.
On appelle automorphisme d'algèbre de $\mathrm{Ł}(E)$ toute application $A$, linéaire et bijective de $E$ dans $E$, qui de plus vérifie: $\forall u,v \in \mathrm{Ł}(E), A(u \circ v) = A(u) \circ A(v)$.
On note $\mathcal{A}ut(E)$ le groupe (pour la composition des applications) des automorphismes de $E$.
Soit $g \in \mathcal{GL}(E)$, on définit $A_g : \mathrm{Ł}(E) \to \mathrm{Ł}(E), u \mapsto A_g(u) = g \circ u \circ g^{-1}$. On dit que $A_g$ est l'automorphisme intérieur défini par $g$.

**1°)** Montrer que l'application $\chi : g \mapsto A_g$ est un morphisme de groupes de $\mathcal{GL}(E)$ vers $\mathcal{A}ut(E)$. Cette application $\chi$ est-elle injective?

**2°)** **a.** Soit $g \in \mathrm{Ł}(E)$ tel que $\forall x \in E, (x,g(x))$ est une famille liée. Montrer que $g$ est une homothétie.
**b.** En déduire le noyau de $\chi$.

**3°)** Pour $(\varphi,x) \in E^* \times E$, on définit une application $u_{\varphi,x} : E \to E, y \mapsto \varphi(y)x$.
**a.** Montrer que $u_{\varphi,x}$ est un endomorphisme de $E$, préciser son image et son noyau.
**b.** à quelle condition nécessaire et suffisante sur $(\varphi,x)$ $u_{\varphi,x}$ est-il un projecteur non nul?

**4°)** Dans la suite, pour $i,j \in \{1,...,n\}$, on notera $u_{i,j}$ l'application $u_{e_j^*,e_i}$.
**a.** Pour $i,j,h,k \in \{1,...,n\}$, calculer $u_{i,j} \circ u_{h,k}$.
**b.** Que peut-on dire de la famille $(u_{i,j})_{1 \leqslant i,j \leqslant n}$?

**5°)** Soit $\mathcal{P}$ l'ensemble des projecteurs non nuls de $E$.
**a.** Démontrer que la relation $\leqslant$ définie sur $\mathcal{P}$ par:
$\forall p,q \in \mathcal{P}, (p \leqslant q) \iff (p = p \circ q = q \circ p)$
est une relation d'ordre sur $\mathcal{P}$. Est-ce une relation d'ordre totale?
**b.** On appelle élément minimal de $\mathcal{P}$ pour $\leqslant$ tout élément $p \in \mathcal{P}$ tel que: $\forall q \in \mathcal{P}, q \leqslant p \Rightarrow q = p$.
Etablir l'équivalence des énoncés suivants:
i) $p$ est un projecteur de rang 1.
ii) $p$ est un projecteur minimal de $\mathcal{P}$ pour la relation $\leqslant$.
iii) $\exists (\varphi,x) \in E^* \times E$ tel que $p = u_{\varphi,x}$ et $\varphi(x) = 1$.

**6°)** Soit $A$ un automorphisme de l'algèbre $\mathrm{Ł}(E)$.
**a.** Que peut-on dire de $A(p)$ si $p \in \mathcal{P}$?

**b.** Que peut-on dire de $A(p)$ si $p \in \mathcal{P}$ est un élément minimal pour $\leqslant$?
**c.** En déduire l'existence d'une famille $(\varepsilon_1,...,\varepsilon_n)$ de vecteurs de $E$, et une famille $(\varphi_1,...,\varphi_n)$ de formes linéaires sur $E$, telles que:
i) $\forall i \in \{1,...,n\}, \varphi_i(\varepsilon_i) = 1$; ii) $\forall i \in \{1,...,n\}, A(u_{i,i}) = u_{\varphi_i,\varepsilon_i}$.
**d.** Calculer $\varphi_i(\varepsilon_j)$ pour $i,j \in \{1,...,n\}$.
Que peut-on en déduire pour les familles $(\varepsilon_1,...,\varepsilon_n)$ et $(\varphi_1,...,\varphi_n)$?

**7°)** Soient $i,j \in \{1,...,n\}$.
**a.** Pour $k \in \{1,...,n\}, k \neq j$, calculer $A(u_{i,j}) \circ u_{\varphi_k,\varepsilon_k}$.
En déduire le rang et le noyau de $A(u_{i,j})$.
**b.** Calculer $A(u_{i,j}) \circ A(u_{j,i})$. En déduire l'image de $A(u_{i,j})$.
**c.** Montrer qu'il existe un réel non nul $\lambda_{i,j}$ tel que $A(u_{i,j}) = \lambda_{i,j} u_{\varphi_j,\varepsilon_i}$.

**8°)** **a.** Montrer que pour $i,j,k \in \{1,...,n\}$, $\lambda_{i,j}\lambda_{j,k} = \lambda_{i,k}$.
**b.** En déduire: $\forall i,j \in \{1,...,n\}$, $\lambda_{i,j} = \dfrac{\lambda_{i,1}}{\lambda_{j,1}}$.

**9°)** **a.** Montrer qu'il existe une base $(\alpha_1,...,\alpha_n)$ de $E$, dont la base duale est notée $(\alpha_1^*,..,\alpha_n^*)$, telle que $\forall i,j \in \{1,...,n\}$, $A(u_{i,j}) = u_{\alpha_j^*,\alpha_i}$.
**b.** Montrer qu'il existe un élément $g \in \mathcal{GL}(E)$ tel que $\forall i,j \in \{1,...,n\}, A(u_{i,j}) = g \circ u_{i,j} \circ g^{-1}$.
**c.** Conclure.

**10°)** Quelles sont toutes les formes linéaires $\varphi$ sur Ł$(E)$ telles que, pour tout $A \in \mathcal{A}ut(E)$, on ait: $\forall u \in$ Ł$(E), \varphi(A(u)) = \varphi(u)$?

---