CORRIGÉ DM N°5 : PRODUIT TENSORIEL DE MATRICES 2×2. ENSIETA 1996

PARTIE I :

1. D'après les propriétés des lois dans la $\mathbb{C}$-algèbre $\mathbb{M}_2(\mathbb{C})$, on a facilement :

$$\forall (X,Y)\in(\mathbb{M}_2(\mathbb{C}))^2,\ \forall\lambda\in\mathbb{C},\ \Phi(\lambda X+Y)=A(\lambda X+Y)B=\lambda AXY+AYB=\lambda\Phi(X)+\Phi(Y)$$

donc Φ est un endomorphisme de $\mathbb{M}_2(\mathbb{C})$.

2. Si $B=\begin{pmatrix} b_1 & b_3\\ b_2 & b_4\end{pmatrix}$ et $A=\begin{pmatrix} a_1 & a_3\\ a_2 & a_4\end{pmatrix}$, on calcule, pour tout $i\in[\![1,4]\!]$, AE_iB. On trouve

$$\Phi(E_1)=b_1a_1E_1+b_1a_2E_2+b_3a_1E_3+b_3a_2E_4\qquad \Phi(E_2)=b_1a_3E_1+b_1a_4E_2+b_3a_3E_3+b_3a_4E_4$$

$$\Phi(E_3)=b_2a_1E_1+b_2a_2E_2+b_4a_1E_3+b_4a_2E_4\qquad \Phi(E_4)=b_2a_3E_1+b_2a_4E_2+b_4a_3E_3+b_4a_4E_4$$

On a donc :

$$A\circ B=\begin{pmatrix} b_1a_1 & b_1a_3 & b_2a_1 & b_2a_3\\ b_1a_2 & b_1a_4 & b_2a_2 & b_2a_4\\ b_3a_1 & b_3a_3 & b_4a_1 & b_4a_3\\ b_3a_2 & b_3a_4 & b_4a_2 & b_4a_4\end{pmatrix}$$

ce qui s'écrit, par blocs : $\boxed{A\circ B=\begin{bmatrix} b_1A & b_2A\\ b_3A & b_4A\end{bmatrix}.}$

3. Soient A,B,P,Q des éléments de $\mathbb{M}_2(\mathbb{C})$; notons respectivement Φ et Ψ les endomorphismes de $\mathbb{M}_2(\mathbb{C})$ définis par

$$\forall X\in\mathbb{M}_2(\mathbb{C}),\quad \Phi(X)=AXB\quad\text{et}\quad\Psi(X)=PXQ$$

Les matrices de ces endomorphismes, dans la base $\mathscr{B}$ sont resp. $A\circ B$ et $P\circ Q$.
$(P\circ Q).(A\circ B)$ est donc la matrice dans cette même base de l'endomorphisme $\Psi\circ\Phi$. Or, pour tout X de $\mathbb{M}_2(\mathbb{C})$, $(\Psi\circ\Phi)(X)=P(AXB)Q=(PA)X(BQ)$; la matrice de $\Psi\circ\Phi$ dans $\mathscr{B}$ est donc $(PA)\circ(QB)$.

On en déduit l'égalité : $\boxed{(P\circ Q).(A\circ B)=(PA)\circ(QB).}$

4.
- $A\circ I=\begin{bmatrix} A & 0\\ 0 & A\end{bmatrix}$. Le calcul du déterminant par blocs donne : $\boxed{\det(A\circ I)=(\det A)^2.}$
- En posant $A=\begin{pmatrix} a_1 & a_3\\ a_2 & a_4\end{pmatrix}$, on a $I\circ A=\begin{pmatrix} a_1 & 0 & a_2 & 0\\ 0 & a_1 & 0 & a_2\\ a_3 & 0 & a_4 & 0\\ 0 & a_3 & 0 & a_4\end{pmatrix}$. Si on échange dans cette matrice la 2-ième et la 4-ième colonne, ainsi que la 2-ième et la 4-ième ligne, on obtient une matrice de même déterminant (puisqu'on a fait deux transpositions, chacune de signature -1) ; on reconnait dans la matrice transformée la matrice $({}^tA\circ I)$. Puisque $\det {}^tA=\det A$, le calcul précédent donne donc : $\boxed{\det(I\circ A)=(\det A)^2.}$
- D'après I.3, $(I\circ B).(A\circ I)=(AI)\circ(IB)=A\circ B$; on déduit alors directement des résultats précédents : $\boxed{\det(A\circ B)=(\det A)^2(\det B)^2.}$

PARTIE II :

1. Pour tout $i\in[\![1,k]\!]$, notons Φ_i l'endomorphisme de $\mathbb{M}_2(\mathbb{C})$ défini par $\Phi_i(X)=A_iXB_i$. On a alors $H=\sum_{i=1}^{k}\Phi_i$, donc H est un endomorphisme (l'ensemble $\mathscr{L}$ des endomorphismes de $\mathbb{M}_2(\mathbb{C})$ est un espace vectoriel !).

La matrice de Φ_i dans la base $\mathscr{B}$ est $A_i\circ B_i$, donc $\widehat{H}=\sum_{i=1}^{k}A_i\circ B_i=\sum_{i=1}^{k}\begin{bmatrix} b_1^{(i)}A_i & b_2^{(i)}A_i\\ b_3^{(i)}A_i & b_4^{(i)}A_i\end{bmatrix}=\begin{bmatrix} U_1 & U_3\\ U_2 & U_4\end{bmatrix}$ avec :

$$U_1=\sum_{i=1}^{k}b_1^{(i)}A_i\quad U_2=\sum_{i=1}^{k}b_3^{(i)}A_i\quad U_3=\sum_{i=1}^{k}b_2^{(i)}A_i\quad U_4=\sum_{i=1}^{k}b_4^{(i)}A_i$$

2. • Soit $(A_1,\dots,A_k)$ un système libre de $\mathbb{M}_2(\mathbb{C})$ (on a forcément $k\leqslant 4$, puisque $\dim\mathbb{M}_2(\mathbb{C})=4$!).
Soient $B_1,\dots,B_k$ et $B'_1,\dots,B'_k$ des matrices de $\mathbb{M}_2(\mathbb{C})$, H,H' les endomorphismes de $\mathbb{M}_2(\mathbb{C})$ définis par $H(X)=\sum_{i=1}^{k}A_iXB_i$ et $H'(X)=\sum_{i=1}^{k}A_iXB'_i$, et $\widehat{H},\widehat{H'}$ leurs matrices dans la base $\mathscr{B}$.
Notons enfin, pour tout $i\in[\![1,k]\!]$: $B_i=\begin{pmatrix}b_1^{(i)} & b_3^{(i)}\\ b_2^{(i)} & b_4^{(i)}\end{pmatrix}$ et $B'_i=\begin{pmatrix}b_1'^{(i)} & b_3'^{(i)}\\ b_2'^{(i)} & b_4'^{(i)}\end{pmatrix}$.
Si $\widehat{H}=\widehat{H'}$, on déduit alors des calculs du II.1 que, pour tout $j\in[\![1,4]\!]$, $\sum_{i=1}^{k}b_j^{(i)}A_i=\sum_{i=1}^{k}b_j'^{(i)}A_i$. Comme la famille $(A_i)_{1\leqslant i\leqslant k}$ est libre, on en tire $b_j^{(i)}=b_j'^{(i)}$ pour tous i et j.
Par conséquent, $\boxed{\text{pour tout } i\in[\![1,k]\!],\ B_i=B'_i\ .}$

• Soit $(B_1,\dots,B_k)$ un système libre de $\mathbb{M}_2(\mathbb{C})$, et $A_1,\dots,A_k,A'_1,\dots,A'_k$ des matrices de $\mathbb{M}_2(\mathbb{C})$ telles que, pour tout $X\in\mathbb{M}_2(\mathbb{C})$, on ait $\sum_{i=1}^{k}A_iXB_i=\sum_{i=1}^{k}A'_iXB_i$.
On aura alors, en transposant : $\sum_{i=1}^{k}{}^tB_i{}^tX{}^tA_i=\sum_{i=1}^{k}{}^tB_i{}^tX{}^tA'_i$ pour tout $X\in\mathbb{M}_2(\mathbb{C})$, donc aussi, pour tout $Y\in\mathbb{M}_2(\mathbb{C})$: $\sum_{i=1}^{k}{}^tB_iY{}^tA_i=\sum_{i=1}^{k}{}^tB_iY{}^tA'_i$.
Mais la famille $({}^tB_1,\dots,{}^tB_k)$ est encore libre (on peut faire une vérification directe en revenant à la définition, ou, mieux, remarquer que l'application $M\mapsto{}^tM$ est un automorphisme de $\mathbb{M}_2(\mathbb{C})$). Il suffit alors d'appliquer directement le résultat précédent ; on en tire ${}^tA_i={}^tA'_i$ pour tout i, donc $\boxed{\text{pour tout } i\in[\![1,k]\!],\ A_i=A'_i\ .}$

3. • Soit $L\in\mathscr{L}$, et $\widehat{L}=\begin{bmatrix}V_1 & V_3\\ V_2 & V_4\end{bmatrix}$ sa matrice dans la base $\mathscr{B}$.
Puisque (E_1,E_2,E_3,E_4) est une base de $\mathbb{M}_2(\mathbb{C})$, il existe des complexes $d_k^{(i)}$ avec $1\leqslant i,k\leqslant 4$ tels que

$$V_1=\sum_{i=1}^{4}d_1^{(i)}E_i\quad V_2=\sum_{i=1}^{4}d_3^{(i)}E_i\quad V_3=\sum_{i=1}^{4}d_2^{(i)}E_i\quad V_4=\sum_{i=1}^{4}d_4^{(i)}E_i$$

En notant alors $D_i=\begin{pmatrix}d_1^{(i)} & d_3^{(i)}\\ d_2^{(i)} & d_4^{(i)}\end{pmatrix}$ pour $1\leqslant i\leqslant 4$, les calculs faits en II.1 donnent directement :

$$\boxed{\widehat{L}=\sum_{i=1}^{4}E_i\circ D_i\ .}$$

• Soit maintenant une décomposition de L, avec $L\neq 0$, de longueur β minimale : $L(X)=\sum_{i=1}^{\beta}C_iXD_i$ pour tout $X\in\mathbb{M}_2(\mathbb{C})$.
— si $\beta=1$, on a $L(X)=C_1XD_1$ pour toute X ; L n'étant pas nul, on en déduit C_1 et D_1 non nulles, donc les familles $\{C_1\}$ et $\{D_1\}$ sont libres !
— si $2\leqslant\beta\leqslant 4$:
Supposons que la famille $(C_1,\dots,C_\beta)$ soit liée ; une de ces matrices est alors combinaison linéaire des autres ; pour simplifier les notations, supposons qu'il s'agisse de C_β : $C_\beta=\sum_{i=1}^{\beta-1}\lambda_iC_i$, avec $\lambda_i\in\mathbb{C}$. On aurait alors, pour tout $X\in\mathbb{M}_2(\mathbb{R})$:

$$L(X)=\sum_{i=1}^{\beta-1}C_iXD_i+C_\beta XD_\beta=\sum_{i=1}^{\beta-1}C_iX(\lambda_iD_\beta+D_i)$$

et on obtiendrait une décomposition de L de longueur $\beta-1$, ce qui contredit la définition de β.
On pourrait évidemment faire de même en supposant $(D_1,\dots,D_\beta)$ liée. En conclusion :
$\boxed{\text{Les familles } \{C_1,\dots,C_\beta\} \text{ et } \{D_1,\dots,D_\beta\} \text{ sont libres.}}$

4. **a)** $T(E_1)=E_1\quad T(E_2)=E_3\quad T(E_3)=E_2\quad T(E_4)=E_4$, donc $\widehat{T}=\begin{pmatrix}1&0&0&0\\0&0&1&0\\0&1&0&0\\0&0&0&1\end{pmatrix}$, soit $\boxed{\widehat{T}=\begin{bmatrix}E_1 & E_2\\ E_3 & E_4\end{bmatrix}\ .}$

b) Soit $\mathrm{T(X)} = \displaystyle\sum_{i=1}^{\beta} \mathrm{C}_i \mathrm{X} \mathrm{D}_i$ une décomposition de T. En utilisant II.1, et avec les mêmes notations, on a, compte tenu du calcul précédent : $\forall k \in [\![1,4]\!]$, $\mathrm{E}_k = \displaystyle\sum_{i=1}^{\beta} d_k^{(i)} \mathrm{C}_i$. Les E_k sont donc dans le sous-espace vectoriel de $\mathbb{M}_2(\mathbb{C})$ engendré par $(\mathrm{C}_1,\dots,\mathrm{C}_\beta)$; comme les E_k forment une base de $\mathbb{M}_2(\mathbb{C})$, on a nécessairement $\beta \geqslant 4$, et, par suite $\boxed{\beta = 4}$.

c) En utilisant les calculs précédents, il est facile de montrer que : $\boxed{\widehat{\mathrm{T}} = \displaystyle\sum_{i=1}^{4} \mathrm{E}_i \circ \mathrm{E}_i}$.

PARTIE III :

1. f est un endomorphisme d'un $\mathbb{C}$-espace vectoriel , donc il admet (au moins) une valeur propre (car son polynôme caractéristique est scindé dans $\mathbb{C}[\mathrm{X}]$). Il existe donc $\lambda \in \mathbb{C}$ et $u \in \mathrm{E}$, $u \neq 0$ tels que $f(u) = \lambda u$.

Supposons que f ait la même matrice A dans toute base de E. Pour tout $i \in [\![1,n]\!]$, on peut toujours trouver une base $\mathscr{B}_i$ de E dont le i-ième vecteur soit u ; la i-ème colonne de la matrice de f dans $\mathscr{B}_i$ (donc de A) est donc ${}^t(0,\dots,\lambda,0,\dots,0)$ (où λ est à la i-ème place). Donc $\mathrm{A} = \lambda \mathrm{I}_n$, et $f = \lambda \mathrm{Id}_{\mathrm{E}}$.

Soit X une matrice de $\mathbb{M}_n(\mathbb{C})$ telle que, pour toute matrice $\mathrm{S} \in \mathrm{GL}_n(\mathbb{C})$, $\mathrm{SXS}^{-1} = \mathrm{X}$; si f désigne l'endomorphisme de E de matrice X dans une certaine base $\mathscr{B}$ de E, f aura donc pour matrice X dans toute base de E (d'après le cours sur les changements de base : si P est la matrice de passage de $\mathscr{B}$ à une base $\mathscr{B}'$, la matrice de f dans $\mathscr{B}'$ est $\mathrm{P}^{-1}\mathrm{XP}$) ; d'après ce qui précède, X est une matrice scalaire.

Autre démonstration possible : la relation précédente exprime aussi le fait que X commute avec toute matrice inversible. On pouvait alors reprendre un exercice fait en classe...

2. **a)** On a : $\forall \mathrm{X} \in \mathbb{M}_2(\mathbb{C})$, $\Gamma(\mathrm{X}) = \Gamma(\mathrm{XI}) = \Gamma(\mathrm{X})\Gamma(\mathrm{I}) = \Gamma(\mathrm{IX}) = \Gamma(\mathrm{I})\Gamma(\mathrm{X})$.
Γ étant surjective, on en déduit : $\forall \mathrm{Y} \in \mathbb{M}_2(\mathbb{C})$, $\mathrm{Y}\Gamma(\mathrm{I}) = \Gamma(\mathrm{I})\mathrm{Y} = \mathrm{Y}$, donc $\Gamma(\mathrm{I})$ est l'élément neutre de $\mathbb{M}_2(\mathbb{C})$ pour la loi $\times$, donc $\Gamma(\mathrm{I}) = \mathrm{I}$.
Γ étant injective, on en déduit : $\Gamma(\mathrm{X}_0) = \mathrm{I} = \Gamma(\mathrm{I}) \Longrightarrow \mathrm{X}_0 = \mathrm{I}$.

b)
- Soit X une matrice inversible de $\mathbb{M}_2(\mathbb{C})$. On a $\mathrm{XX}^{-1} = \mathrm{X}^{-1}\mathrm{X} = \mathrm{I}$ d'où $\Gamma(\mathrm{X})\Gamma(\mathrm{X}^{-1}) = \Gamma(\mathrm{X}^{-1})\Gamma(\mathrm{X}) = \Gamma(\mathrm{I}) = \mathrm{I}$. On en déduit que $\Gamma(\mathrm{X})$ est inversible, d'inverse $\Gamma(\mathrm{X}^{-1})$.
- Réciproquement, supposons $\Gamma(\mathrm{X})$ inversible, et notons Y son inverse. Γ étant surjective, il existe une matrice Z telle que $\mathrm{Y} = \Gamma(\mathrm{Z})$; de la relation $\Gamma(\mathrm{X})\Gamma(\mathrm{Z}) = \Gamma(\mathrm{Z})\Gamma(\mathrm{X}) = \mathrm{I}$, on déduit alors $\Gamma(\mathrm{XZ}) = \Gamma(\mathrm{ZX}) = \mathrm{I}$, d'où, d'après la question 2.a, $\mathrm{XZ} = \mathrm{ZX} = \mathrm{I}$. X est donc inversible, d'inverse Z .

3. Pour toutes $\mathrm{X},\mathrm{Y} \in \mathbb{M}_2(\mathbb{C})$, $\Gamma(\mathrm{X})\Gamma(\mathrm{Y}) = \left(\displaystyle\sum_{i=1}^{\beta} \mathrm{A}_i \mathrm{X} \mathrm{B}_i\right)\Gamma(\mathrm{Y}) = \Gamma(\mathrm{XY}) = \displaystyle\sum_{i=1}^{\beta} \mathrm{A}_i \mathrm{XY} \mathrm{B}_i$, soit : $\displaystyle\sum_{i=1}^{\beta} \mathrm{A}_i \mathrm{X}(\mathrm{YB}_i) = \displaystyle\sum_{i=1}^{\beta} \mathrm{A}_i \mathrm{X}(\mathrm{B}_i\Gamma(\mathrm{Y}))$.
D'après II.3, la décomposition de Γ étant de longueur minimale, les familles $(\mathrm{A}_1,\dots,\mathrm{A}_\beta)$ et $(\mathrm{B}_1,\dots,\mathrm{B}_\beta)$ sont libres, puis, en utilisant II.2, on en déduit $\boxed{\mathrm{YB}_i = \mathrm{B}_i\Gamma(\mathrm{Y})}$.

De la même façon, la relation $\Gamma(\mathrm{YX}) = \Gamma(\mathrm{Y})\Gamma(\mathrm{X})$ s'écrit : $\displaystyle\sum_{i=1}^{\beta} (\mathrm{A}_i\mathrm{Y})\mathrm{XB}_i = \displaystyle\sum_{i=1}^{\beta} (\Gamma(\mathrm{Y}))\mathrm{A}_i)\mathrm{XB}_i$, et on conclut de même $\boxed{\mathrm{A}_i\mathrm{Y} = \Gamma(\mathrm{Y})\mathrm{A}_i}$ pour toute $\mathrm{Y} \in \mathbb{M}_2(\mathbb{C})$ et tout $i \in [\![1,\beta]\!]$.

4.
- Pour toute matrice Y de $\mathbb{M}_2(\mathbb{R})$ et tous $i,j \in [\![1,\beta]\!]$, on a donc, d'après le résultat précédent :
$$\Gamma(\mathrm{Y}^{-1})\mathrm{A}_i\mathrm{B}_j\Gamma(\mathrm{Y}) = (\mathrm{A}_i\mathrm{Y}^{-1})(\mathrm{YB}_j) = \mathrm{A}_i\mathrm{B}_j.$$
- Soit S une matrice inversible, et $\mathrm{Y} = \Gamma^{-1}(\mathrm{S})$; Y est inversible et $\mathrm{S}^{-1} = \Gamma(\mathrm{Y}^{-1})$ d'après 2.b.
La relation trouvée précédemment s'écrit alors $\mathrm{S}^{-1}\mathrm{A}_i\mathrm{B}_j\mathrm{S} = \mathrm{A}_i\mathrm{B}_j$, pour toute matrice inversible S. D'après III.1, les matrices $\mathrm{A}_i\mathrm{B}_j$ sont scalaires.
- Si toutes les matrices $\mathrm{A}_i\mathrm{B}_i$ étaient nulles, on aurait $\Gamma(\mathrm{I}) = \displaystyle\sum_{i=1}^{\beta} \mathrm{A}_i\mathrm{B}_i = 0$, ce qui est faux !
Il existe donc i_0 tel que la matrice $\mathrm{A}_{i_0}\mathrm{B}_{i_0}$ soit non nulle. Puisque c'est une matrice scalaire, elle est donc inversible, et, par suite, B_{i_0} est inversible.
En utilisant les résultats du III.3, on a alors, pour toute matrice $\mathrm{Y} \in \mathbb{M}_2(\mathbb{C})$, $\boxed{\Gamma(\mathrm{Y}) = \mathrm{B}_{i_0}^{-1}\mathrm{YB}_{i_0} \text{ et donc } \beta = 1}$.

PARTIE IV :

1. Soit $X = \begin{pmatrix} x_1 & x_3 \\ x_2 & x_4 \end{pmatrix} = \sum_{i=1}^{4} x_i E_i$.

$\Delta(X) = x_1x_4 - x_2x_3$; d'après le cours, Δ est une forme quadratique sur $\mathbb{M}_2(\mathbb{C})$, dont la matrice dans la base (E_1, E_2, E_3, E_4) est $A = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & \frac{1}{2} \\ 0 & 0 & -\frac{1}{2} & 0 \\ 0 & -\frac{1}{2} & 0 & 0 \\ \frac{1}{2} & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$; son rang est égal à 4.

Avec des notations évidentes, on a, directement d'après le cours : $\widetilde{\Delta}(X,Y) = \dfrac{1}{2}\left(x_1y_4 + x_4y_1 - x_2y_3 - y_2x_3\right)$

2. **a)** Φ est non nulle, donc il existe $X_0 \in \mathbb{M}_2(\mathbb{C})$ telle que $\Phi(X_0) \neq 0$. Or $\Phi(X_0) = \Phi(X_0 I) = \Phi(X_0)\Phi(I)$; donc $\boxed{\Phi(I) = 1\ .}$

b) Si X est inversible, $\Phi(X)\Phi(X^{-1}) = \Phi(I) = 1$; donc $\Phi(X) \neq 0$.

c) Si $X \in \mathbb{M}_2(\mathbb{R})$ est non inversible, elle est donc de rang 0 ou 1.

- Si $\operatorname{rg} X = 0$, $X = 0$ et $\Phi(X) = 0$ (puisque Φ est une forme quadratique).
- Si $\operatorname{rg} X = 1$, on sait d'après le cours que X est équivalente à n'importe quelle matrice de rang 1 ; elle est donc équivalente à E_2 : il existe P et Q inversibles telles que $X = PE_2Q$. On a alors $\Phi(X) = \Phi(P)\Phi(E_2)\Phi(Q)$; mais $E_2^2 = 0$, donc $[\Phi(E_2)]^2 = 0$ donc $\Phi(E_2) = 0$. On en déduit $\underline{\Phi(X) = 0\ .}$

d) Soit $X \in \mathbb{M}_2(\mathbb{C})$, et $\widetilde{\Phi}$ la forme bilinéaire symétrique associée à Φ. On a alors, pour tout $\lambda \in \mathbb{C}$, $\Phi(X + \lambda I) = \Phi(X) + 2\lambda\widetilde{\Phi}(X, I) + \lambda^2$ (car $\Phi(I) = 1$).

Notons $f(\lambda) = \Phi(X + \lambda I)$ et $g(\lambda) = \Delta(X + \lambda I)$. f et g sont donc deux fonctions polynômes de degré 2 ; de plus, d'après 2.b et 2.c, $f(\lambda) = 0 \Longleftrightarrow X + \lambda I$ non inversible $\Longleftrightarrow \det(X + \lambda I) = 0 \Longleftrightarrow g(\lambda) = 0$.

Ainsi : λ racine de $f \Longleftrightarrow \lambda$ racine de g. Donc $f = g$, puisqu'il s'agit de fonctions polynômes de degré 2 et de coefficient dominant égal à 1.

Donc $\forall X \in \mathbb{M}_2(\mathbb{C})$, $\forall \lambda \in \mathbb{C}$, $\Phi(X + \lambda I) = \Delta(X + \lambda I)$ et, en prenant $\lambda = 0$, on obtient $\boxed{\Phi = \Delta\ .}$

⋆ ⋆ ⋆ ⋆
⋆ ⋆ ⋆
⋆ ⋆
⋆